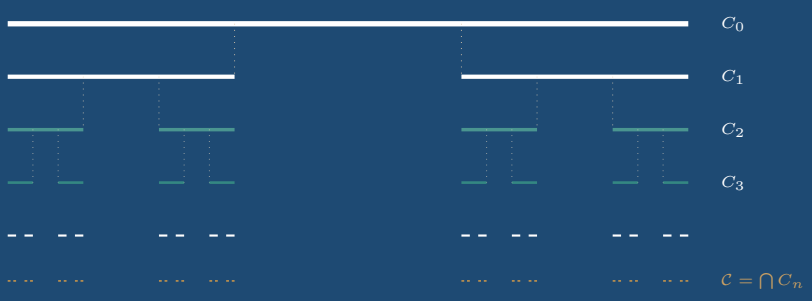
MIT 18.100B REAL ANALYSIS SPRING 2025

实分析

从实数的完备性到 Picard 定理：把微积分讲严格



原课程主讲：Tobias Holck Colding

独立中文整理本

MIT OPENCOURSEWARE · 18.100B

实分析逐讲讲义

从实数的完备性到 Picard 定理：把微积分讲严格

原课程主讲：Tobias Holck Colding

原课程：MIT 18.100B　2025 年春季学期

数学基础自学讲义项目　·　2026 年 11 月修订

依据 MIT OpenCourseWare 材料独立整理与扩充

来源、版本与使用说明

原课程：MIT OpenCourseWare 18.100B Real Analysis，2025 年春季学期
原课程主讲：Tobias Holck Colding

课程页面：https://ocw.mit.edu/courses/18-100b-real-analysis-spring-2025/

中文整理与扩充：数学基础自学讲义项目
整理本版本：2026 年 11 月修订版　**修订日期**：2026-11-04

本书依据原课程的讲义、习题与复习材料独立整理，补充中文讲解、证明步骤、例题与练习。它是学习辅助材料，不代表 MIT 或原课程教师发布、审定或背书；各讲的具体依据见「对应材料」。

参考读物：

- 原课程教材：B. S. Thomson, J. B. Bruckner, A. M. Bruckner, *Elementary Real Analysis*, 2nd ed.
- 延伸阅读：Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed.

许可与使用：原课程材料的署名与许可按其来源页面标注。本整理本的改写与新增内容采用署名–非商业性使用–相同方式共享 4.0 国际许可协议（CC BY-NC-SA 4.0）。转载或改编时，请保留来源、署名与许可说明，并标明所作修改；第三方材料仍适用各自的许可。课程网站的说明见MIT OCW 使用条款。

排版：XeLaTeX 与 ctex；图形主要由 TikZ 绘制。

前言：为什么需要实分析？

微积分给出了计算极限、导数和积分的工具。实分析进一步追问：这些运算何时有定义？一个证明中，哪些条件保证了结论成立？例如，在 $[0,1]$ 上，连续函数列 $f_n(x) = x^n$ 逐点收敛，但极限函数在 1 处不连续。这说明，讨论极限时需要区分逐点收敛与一致收敛。

本书的路线

全书以实数的完备性为起点。第一部分讨论上确界、数列和级数，再用这些工具研究连续函数。第二部分引入度量空间、紧性、微分和 Riemann 积分，最后讨论函数列、幂级数与常微分方程的 Picard 存在唯一性定理。

三条思路贯穿这些内容。首先，完备性保证有上界的非空实数集有上确界，也保证实数中的 Cauchy 列收敛。其次，紧性把连续函数的局部信息组织成整体结论：连续实值函数在非空紧集上取得最值；紧度量空间上的连续函数一致连续。再次，一致收敛控制函数列在整个定义域上的误差。连续函数列的一致极限连续；闭区间上的 Riemann 可积函数列一致收敛时，可以交换极限与积分。逐项求导还需要额外条件，具体定理见第 21、22 讲。

课程材料与本整理本

本书依据 MIT OpenCourseWare 18.100B 的课程材料整理，共 23 讲和两次复习课。部分原课中反复出现的定义与证明在本书集中编排；每讲开头的「对应材料」给出具体来源。

本书为自学补写动机、证明步骤、例题和练习，也保留原课程材料作为进一步学习的参照。它是一份独立的中文学习辅助材料，不能替代原课程的官方教材、作业与解答。先修要求、各部分路线和阅读建议列在后面的「如何使用本讲义」中。

如何使用本讲义

一讲的阅读顺序

每讲开头的「对应材料」说明来源；讲次与原课程课次的具体关系以该说明为准。

(1) **看目标与动机**：先明确本讲要解决的问题，再进入定义和定理。

(2) **读证明与例题**：先尝试说出思路，再逐步核对条件和计算；遇到「想一想」时，先自己作答。

(3) **做练习再看答案**：答案用于核对步骤。做错的题应回到相应定义、定理或例题查找原因。

(4) **用小结与复习课自测**：合上正文复述主要结论；完成一部分后，再做相应的 R1、R2、…… 复习课。

练习难度按本讲内容标记：★ 直接应用定义或定理；★★ 组合结论或完成较长计算；★★★ 需要额外构造或推广。星级用于安排学习顺序。

版面元素与编号

标记	读法
定义、公理	青色色条给出精确表述。检查对象、条件和量词；青色粗体标记首次引入的术语。
定理、命题、引理	蓝色色条给出结论。先读条件，再读结论；蓝色粗体提示需要记住的内容。
例　解	橙色方块标记例题，解答以青色 ♦ 结束；可以遮住解答先算一遍。
思路　证明	思路说明证明计划，证明给出论证；证明以蓝色 ■ 结束。
想一想	暂停阅读，检查自己对刚出现的概念或结论的理解，再核对「答」。
直观理解	图像或估算用于帮助理解；正式结论仍以定义、定理及证明为准。
易错提醒	核对常见错误及其原因，尝试说明错误方法在哪一步失效。
核心思想	提炼一节或一讲的方法；复习时结合本讲小结阅读。

「定理 3.2」表示第 3 讲的第 2 条定理类结论；「定理 R1.3」属于复习课 1。复习课放在每部分末尾，包含核心结论、题型例题、常见错误与自测。

本课程的准备与路线

本书建议准备：单变量微积分的计算（求导、积分、Taylor 展开），以及基本的证明方法（数学归纳法、反证法、量词的否定）。这是针对本书内容的阅读建议；MIT 原课程正式先修为 18.02 多变量微积分。阅读时要检查实数完备性、极限、连续性与积分定义的条件。

建议的读法：每讲的定义要能默写，每个证明要能用两三句话说出思路。学完一讲先做本讲练习，再做「对应材料」中列出的 MIT 习题集。R1 复习本书第 1–11 讲，R2 复习第 12–23 讲。原课期中还含度量空间内容，本书将其后移到第 12 讲，故 R1 不覆盖原课完整期中范围。

各部分的学习目标

部分	讲次	主要内容	学完应能做到
第一部分	1–11，R1	完备性、确界、数列、级数、幂级数与连续函数。	用定义写出极限证明；说明完备性在收敛、介值与最值问题中的作用。
第二部分	12–23，R2	度量空间与紧性；微分与积分；函数列、幂级数的运算与 Picard 定理。	区分不同收敛方式；检查极限、求导与积分交换的条件，并用于证明与计算。

常用符号与记号约定

本表用于查阅记号；定义、定理及完整条件见右列所指讲次。集合与函数的定义域以正文声明为准。

记号	含义与约定	查阅位置
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	自然数、整数、有理数、实数、复数；本书 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$，不含 0。	第 1–3 讲
$A \subset B$，$A \subseteq B$	子集关系，均允许相等；真子集记作 $A \subsetneq B$。	第 1 讲
$\sup E$，$\inf E$	上确界与下确界；非空实数集有上界或下界时，相应的实确界存在。	第 2–3 讲
$\max E$，$\min E$	最大元与最小元，要求该元素属于 E；与确界区别使用。	第 3 讲
$\forall$，$\exists$，$\exists!$	对任意、存在、存在且唯一；注意量词的顺序与作用范围。	第 1、5 讲
$x_n \to x$，(x_{n_k})	数列收敛与子列；子列下标满足 $n_1 < n_2 < \cdots$。	第 5、7 讲
$\limsup x_n$	上极限 $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$，可取扩展实数值 $\pm\infty$。	第 8 讲
$\liminf x_n$	下极限 $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$，可取扩展实数值 $\pm\infty$。	第 8 讲
(X, d)，$B_r(x)$	度量空间与开球；$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$，其中 $r > 0$。	第 12 讲
$\overline{B}_r(x)$	闭球 $\{y \in X : d(x, y) \leq r\}$；在一般度量空间中未必等于开球的闭包。	第 12–14 讲
$\overline{E}$，E°	集合的闭包与内部；相对开闭性需要指定所在空间。	第 12–13 讲
$C(X)$，$C([a, b])$	实值连续函数的集合；函数空间的度量须另行指定。	第 12 讲
f'，$f^{(k)}$	一阶与 k 阶导数；$C^k(I)$ 表示开区间 I 上 k 阶连续可微函数的集合。	第 15–16 讲
$\mathcal{R}([a, b])$	闭区间 $[a, b]$ 上全部 Riemann 可积函数的集合。	第 18 讲
$f_n \to f$	对函数列，未注明一致收敛时，按上下文指逐点收敛。	第 20 讲
$f_n \rightrightarrows f$	在给定定义域上一致收敛；导数与积分的交换条件另见定理。	第 20–22 讲
$\|f\|_\infty$	有界函数的上确界范数：$\sup_{x\in D} \|f(x)\|$，其中 D 为给定定义域。	第 12、23 讲

目录

前言：为什么需要实分析? ii

如何使用本讲义 iii

常用符号与记号约定 v

第一部分　实数、数列、级数与连续 1

第 1 讲　引言：怎样写证明——从介值定理到有序域 2

1.1　本课要做什么：从介值定理说起 . . . 2

1.2　有理数：表示、相等与运算 . . . 5

1.3　良定义：结果不能依赖写法 . . . 6

1.4　域：把四则运算写成公理 . . . 8

1.5　序：怎样让大小关系与运算相容 . . . 10

1.6　怎样把思路写成证明 . . . 11

练习 . . . 13

第 2 讲　无理数、上确界与实数的完备性 15

2.1　平方等于二的数为什么不在有理数中 . . . 15

2.2　上界与最大元：量词落在哪里 . . . 17

2.3　最小上界的两条要求 . . . 19

2.4　完备性给出什么存在性保证 . . . 21

2.5　用上确界证明正平方根存在 . . . 23

2.6　自然数能超过任何实数 . . . 25

练习 . . . 27

第 3 讲　确界、平方根存在性与阿基米德性质 29

3.1　上下界与确界的两项条件 . . . 29

3.2　确界的逼近刻画与集合变换 . . . 31

3.3　由完备性证明正平方根存在 . . . 34

3.4　阿基米德性质的第一次严格证明 . . . 36

3.5　数列与极限的第一种严格写法 . . . 38

练习 . . . 41

第 4 讲 阿基米德性质、整数部分与稠密性 43

4.1 回顾：完备有序域 . . . 43
4.2 阿基米德性质：把实数尺度换成整数 . . . 46
4.3 有序域仍可能不满足阿基米德性质 . . . 47
4.4 整数部分：网格中紧靠左侧的点 . . . 48
4.5 稠密性：在任意短区间内找点 . . . 49
4.6 小数表示与数列：从有限近似到极限 . . . 51
练习 . . . 53

第 5 讲 数列与极限 55

5.1 从十进制小数说起：什么是数列 . . . 55
5.2 极限的 ε–N 定义 . . . 56
5.3 极限唯一，收敛数列有界 . . . 60
5.4 极限的四则运算：把误差分开控制 . . . 61
5.5 保序与夹逼：不用知道中间项的精确值 . . . 63
5.6 子列：按递增下标抽取 . . . 64
练习 . . . 66

第 6 讲 单调收敛定理、柯西列与压缩映射 69

6.1 单调收敛定理 . . . 69
6.2 用单调收敛定理求递推数列的极限 . . . 72
6.3 闭区间套定理与数 e . . . 74
6.4 柯西列 . . . 77
6.5 压缩映射与不动点 . . . 80
6.6 Newton 法 . . . 84
练习 . . . 87

第 7 讲 Bolzano–Weierstrass 定理与柯西准则 89

7.1 子列：从发散数列里挑出收敛的部分 . . . 89
7.2 Bolzano–Weierstrass 定理：二分法 . . . 91
7.3 单调子列与全部子列极限 . . . 93
7.4 柯西充分性与可计算的误差 . . . 94
7.5 无理数倍的小数部分：从值到子列 . . . 97
7.6 实数完备性的几个等价形式 . . . 98
练习 . . . 100

第 8 讲　级数与收敛判别法 **102**

8.1　从数列到级数：部分和 . . . 102
8.2　非负项级数与比较判别法 . . . 106
8.3　绝对收敛与条件收敛 . . . 109
8.4　比值判别法与根值判别法 . . . 113
8.5　上极限 . . . 115
8.6　幂级数与收敛半径 . . . 118
练习 . . . 121

第 9 讲　幂级数定义的函数与连续性 **124**

9.1　把一个级数变成一个函数 . . . 124
9.2　阶乘尾和与精度保证 . . . 126
9.3　有理幂：存在性与表示无关 . . . 127
9.4　连续性：输入精度如何控制输出精度 . . . 128
9.5　连续函数的代数运算与复合 . . . 130
9.6　从截断多项式证明指数级数连续 . . . 132
9.7　有理点上的值能决定整个函数吗 . . . 133
练习 . . . 134

第 10 讲　指数函数与连续性 **136**

10.1 两个非负级数怎样相乘 . . . 136
10.2 绝对收敛与三角部分和 . . . 138
10.3 指数级数的加法公式 . . . 141
10.4 正性与有理指数 . . . 142
10.5 稠密集上的跳跃：处处不连续的函数 . . . 145
练习 . . . 148

第 11 讲　介值定理与最值定理 **150**

11.1 从局部连续到数列极限 . . . 150
11.2 闭区间上的最值为什么能取得 . . . 151
11.3 逐个检查最值定理的条件 . . . 153
11.4 介值定理：中间高度一定能够达到 . . . 154
11.5 二分法：从存在性得到误差保证 . . . 156
11.6 像集、正下界与连续方程 . . . 157
练习 . . . 160

复习课 1　实分析阶段复习：完备性、极限与连续性 **162**

R1.1 知识地图 . . . 162
R1.2 核心结论回顾 . . . 163
R1.3 题型与例题 . . . 167
R1.4 常见错误 . . . 170
练习 . . . 171

第二部分　度量空间、微分、积分与函数列 **173**

第 12 讲　度量空间、收敛与开集 **174**

12.1 距离需要满足什么条件 . . . 174
12.2 平面上的几种距离 . . . 175
12.3 点也可以是函数 . . . 177
12.4 收敛、柯西与空间中缺失的极限 . . . 178
12.5 球、有界集与收敛列 . . . 180
12.6 开集：每个点周围都有余量 . . . 182
12.7 集合运算与开集的并交 . . . 183
练习 . . . 185

第 13 讲　闭集、相对空间与开覆盖 **187**

13.1 闭集保留了怎样的边界 . . . 187
13.2 闭球与距离函数 . . . 188
13.3 闭集的序列刻画 . . . 190
13.4 闭集的交与并：有限性放在哪里 . . . 191
13.5 相对空间：开闭判断必须注明在哪里 . . . 192
13.6 开覆盖与有限子覆盖 . . . 194
13.7 用一个覆盖否定紧性 . . . 195
练习 . . . 196

第 14 讲　紧性 **199**

14.1 开覆盖与紧集 . . . 199
14.2 紧集闭且有界，反之不然 . . . 201
14.3 一个更有启发性的反例：$C([0,1])$ 中的闭单位球 . . . 203
14.4 Heine–Borel 定理 . . . 205
14.5 紧性带来的序列结论 . . . 207
14.6 用紧性证明最小值存在 . . . 208
练习 . . . 210

第 15 讲　导数 **212**
15.1 导数的定义 . . . 213
15.2 可导推出连续，但反向不成立 . . . 215
15.3 和、积、商与链式法则 . . . 217
15.4 单侧导数与分段函数 . . . 219
15.5 导数是最佳线性逼近 . . . 221
练习 . . . 223

第 16 讲　导数的应用 **225**
16.1 内点极值与 Rolle 定理 . . . 225
16.2 中值定理：把割线变成切线 . . . 227
16.3 Cauchy 中值定理与 L'Hôpital 法则 . . . 230
16.4 Taylor 定理与误差估计 . . . 232
练习 . . . 236

第 17 讲　Taylor 余项与上下和 **238**
17.1 Taylor 余项的定量控制 . . . 238
17.2 分割与上下和 . . . 242
17.3 分割加细与上下和的单调性 . . . 245
17.4 上下积分与 Darboux 判据 . . . 247
练习 . . . 250

第 18 讲　一致连续与 Riemann 积分 **252**
18.1 从面积到上和与下和 . . . 252
18.2 加细、上积分与下积分 . . . 255
18.3 Riemann 可积准则 . . . 258
18.4 一致连续 . . . 261
18.5 紧致区间上的一致连续：Heine–Cantor 定理 . . . 264
18.6 闭区间连续函数的 Riemann 可积性 . . . 265
练习 . . . 266

第 19 讲　积分基本定理与应用 **268**
19.1 积分可以怎样运算？ . . . 268
19.2 累积量为何可导？ . . . 270
19.3 导数如何恢复积分？ . . . 272
19.4 积分的平均值与右端点近似 . . . 274
19.5 积分如何测量弧长？ . . . 275

19.6 区间无界或函数无界时怎么办? . . . 276
练习 . . . 278

第 20 讲 积分的应用：弧长与角度；函数列的一致收敛 280
20.1 曲线的长度：用内接折线逼近 . . . 280
20.2 连续可导曲线的弧长公式 . . . 283
20.3 用弧长定义角度：arccos 与 π . . . 286
20.4 逐点收敛与一致收敛 . . . 288
20.5 Weierstrass 判别法与幂级数 . . . 290
练习 . . . 292

第 21 讲 连续函数列与一致收敛 294
21.1 回顾：两种收敛与「交换极限」 . . . 295
21.2 一致收敛保持连续性 . . . 296
21.3 $C([a,b])$ 在最大值距离下完备 . . . 298
21.4 一致收敛与积分 . . . 300
21.5 一致收敛与求导 . . . 302
21.6 初值问题 $y'=y$ 的唯一解 . . . 305
练习 . . . 306

第 22 讲 幂级数的逐项运算与高阶展开 308
22.1 求导后收敛半径为何不变? . . . 308
22.2 什么时候可以逐项求导? . . . 310
22.3 各阶导数怎样展开? . . . 312
22.4 什么时候可以逐项积分? . . . 315
22.5 半径边界上要另作判断 . . . 317
练习 . . . 318

第 23 讲 常微分方程的存在唯一性 320
23.1 方程有解，初值才选出一个解 . . . 320
23.2 积分方程把解变成不动点 . . . 321
23.3 选短时间窗，让积分算子成为压缩 . . . 323
23.4 Picard–Lindelof 定理：局部存在且唯一 . . . 325
23.5 条件决定唯一性，也决定解能走多远 . . . 327
23.6 幂级数也能构造常微分方程的解 . . . 329
练习 . . . 330

复习课 2　期末复习：度量空间、微分、积分与一致收敛 **333**

R2.1 知识地图 333

R2.2 核心结论回顾 334

R2.3 题型与例题 339

R2.4 常见错误 342

练习 343

第一部分

实数、数列、级数与连续

第 1 讲

引言：怎样写证明——从介值定理到有序域

Introduction: Proofs, Fields and Ordered Fields

对应材料：MIT 18.100B Lecture 1 讲义与课堂录像；习题集 1 第 1、2、4 题（改编为例题与练习）。参考 Thomson–Bruckner–Bruckner《Elementary Real Analysis》第 1 章，Rudin《数学分析原理》第 1 章。

本讲目标

(1) 明白本课的两个任务：学会写数学证明，学会证明定理；知道介值定理为什么「图像上很清楚」却必须证明，以及它依赖实数的哪些性质。

(2) 掌握有理数的表示和运算，理解什么叫良定义，能证明有理数的乘法、加法和大小关系与分数的写法无关。

(3) 记住域的 11 条公理，会判断一个集合是不是域，并能只用公理推出「零元唯一」「$0\cdot x=0$」「$(-1)(-1)=1$」等事实。

(4) 掌握有序集与有序域的定义，会证明「$x<y,\ z>0\Rightarrow xz<yz$」「$1>0$」「非零元的平方为正」，知道 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{F}_2$ 为什么不能成为有序域。

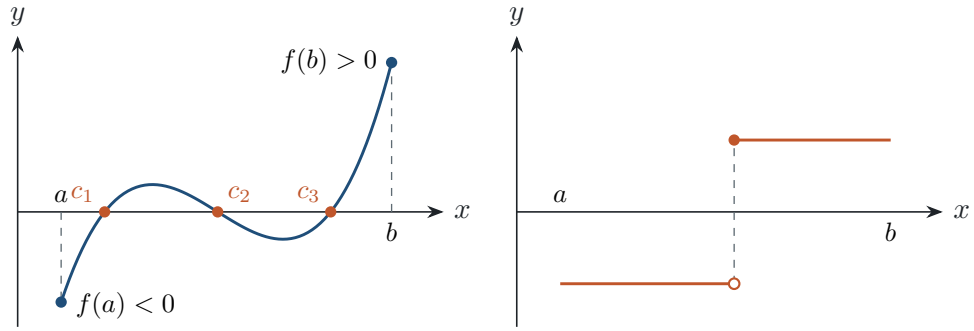
(5) 学会证明的基本写法：写清假设和目标，每一步注明依据，把「找思路」和「写证明」分开。

1.1 本课要做什么：从介值定理说起

18.100B 有两个核心任务。第一，学会写数学证明：什么样的论证才算严格，一步要写多细。第二，学会证明定理：面对一个陈述，怎样找到通向它的路。第一节课用一个大家早就「知道」的定理来说明这两件事。

> **定理（介值定理，第 11 讲证明）** 设 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，且 $f(a)<0<f(b)$。则存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$。

「连续」的直观意思是：画 f 的图像时笔尖不离开纸面。函数在 $x=a$ 处取负值，在 $x=b$ 处取正值，一笔画过去，中途必然穿过 x 轴（图 1.1 左）。穿过的地方可能不止一处，定理只保证至少有一处。如果允许跳跃，图像可以从 x 轴下方直接跳到上方，一次也不经过 0（图 1.1 右）。



连续：至少穿过 x 轴一次　　有跳跃：可以跳过 0

图 1.1　介值定理的图像。左：连续函数从负到正，至少有一个零点（这里有三个）。右：有跳跃的函数可以不取 0。

既然图像这么清楚，为什么还要证明？Colding 教授在第一节课给了两个理由。

(1) **直觉会失效。**问题一复杂，直觉就不再可靠：有些命题看上去对，其实是错的；有些命题连该猜对还是猜错都看不出来。只有把每一步都建立在牢固的基础上，直觉失灵时我们才能接着往前走。

(2) **「画一笔」本身没有定义。**要把图像变成证明，必须先说清楚「连续」「区间」「实数」分别是什么。一旦开始这样做就会发现：介值定理成立，靠的是实数集 $\mathbb{R}$ 的某种特殊性质，而这种性质有理数集 $\mathbb{Q}$ 并不具备。

■ **例 1.1　介值定理在 $\mathbb{Q}$ 上不成立**　只在有理数里考虑函数 $f(x) = x^2 - 2$，定义域取 $[0,2] \cap \mathbb{Q}$。说明：f 在两端异号，图像「不跳」，却没有零点。

解　两端的值是 $f(0) = -2 < 0$，$f(2) = 2 > 0$。f 是多项式，按任何合理的意义都连续。

假设有有理数 c 使 $f(c) = 0$，即 $c^2 = 2$。第 2 讲将证明：**不存在平方等于 2 的有理数**。所以 f 在 $[0,2] \cap \mathbb{Q}$ 上没有零点。

再看 f 的符号。定义域里的有理数分成两类：

$$A = \{\, x \in [0,2] \cap \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \,\}, \qquad B = \{\, x \in [0,2] \cap \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \,\}.$$

由于没有有理数满足 $x^2 = 2$，每个点恰好落在一类里。f 在 A 上为负，在 B 上为正。A 和 B 的「分界点」本该是 $\sqrt{2}$，可它不在 $\mathbb{Q}$ 里。所以 f 的图像并不需要跳：它从缺口处「漏」了过去（图 1.2 左）。 ♦

例 1.1 说明：介值定理的证明**必须**用到 $\mathbb{R}$ 有而 $\mathbb{Q}$ 没有的性质。下面的二分法例子让我们看清这个性质是什么。

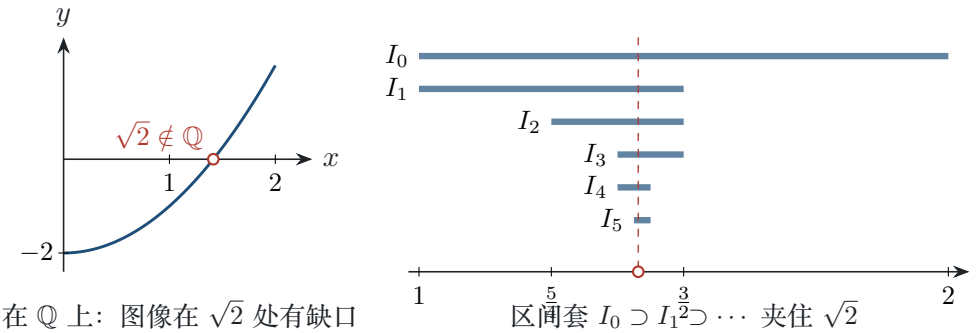
■ **例 1.2　二分法找 $x^2 - 2$ 的零点**　在 $[1,2]$ 上对 $f(x) = x^2 - 2$ 做二分法：每次取区间中点 m，若 $f(m) < 0$ 保留右半段，若 $f(m) > 0$ 保留左半段。做 7 步，写出每一步的区间。

解　初始区间 $[1,2]$，$f(1) = -1 < 0$，$f(2) = 2 > 0$。每一步都用分数精确计算 $f(m) = m^2 - 2$：

步	当前区间	中点 m 与 $f(m)$	保留
1	$[1,2]$	$\frac{3}{2}$，　$\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}>0$	左：$[1,\frac{3}{2}]$
2	$[1,\frac{3}{2}]$	$\frac{5}{4}$，　$\frac{25}{16}-2=-\frac{7}{16}<0$	右：$[\frac{5}{4},\frac{3}{2}]$
3	$[\frac{5}{4},\frac{3}{2}]$	$\frac{11}{8}$，　$\frac{121}{64}-2=-\frac{7}{64}<0$	右：$[\frac{11}{8},\frac{3}{2}]$
4	$[\frac{11}{8},\frac{3}{2}]$	$\frac{23}{16}$，　$\frac{529}{256}-2=\frac{17}{256}>0$	左：$[\frac{11}{8},\frac{23}{16}]$
5	$[\frac{11}{8},\frac{23}{16}]$	$\frac{45}{32}$，　$\frac{2025}{1024}-2=-\frac{23}{1024}<0$	右：$[\frac{45}{32},\frac{23}{16}]$
6	$[\frac{45}{32},\frac{23}{16}]$	$\frac{91}{64}$，　$\frac{8281}{4096}-2=\frac{89}{4096}>0$	左：$[\frac{45}{32},\frac{91}{64}]$
7	$[\frac{45}{32},\frac{91}{64}]$	$\frac{181}{128}$，　$\frac{32761}{16384}-2=-\frac{7}{16384}<0$	右：$[\frac{181}{128},\frac{91}{64}]$

7 步后区间是 $[\frac{181}{128},\frac{91}{64}]=[1.4140625,\ 1.421875]$，长度 $1/2^7=1/128$。真实零点 $\sqrt{2}\approx 1.41421356$ 确实在里面。

每一步区间长度减半，左端点处 $f<0$，右端点处 $f>0$，所有区间一个套一个。这样无限做下去，区间长度趋于 0，它们「夹住」的那个点就是零点的候选。问题在于：**这个点存在吗？**在 $\mathbb{R}$ 里它存在，就是 $\sqrt{2}$；在 $\mathbb{Q}$ 里它不存在，因为所有端点都是有理数，被夹住的位置却是一个缺口。 ♦



在 $\mathbb{Q}$ 上：图像在 $\sqrt{2}$ 处有缺口　　区间套 $I_0\supset I_1\supset\cdots$ 夹住 $\sqrt{2}$

图 1.2　左：在 $\sqrt{2}$ 位置标出缺失的零点，蓝色连线只辅助显示符号，不表示其余无理点属于定义域。右：例 1.2 的前 6 个区间长度逐次减半，都包含 $\sqrt{2}$。

直观理解　任意两个有理数之间还有有理数，例如它们的平均数。但「任意两点之间还找得到点」并不保证每个不断收缩的闭区间套在 $\mathbb{Q}$ 中都有公共点。上面的二分区间端点全是有理数，唯一可能的公共点却是 $\sqrt{2}$。第 3 讲引入的完备性将准确处理这个区别。

于是我们要回答三个问题，它们贯穿本课的前几讲：

Q1　什么是实数？

Q2　为什么 $\sqrt{2}$ 是实数？

Q3　$\sqrt{2}$ 到底是什么？

本课的回答是一句话：

$\mathbb{R}$ 是包含$\mathbb{Q}$ 的完备有序域。

其中「域」说的是加减乘除的规则，「有序」说的是大小关系的规则，「完备」将由上确界存在的条件准确表述。本讲讲前两个词，完备性留到第 2–3 讲。图 1.3 是前几讲的路线。

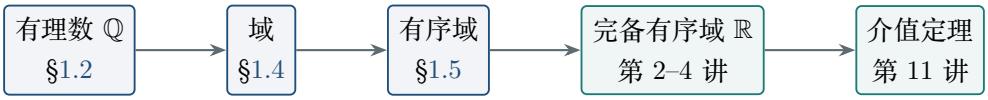


图 1.3　前几讲的路线：从 ℚ 抽象出公理，逐步加条件，最后得到 ℝ 并证明介值定理。

历史与背景　1817 年，Bolzano 发表了介值定理的一个「纯分析」证明，明确反对用几何直观代替证明。Cauchy 在 1821 年的《分析教程》里也给出了证明。但两人都没有说清楚实数是什么。直到 1872 年前后，Dedekind（用「分割」）和 Cantor（用柯西列）才分别给出实数的严格构造，补上了这个漏洞。

想一想　介值定理的两个条件「f 连续」和「定义域是区间」能去掉吗？各举一个反例。

答　都不能去掉。去掉连续：图 1.1 右边的跳跃函数。去掉区间：在 $[0,1]\cup[2,3]$ 上令 $f=-1$（左段）和 $f=1$（右段），f 在每一段上都是常数，因而连续，两端异号，却没有零点。例 1.1 也属于这一类：$[0,2]\cap\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的区间。

1.2　有理数：表示、相等与运算

先固定记号。本课程沿用 18.100B 的约定：

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\},\qquad \mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\},\qquad \mathbb{Q}=\left\{\tfrac{m}{n}\mid m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

易错提醒　在本课程中 $0\notin\mathbb{N}$。有些书（包括本系列的数论讲义）把 0 算作自然数。读别的材料时先看清约定。$\mathbb{Q}$ 的定义里要求分母 $n\in\mathbb{N}$，也就是分母为正，这一点在定义大小关系时要用到。

同一个有理数有许多写法，例如 $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$。（$\frac{-3}{-6}$ 的分母是负数，不合本课约定。）所以 $\mathbb{Q}$ 里的「相等」不能定义成「分子、分母分别相等」，要另外规定。

定义 1.1（有理数的相等、运算与大小）　设 $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$，$n_1,n_2\in\mathbb{N}$。规定

$$\begin{aligned}
&\text{相等：}\quad \frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}\iff m_1n_2=m_2n_1,\\
&\text{加法：}\quad \frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2},\\
&\text{乘法：}\quad \frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2},\\
&\text{大小：}\quad \frac{m_1}{n_1}<\frac{m_2}{n_2}\iff m_1n_2<m_2n_1.
\end{aligned}$$

这些规则都把有理数的问题化成整数的问题。右边只用到 $\mathbb{Z}$ 的加法、乘法和大小，我们默认这些已经知道。加法和乘法结果的分母 n_1n_2 仍是正整数，所以结果还是合乎约定的分数。

直观理解　把分数 $\frac{m}{n}$ 画成格点 (n,m)，它对应从原点出发、斜率为 $\frac{m}{n}$ 的射线。两个分数相等，就是两个格点落在同一条射线上（图 1.4）。$m_1n_2 = m_2n_1$ 正是「斜率相等」去分母后的样子。$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$ 则是第一条射线比第二条低。

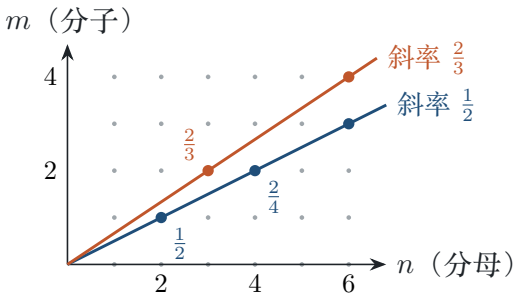


图 1.4　分数 $\frac{m}{n}$ 对应格点 (n,m)。同一条射线上的格点代表同一个有理数：$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$。射线越高，有理数越大：$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$。

定义里的「相等」是我们自己规定的，所以要先检查它配得上「相等」这个名字：自己等于自己，可以交换，可以传递。

■ **例 1.3　分数的相等是等价关系**　记 $\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2}$ 当且仅当 $m_1n_2 = m_2n_1$。证明 $\sim$ 满足自反性、对称性和传递性。

解　**自反性**。$m_1n_1 = m_1n_1$，所以 $\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_1}{n_1}$。

对称性。若 $m_1n_2 = m_2n_1$，等式两边对调就是 $m_2n_1 = m_1n_2$，即 $\frac{m_2}{n_2} \sim \frac{m_1}{n_1}$。

传递性。设 $m_1n_2 = m_2n_1$ ①，$m_2n_3 = m_3n_2$ ②，要证 $m_1n_3 = m_3n_1$。把①两边乘 n_3，再用②：

$$(m_1n_3)\,n_2 = (m_1n_2)\,n_3 \overset{①}{=} m_2n_1n_3 = (m_2n_3)\,n_1 \overset{②}{=} m_3n_2n_1 = (m_3n_1)\,n_2.$$

于是 $(m_1n_3 - m_3n_1)\,n_2 = 0$。因为 $n_2 \in \mathbb{N}$，$n_2 \neq 0$，而两个非零整数的乘积不为 0，所以 $m_1n_3 - m_3n_1 = 0$。 ♦

传递性的证明最后一步要约去 n_2，这里用到了 $n_2 \neq 0$。如果允许分母为 0，传递性就会失败（练习 1.2）。这是「分母不能为零」在定义层面的真正理由。

1.3　良定义：结果不能依赖写法

定义 1.1 的加法和乘法是用分子、分母写出来的，而同一个有理数有许多种分子分母。如果换一种写法，算出来的结果不是同一个有理数，这个「运算」就没有意义。

定义 1.2（良定义）　用代表元来定义一个运算（或关系）时，如果把每个输入换成与它相等的另一种写法，输出仍然相等（关系仍然成立或仍然不成立），就称这个运算（关系）良定义（well-defined）。

例如用通常规则计算，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，换成 $\frac{2}{4}+\frac{2}{6}=\frac{20}{24}$，两者仍相等。检验几个数字只能帮助理解；良定义要求对**所有等价的写法**都成立。

命题 1.3（有理数运算的良定义）　定义 1.1 中的加法、乘法以及大小关系均与代表分数的选择无关。

思路　设两组输入分别换了写法，把「输入相等」写成两个整数等式。要证输出相等，再按定义交叉相乘。大小关系也这样处理，但乘不等式时必须知道所乘的分母为正。

证明　设 $m_1/n_1=m_2/n_2$，$p_1/q_1=p_2/q_2$，其中分母全为正整数。于是

$$m_1n_2=m_2n_1,\qquad p_1q_2=p_2q_1.$$

*乘法。*要证 $(m_1p_1)/(n_1q_1)=(m_2p_2)/(n_2q_2)$，只需证

$$(m_1p_1)(n_2q_2)=(m_1n_2)(p_1q_2)=(m_2n_1)(p_2q_1)=(m_2p_2)(n_1q_1).$$

这里先重排整数乘积，再分别使用两个已知等式；没有使用正要证明的有理数乘法规则。

*加法。*两个结果的分子、分母交叉相乘后，左边为

$$\begin{aligned}(m_1q_1+p_1n_1)n_2q_2&=(m_1n_2)q_1q_2+(p_1q_2)n_1n_2\\&=(m_2n_1)q_1q_2+(p_2q_1)n_1n_2\\&=(m_2q_2+p_2n_2)n_1q_1.\end{aligned}$$

这正是两个和相等的定义。

*大小关系。*若 $m_1q_1<p_1n_1$，两边乘正整数 n_2q_2，再重排并代换，得到

$$(m_2q_2)n_1q_1<(p_2n_2)n_1q_1.$$

约去正整数 n_1q_1，得 $m_2q_2<p_2n_2$。反方向交换下标 $1,2$ 后作相同的整数运算，故两个比较结果等价。 ■

■ **例 1.4　一个没有良定义的「加法」**　若把分数的「加法」规定为 $\frac{m}{n}\oplus\frac{p}{q}=\frac{m+p}{n+q}$，它能成为 $\mathbb{Q}$ 上的运算吗？

解　只改变一个输入的写法来检验。虽然 $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$，但

$$\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{3}=\frac{2}{5},\qquad\frac{2}{4}\oplus\frac{1}{3}=\frac{3}{7},\qquad 2\cdot 7\neq 3\cdot 5.$$

同样的两个有理数得到不同结果，所以不能成为 $\mathbb{Q}$ 上的运算。问题在于代表元的选择，甚至还没轮到检查交换律或结合律。 ♦

想一想　为了让分数乘法有意义，能否先假设所有输入都写成最简分数，省掉良定义的证明？
答　可以用「唯一的最简表示」重新组织构造，但必须先证明每个有理数有唯一的最简表示，并规定运算后再约分。通常的分数规则允许直接用任意表示，因此仍应证明上述规则与表示无关。两条路线都需要论证，不能只说「大家都这样算」。

1.4　域：把四则运算写成公理

$\mathbb{Q}$ 中的数可以相加、相乘，可以取相反数，非零数可以取倒数。整数中 2 的倒数却不在 $\mathbb{Z}$ 里。要准确表达这种差别，列出我们真正用到的运算规则就够了。

定义 1.4（域的加法公理）　集合 F 上有加法和乘法。域的五条加法公理为：对任意 $x, y, z \in F$，

(A1) $x + y \in F$（封闭性）；

(A2) $x + y = y + x$（交换律）；

(A3) $(x + y) + z = x + (y + z)$（结合律）；

(A4) 存在 $0 \in F$，对每个 x 都有 $0 + x = x$；

(A5) 对每个 x 存在 $-x \in F$，使 $x + (-x) = 0$。

定义 1.5（域的乘法公理与分配律）　还要求以下五条乘法公理及一条分配律：

(M1) $xy \in F$；

(M2) $xy = yx$；

(M3) $(xy)z = x(yz)$；

(M4) 存在 $1 \in F$，对每个 x 都有 $1x = x$；

(M5) 对每个 $x \neq 0$，存在 $x^{-1} \in F$，使 $xx^{-1} = 1$。

分配律为 $(x + y)z = xz + yz$。满足这些条件且 $0 \neq 1$ 的集合称为**域**（field）。

上述公理沿用原课程的「5 + 5 + 1」排列。原讲义的公理表没有单列 $0 \neq 1$，习题集 1 第 1 题明确加了这个条件；本讲统一把它纳入域的定义，排除只有一个元素的退化情形。公理里的 $0, 1$ 起初只是两个特殊元素的名称；证明以前，不能把关于通常实数的所有规则一并搬进来。

例如 $\mathbb{Q}$ 的零元是 $0/1$，单位元是 $1/1$。m/n 的相反数是 $(-m)/n$。若 $m \neq 0$，其倒数在 $m > 0$ 时写成 n/m，在 $m < 0$ 时写成 $(-n)/(-m)$，从而仍保持分母为正。两种情况下乘积都等于 1。

例 1.5　哪些熟悉的数集是域？　在通常的加法、乘法下，判断 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ 是否为域，并指出失败的具体公理。

解　$\mathbb{N}$ 不满足 (A4)，因为本课 $0 \notin \mathbb{N}$；也不满足 (A5)，例如 1 没有自然数范围内的相反数。$\mathbb{Z}$ 满足加法公理，却不满足 (M5)：若整数 u 满足 $2u = 1$，左边是偶数而右边是奇数，矛盾。$\mathbb{Q}$ 满足全部公理：封闭性与逆元已验证，交换、结合、分配律则由分数规则通分后化成整数恒等式。例如

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right).$$

任意分母均为正，所以计算中的各个分数都有定义。　♦

命题 1.6（唯一性与消去律）　域的零元、单位元、每个元素的相反数以及每个非零元素的倒数均唯一。此外，

$$a+c=b+c\Rightarrow a=b,\qquad ac=bc,\ c\neq 0\Rightarrow a=b.$$

思路　「唯一」要从两个候选出发，证明它们相等。消去律用公理保证存在的相反数或倒数，把共同的一项消掉；不能直接把「移项」「约分」当成尚未证明的规则。

证明　若 $0_1,0_2$ 都是零元，则 $0_1+0_2=0_2$（用 0_1 的性质），又 $0_1+0_2=0_1$（先交换再用 0_2 的性质），故 $0_1=0_2$。单位元满足 $1_1 1_2=1_2=1_1$，理由相同，只把加法换成乘法。

先证加法消去：若 $a+c=b+c$，两边加上 $-c$，利用结合律得

$$a=a+0=a+(c+(-c))=(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)=b.$$

若 u,v 都是 a 的相反数，则 $a+u=0=a+v$。先交换成 $u+a=v+a$，再消去 a，得 $u=v$。

当 $c\neq 0$ 时，c^{-1} 存在。若 $ac=bc$，两边乘 c^{-1}，由结合律得到 $a(cc^{-1})=b(cc^{-1})$，即 $a=b$。若 u,v 都是非零 a 的倒数，则 $ua=1=va$，乘法消去给出 $u=v$。 ■

从此可以写 $a-b=a+(-b)$，以及在 $b\neq 0$ 时写 $a/b=ab^{-1}$。减法、除法是由已有运算定义出来的，不另列公理。下面补出后续不等式证明需要的符号规则。

命题 1.7（零乘积与负号规则）　对域中的任意 x,y，有

$$0x=0,\qquad (-x)y=-(xy),\qquad (-x)(-y)=xy.$$

若 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$。特别地 $(-1)(-1)=1$。

证明　由 $0+0=0$ 和分配律，$0x=(0+0)x=0x+0x$。等式两边消去一个 $0x$，得 $0=0x$。

又 $xy+(-x)y=(x+(-x))y=0y=0$，所以 $(-x)y$ 是 xy 的相反数。由唯一性，$(-x)y=-(xy)$。$-(-x)=x$，因为 $(-x)+x=0$，故对负号规则再用一次，

$$(-x)(-y)=-\big(x(-y)\big)=-\big(-(xy)\big)=xy.$$

若 $xy=0$ 且 $x\neq 0$，则 $xy=x0$，由乘法消去得 $y=0$。取 $x=y=1$ 得最后一个结论。 ■

易错提醒　约分必须先核对被约去的量不为零。例如 $0\cdot 2=0\cdot 3$ 不能推出 $2=3$。域公理只保证非零元有倒数；「两边同除以 $x-y$」之前若恰有 $x=y$，这一步就没有定义。

■ **例 1.6　只有两个元素的域**　在 $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ 上，把整数加法、乘法的结果都取除以 2 的余数。验证它是域。

解　运算表完全确定了规则：

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

两个表关于主对角线对称，给出交换律。结合律与分配律可把三个输入各取 $0,1$，逐项核验；也可以使用整数恒等式取余后仍相等这一事实。0 是加法零元，1 是乘法单位元。0 与 1 的相反数分别是自身，因为 $1+1=0$；唯一非零元 1 的倒数还是 1。两个元素不同，故全部域公理成立。

这里的 $1+1$ 是域内部的运算，结果为 0。同样的记号在不同运算规则下可以有不同结果，这也说明不能把通常实数的全部性质默认加进域公理。 ♦

1.5　序：怎样让大小关系与运算相容

只有加减乘除，还不能谈「正数」「递增」或「区间」。$\mathbb{F}_2$ 已是域，却没有我们熟悉的数轴次序。先把「可比较大小」本身的要求说清楚，再问它与运算怎样配合。

定义 1.8（有序集与有序域）　集合 S 上的严格关系 $<$ 若满足：

(1) 对任意 x,y，$x<y$、$x=y$、$y<x$ 中恰有一个成立（三歧性）；

(2) $x<y$ 且 $y<z$ 推出 $x<z$（传递性），

就称 S 为**有序集**（ordered set），这里的序指全序。域 F 若带有这样的序，且满足

$$x<y \Rightarrow x+z<y+z, \qquad 0<x,\ 0<y \Rightarrow 0<xy,$$

则称为**有序域**（ordered field）。

例如 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 在通常次序下都是有序集，只有后者是有序域。只含一个元素的集合也是有序集：$<$ 始终不成立，每次比较都落入相等的情形；但它不满足域的 $0\neq 1$ 条件。有序集本身没有加法、乘法可言。

命题 1.9（有理数是有序域）　定义 1.1 的次序使 $\mathbb{Q}$ 成为有序域。

证明　三歧性由整数交叉乘积的三歧性得到。若 $a/b<c/d$ 且 $c/d<e/f$，则 $ad<bc$、$cf<de$。分别乘正整数 f,b，得到 $adf<bcf<bde$，约去正整数 d 得 $af<be$，即 $a/b<e/f$。

若 $a/b<c/d$，加 e/f 后交叉相乘，比较的是 $(af+be)df$ 与 $(cf+de)bf$。共同项相减后，恰为 $adf^2<bcf^2$，由 $ad<bc$ 和 $f^2>0$ 得到。若 $a/b>0$、$c/d>0$，因分母为正，$a,c>0$，所以 $ac/(bd)>0$。两条相容条件均已核对。 ■

加法的相容性马上给出 $x<y \iff 0<y-x$：正向两边加 $-x$，反向两边加 x。另外，$x<0 \iff 0<-x$，只需两边加 $-x$。这些都是把不等式改写为**某个差为正**，将原课程最后一个证明的关键步骤独立说清了。

定理 1.10（乘法与正负）　在有序域中，若 $x<y$，则

$$z>0 \Rightarrow xz<yz, \qquad z<0 \Rightarrow yz<xz.$$

每个非零元的平方为正，且 $1>0$。

思路　先把大小关系写成差的正性。正因子情形直接用「正数乘积为正」；负因子情形先对 $-z$ 使用这一点。平方为正要分底数正负两种情况，最后再对 1 用平方结论。

证明　若 $z>0$，由 $x<y$ 得 $y-x>0$。两个正元相乘，

$$0<(y-x)z=yz-xz,$$

再两边加 xz，得到 $xz<yz$。若 $z<0$，则 $-z>0$，故 $x(-z)<y(-z)$，即 $-xz<-yz$。两边加 $xz+yz$，得 $yz<xz$。

若 $u\neq 0$，由三歧性，$u>0$ 或 $u<0$。前者由正元乘法得 $u^2>0$；后者有 $-u>0$，故 $(-u)^2>0$，而由命题 1.7，$(-u)^2=u^2$。特别地 $1\neq 0$，所以 $1=1^2>0$。 ■

■ **例 1.7　逐步解一个有理不等式**　在 $\mathbb{Q}$ 中求所有满足 $-2(3x-1)>4$ 的 x。

解　先除以负数 -2，不等号反向；再移项，最后除以正数 3：

$$-2(3x-1)>4 \iff 3x-1<-2 \iff 3x<-1 \iff x<-\frac{1}{3}.$$

每一步都是等价变换，所以所有解为 $\{x\in\mathbb{Q}:x<-1/3\}$。代入 $x=-1$ 得左边 $8>4$；边界 $x=-1/3$ 时左边恰为 4，不满足严格不等式。边界要排除，不能在最后把 $<$ 写成 $\leq$。 ♦

想一想　能在 $\mathbb{F}_2$ 的两个元素之间选一种次序，使它成为有序域吗？把 $0<1$ 改成 $1<0$ 会不会有帮助？

答　不行。任何有序域都由定理 1.10 推出 $0<1$，所以没有第二种选择。两边加 1 得 $1<1+1=0$，与 $0<1$ 矛盾。有限域的障碍来自序与加法的相容性，并非元素本身不能排列。

■ **例 1.8　复数不能成为有序域**　能否给 $\mathbb{C}$ 定义一种大小关系，同时保留通常的复数加法、乘法，使之成为有序域？

解　若能，非零元 i 的平方就应为正，即 $-1=i^2>0$。但 $1>0$ 两边加 -1 得 $-1<0$，矛盾。因此不存在符合条件的序。可以把复数按实部、虚部先后排列得到一个全序，但这样的全序无法同时满足有序域的两条相容规则。 ♦

1.6　怎样把思路写成证明

「1 当然大于 0」在通常实数中是熟悉的事实，在抽象有序域中却需要刚才那条证明。写证明时先决定可以用什么：题目给的条件、已经证明的结论、定义中的公理。接着把目标改写为这些

规则能够处理的形式。比如原课末尾的 $xz < yz$，改写成 $(y-x)z > 0$，就直接对应「两个正数乘积为正」。

一份可逐行检查的证明可以按以下顺序组织：

(1) 写清对象与条件。是任意域，还是有序域？输入是否可能为零？

(2) 写清目标。是一个等式、一个不等式，还是存在唯一性？

(3) 选择定义。输出分数「相等」要交叉相乘，「小于」可以改写为差为正。

(4) 每一步只做一件事，并在关键处说明依据。

(5) 回看条件是否全用对。乘负数反向，取倒数排除零，唯一性从两个候选出发。

不要把寻找过程原样当作成稿。草稿上可以从目标倒着试；正式证明必须能从假设向前读。若写了「目标等价于……」就要确认两方向都成立。比如乘以非零数保留等价，乘以零通常只保留一个方向。

■ **例 1.9　多项式的最终次序，改编自习题集 1 第 4 题**　令 $M = \mathbb{Z}[x]$ 为整系数多项式的集合。规定 $f \prec g$，当且仅当存在实数 $A > 0$，对每个 $x > A$ 都有 $f(x) < g(x)$。证明这是 M 上的严格全序，并比较 3，$2x+100$，x^2-10x。

思路　比较 f, g 就看差 $g - f$ 的最高次非零系数。原习题允许直接使用「正首项系数的多项式在充分大处为正」。三歧性从差的首项系数得到，传递性则把两个起效的阈值取最大值。

解　若 $f = g$，则差恒为零，$f \prec g$ 与 $g \prec f$ 均不成立。若 $f \neq g$，差 $g - f$ 是非零多项式。若首项系数为正，它在充分大的 x 处为正，故 $f \prec g$；若首项系数为负，$f - g$ 的首项系数为正，故 $g \prec f$。两种严格比较不可能同时成立，否则选大于两个阈值的 x，就同时有 $f(x) < g(x)$ 与 $g(x) < f(x)$。三歧性得证。

若 $f \prec g$、$g \prec h$，各自阈值为 A, B。对每个 $x > \max\{A, B\}$，有 $f(x) < g(x) < h(x)$，所以 $f \prec h$。这证明传递性。这里一个共同阈值要对其后的每一个 x 有效；仅找到几个取值点不够。

具体比较时，$(2x+100)-3 = 2x+97$ 首项系数为正；$(x^2-10x)-(2x+100) = x^2-12x-100$ 首项系数也为正。因此

$$3 \prec 2x+100 \prec x^2-10x.$$

若想给出共同阈值，可取 $A = 20$：$x^2-12x-100 = (x-20)(x+8)+60 > 0$（$x > 20$）。这个有序集还不是域：它的整数常数 2 没有整系数多项式倒数。 ♦

易错提醒　$f \prec g$ 不表示「对所有实数 x，$f(x) < g(x)$」。例如 $0 \prec x^2-10x$，因为 $x > 10$ 时 $x(x-10) > 0$；但 $x = 2$ 时 $x^2-10x = -16 < 0$。最终次序只管某个阈值之后的全部取值，不管此前的交叉。

方法：先展开定义，再找可以使用的公理　证明的第一步常是把目标换一种写法：分数相等换成交叉乘积相等；$x < y$ 换成 $y - x > 0$；唯一性换成「任取两个满足条件的对象，证明它们相等」。改写后，真正需要哪条公理通常就清楚了。

从有理数出发，域公理保留了四则运算的规律，有序域再保留了不等式的规律。但 $\mathbb{Q}$ 已经拥有这些性质，仍然不能保证开头的介值定理。缺少的条件是完备性。第 2 讲将先具体分析 $\sqrt{2}$ 的问题，再引入上界与上确界；本讲不把尚未建立的完备性当成证明工具。

本讲小结

- 介值定理需要连续性、实数区间以及实数的特殊性质。在 $[0,2]\cap\mathbb{Q}$ 上，x^2-2 两端异号却没有有理零点。
- 有理数的相等由 $m_1n_2=m_2n_1$ 定义，分母必须非零；本课统一取正分母。
- 良定义要求运算和关系不依赖代表元；检验时把输入与输出的相等都展开成整数等式。
- 域有 5 条加法公理、5 条乘法公理与分配律，且 $0\neq1$。零元、单位元、相反数、非零元的倒数均唯一；约分需要非零条件。
- 有序域满足全序、加法保序与正元乘积为正。由此 $x<y,\ z>0\Rightarrow xz<yz$，乘负数则反向。
- 非零元平方为正，所以 $1>0$；$\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{F}_2$ 无法在保持现有运算的同时成为有序域。
- 证明先列条件、目标与可用结论；存在与唯一、必要与充分分开写。有限个计算是检查，不能代替全称命题的证明。

练习

1.1 ★ 判断真假，假的给出反例：(a) $\frac12+\frac13=\frac25$；(b) 每个域中的非零元平方都大于 0；(c) $\mathbb{F}_2$ 能任意选一个全序就成为有序域。说明各项缺少什么条件或违反什么定义。

1.2 ★ 若允许分母为零，对整数对定义 $(m,n)\sim(p,q)\iff mq=pn$。用 $(1,1),(0,0),(2,1)$ 证明传递性失败。

1.3 ★ 按正分母约定计算 $-\frac23+\frac54$、$(-\frac23)\frac54$ 和 $-\frac23$ 的倒数，并验证倒数的乘积。

1.4 ★★ 在任意有序域中证明：若 $0<x<y$，则 $0<y^{-1}<x^{-1}$。不能先假设倒数为正，须先证明这一点。

1.5 ★ 在有序域中，设 $x,y\geq0$。证明 $x<y\iff x^2<y^2$。若去掉非负条件，给出反例。

1.6 ★★ 只用公理证明：$x<y$ 当且仅当 $x+z<y+z$；若 $z>0$，则 $x<y$ 当且仅当 $xz<yz$。写出两个反向推理。

1.7 ★★ 证明正有理数没有最小元。说明这与正整数有最小元并不矛盾，以及为什么不能在证明中随便「取一个最小的正数」。

1.8 ★★ 在 $\mathbb{R}^2$ 上规定 $(a,b)\prec(c,d)\iff a<c$ 且 $b<d$。检查它是否为本讲定义的有序集，使用 $(0,1)$ 与 $(1,0)$ 说明问题。

1.9 ★★★ 某人假设 $a=b=1$，由 $a^2=ab$ 得 $(a-b)(a+b)=b(a-b)$，约去 $a-b$ 得 $a+b=b$，进而得 $2=1$。指出唯一失效的一步，并说明此前各等式是否正确。

1.10 ★★★ 在例 1.9 的最终次序下证明：(a) $f \prec g \Rightarrow f+h \prec g+h$；(b) $0 \prec f$, $0 \prec g \Rightarrow 0 \prec fg$；(c) $0 \prec x^2 - 10x$，但这不表示它处处为正。最后解释为何这些性质仍不能使 $\mathbb{Z}[x]$ 成为有序域。

练习答案与提示

1.1 (a) 假，正确和为 $5/6$；$2/5$ 由逐项相加分子分母产生，而该规则没有良定义，见例 1.4。(b) 陈述缺少「有序域」条件。一般域未必定义了 $<$，在复数中 $i^2 = -1$ 也不能沿用实数的正性规则。加上有序域条件才有非零平方为正。(c) 假。有序域定理强制 $0 < 1$，加 1 后却得到 $1 < 0$；另外一种排列也不可能满足全部规则。能排列元素与运算相容是两件要分别检查的事。

1.2 $(1,1) \sim (0,0)$，因为 $1\cdot 0 = 0\cdot 1$；$(0,0) \sim (2,1)$，因为 $0\cdot 1 = 2\cdot 0$；但 $(1,1) \not\sim (2,1)$，因为 $1\cdot 1 \neq 2\cdot 1$。所以传递性失败。原先传递性的证明要约去中间分母，此处它是 0，不能约去。

1.3 通分得到 $(-8+15)/12 = 7/12$；乘积为 $-10/12 = -5/6$；倒数为 $-3/2$，因为 $(-2/3)(-3/2) = 1$。将倒数写成 $3/(-2)$ 虽代表相同商，却不符合本课统一使用正分母的写法。

1.4 先证 $x^{-1} > 0$。它不为零，否则 $xx^{-1} = 0 \neq 1$。若 $x^{-1} < 0$，由 $x > 0$ 乘负数时反向得 $xx^{-1} < 0$，即 $1 < 0$，与 $1 > 0$ 矛盾。因此 $x^{-1} > 0$；对 y 用相同论证，$y^{-1} > 0$。把 $x < y$ 乘正数 $x^{-1}y^{-1}$，得到 $y^{-1} < x^{-1}$，结合正性即得结论。

1.5 若 $0 \le x < y$，则 $y - x > 0$、$y + x > 0$（因为 $y > 0$），故 $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) > 0$。反向若 $x^2 < y^2$，三歧性给出 $x < y$、$x = y$、$y < x$ 三种情形。相等使平方相等；$y < x$ 由已证方向推出 $y^2 < x^2$，也矛盾，所以只剩 $x < y$。去掉非负条件，$-2 < -1$ 却有 $4 > 1$；而 $(-1)^2 < (-2)^2$ 也不能推出 $-1 < -2$。

1.6 正向都是定义或定理 1.10。加法反向：从 $x + z < y + z$ 两边加 $-z$，用结合律得到 $x < y$。乘法反向有两种写法：由上题的倒数正性，$z^{-1} > 0$，可两边乘 z^{-1}；也可直接反证，若 $x = y$ 则 $xz = yz$，若 $y < x$ 则正向给 $yz < xz$，均矛盾，故 $x < y$。第二种写法不依赖倒数正性的额外结论。

1.7 任取 $r \in \mathbb{Q}$ 且 $r > 0$，则 $r/2 \in \mathbb{Q}$，并且 $0 < r/2 < r$，所以 r 不是最小元。对每个候选都能构造更小的，故不存在最小元。正整数中最小元是 1，而 $1/2$ 不在正整数集合里，因此这个构造不能用来否定整数的结论。要取最小元，必须先有关于该集合的存在性保证。

1.8 两点不同；$(0,1) \not\prec (1,0)$，因为第二坐标的 $1 < 0$ 不成立；$(1,0) \not\prec (0,1)$，因为第一坐标的 $1 < 0$ 不成立。三歧性失败，所以不是本讲的有序集。该关系虽然满足传递性，但缺少任意两点可比较的性质。

1.9 失效的是约去 $a - b$：由 $a = b = 1$，$a - b = 0$，乘法消去律的非零条件不成立。此前等式都正确：$a^2 = ab = 1$，减 b^2 后两边为 0，因式分解后也都是 0。错误的结论来自把无定义的除法当成等价变形；不能以「最后荒谬」为由怀疑正确的因式分解。

1.10 (a) 取 $f \prec g$ 的阈值 A。对每个 $x > A$，实数不等式两边加同一个 $h(x)$ 得 $f(x)+h(x) < g(x)+h(x)$，故相同阈值有效。(b) 取 f, g 最终为正的阈值 A, B，则每个 $x > \max\{A, B\}$ 都有 $f(x) > 0, g(x) > 0$，故 $f(x)g(x) > 0$，乘积最终为正。(c) $x > 10$ 时 $x(x-10) > 0$，但在 $x = 0$ 时为 0，在 $x = 2$ 时为 -16。最后，$\mathbb{Z}[x]$ 的非零常数多项式 2 没有倒数：若 $2h(x) = 1$，比较常数项就要求某整数的两倍为 1，矛盾。序的相容性不能补足缺少的域公理。

第 2 讲

无理数、上确界与实数的完备性

Irrational Numbers, Suprema, and Completeness

对应材料：MIT 18.100B（2025 春）Lecture 2 讲义与课堂转写；习题集 1 第 3、6 题。

本讲目标

(1) 会用最简分数与奇偶性证明不存在平方等于 2 的有理数，区分「没有有理解」与「实数解存在」。

(2) 掌握上界、最大元和上确界的定义，能逐条检查定义中的全称量词。

(3) 会用「是上界」与「任何更小的数都不是上界」证明一个具体的数是上确界。

(4) 理解完备性公理中的非空、有上界与所属数系三个条件，知道 $\mathbb{Q}$ 为什么不完备。

(5) 能完整复述用确界原理证明正平方根存在的两步反证，检查每次扰动的大小与符号。

(6) 知道阿基米德性质及有理数稠密性的陈述，理解第 4 讲中整数部分与稠密证明的关系。

第 1 讲把有理数看成一个有序域：加、减、乘和非零数的除法都能在其中进行，大小关系也与运算相容。现在问一个只涉及平方的具体问题：有没有一个正数乘自己等于 2？在 $\mathbb{Q}$ 中，答案是否定的；在 $\mathbb{R}$ 中，答案是肯定的。两种答案之间的差别将由最小上界性质精确表达。

本讲先把「上界」「最小」分别讲清，再把它们合成实数的完备性公理。平方根的存在性证明只用有序域运算和这个公理，不预先使用连续函数、极限或有理数稠密性。第 3 讲还会把确界证明写成通用的步骤，第 4 讲集中处理阿基米德性质、整数部分与稠密性。

2.1 平方等于二的数为什么不在有理数中

2.1.1 先证明「不能写成分数」

$$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2, \qquad (7/5)^2 = 49/25 < 2 < (3/2)^2 = 9/4.$$

这些计算把一个可能的正根夹在越来越短的区间中，却没有回答根是否存在。更没有理由说某个分数只要取得足够精细，就能恰好平方成 2。分数能逼近多少与方程能否取等，是两个问题。

定理 2.1（有理数中没有平方等于二的数） 不存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使 $r^2 = 2$。

思路 把假设中的有理数写成最简分数。由平方关系推出分子、分母都是偶数，与最简性矛盾。

证明　假设 $r = m/n$，其中 $m \in \mathbb{Z}$，$n \in \mathbb{N}$，$\gcd(m,n) = 1$，并且 $r^2 = 2$。分母 $n > 0$，等式两边乘 n^2 得

$$m^2 = 2n^2.$$

于是 m^2 是偶数。若 m 是奇数，写 $m = 2k+1$，则

$$m^2 = 4k(k+1) + 1$$

是奇数，与前面冲突。所以 m 是偶数，写成 $m = 2k$。代回得 $4k^2 = 2n^2$，约去非零数 2 得

$$n^2 = 2k^2.$$

这说明 n^2 是偶数；沿用刚才对奇数平方的计算，n 也是偶数。于是 m, n 的公因子至少有 2，与 $\gcd(m,n) = 1$ 矛盾。假设不成立。 ■

上面的结论包括正、负两种可能，因为两者平方相同。它并没有证明某个实数满足方程；它只排除了所有有理数候选。等到本讲后面确立唯一正根以后，再把那个正根记作 $\sqrt{2}$。

定义 2.2（无理数）　属于 $\mathbb{R}$ 而不属于 $\mathbb{Q}$ 的数称为**无理数**（irrational number）。无理数集记为 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。

整数 $0, -3$ 和分数 $7/5$ 都是有理数。定义要求先有一个实数；只写一个暂未证明有解的方程，还没有指定无理数。特别地，「无理」不表示「没有定义」或「不可计算」，它准确表示不能写成两个整数之比。

■ **例 2.1　换成三以后哪一步要改**　证明不存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使 $r^2 = 3$。能把上个证明中的「偶数」直接换成「3 的倍数」吗?

解　需要先补上整数平方的判断。任何整数除以 3 的余数是 $0, 1, 2$，它们的平方余数分别是 $0, 1, 1$。所以 $3 \mid m^2$ 蕴含 $3 \mid m$。

若最简分数 m/n 的平方为 3，则 $m^2 = 3n^2$，故 $m = 3k$。代入并约去 3 得 $n^2 = 3k^2$，从而 $3 \mid n$，与分子分母互素矛盾。这说明反证法的结构可以复用，但每次用到的整数性质仍须给出理由。 ♦

易错提醒　「一个数的小数位很多，所以它是无理数」没有根据。$1/7 = 0.142857142857\ldots$ 有无限多位小数，却是有理数；有限小数 1.414 也只是有理数 $707/500$。判断无理性需要排除所有整数分子、非零整数分母，不能只排除手边几个分数。

2.1.2　小数近似究竟说明了什么

原课用 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$ 引出数列极限。表 2.1 把前几次平方写成精确的有限小数。这里所有计算都在 $\mathbb{Q}$ 中完成，不必先用实数极限。

小数位数 k	左端 a_k	a_k^2	右端 a_k+10^{-k}
0	1	1	2
1	1.4	1.96	1.5
2	1.41	1.9881	1.42
3	1.414	1.999396	1.415
4	1.4142	1.99996164	1.4143
5	1.41421	1.9999899241	1.41422

表 2.1　每个左端点的平方小于 2，相应右端点的平方大于 2；区间长度是 10^{-k}。

若正根已经存在，正数平方保序就给出 $a_k<\sqrt{2}<a_k+10^{-k}$。但从「列出前六行」到「存在一个共同的实数对象」仍有逻辑距离。第 5 讲将定义数列极限，第 6 讲用完备性证明适当的单调数列有极限。现在先用集合的上确界解决存在问题。

■ **例 2.2　近似值不能代替等式**　检验 1.414 是否满足 $x^2=2$。若方程有正根，它与 1.414、1.415 的大小关系怎样？

解　先做精确平方：

$$1.414^2=1.999396<2<2.002225=1.415^2.$$

所以 1.414 本身不是根；差值 $2-1.999396=0.000604$ 虽小，却不为零。正数的平方严格随底数增加，因此任何正根都在 $(1.414,1.415)$ 中。这给出一段**误差有保证的区间**，与宣称等号成立有明确区别。 ♦

想一想　若已知某个实数 α 无理，$\alpha+3$ 是否无理？3α 是否无理？两个无理数之和总无理吗？
答　若 $\alpha+3$ 有理，减去有理数 3 就会得到有理的 α，矛盾。若 3α 有理，除以非零有理数 3 也矛盾。但 α 与 $-\alpha$ 都无理，和却是 0。若把系数 3 换成 0，乘积也变成有理数 0，所以非零条件不能省。

2.2　上界与最大元：量词落在哪里

$\{1,2,3\}$ 的元素都不超过 4，所以 4 是一个上界；2 却挡不住元素 3。这句简单的话里有一个需要保留的「每个」。给一部分元素找出上界，还没有给整个集合找出上界。

定义 2.3（上界与有上界）　设 S 是有序集，$A\subseteq S$。若 $M\in S$ 满足对每个 $a\in A$ 都有 $a\le M$，称 M 是 A 在 S 中的**上界**（upper bound）。若存在这样的 M，称 A 在 S 中**有上界**（bounded above）。

这里的「有序集」沿用第 1 讲的全序约定。背景集合 S 指明上界允许从哪里取。例如取 $A=\{1,2,3\}$，背景为 $\mathbb{Z}$，则 $3,4,5$ 都是整数上界；$5/2$ 不是上界，因为 $3>5/2$。

把背景改成 $\mathbb{R}$，$7/2$ 也成为允许的上界。上界通常不唯一，也不要求属于 A。用量词写出定义是

$$\exists M \in S\ \forall a \in A,\quad a \le M.$$

上界 M 必须先选定，再应付所有元素。若写成「对每个 $a \in A$ 都存在 $M \in S$ 使 $a \le M$」，则取 $M = a$ 就够了，任何集合都满足；它完全不能表达有上界。证明 A 无上界时，应当写出定义的否定：

$$\boxed{\forall M \in S\ \exists a \in A,\qquad a > M.}$$

这意味着反例元素允许依赖候选上界 M，并不要求一个元素同时大于所有候选者。

例 2.3　全部上界是什么　在 $\mathbb{R}$ 中求 $A = \{-3, 1/2, 2\}$ 的全部上界。只列出 $2, 3, 4$ 够不够?

解　先利用集合中最大的元素 2。若 M 是上界，则因为 $2 \in A$，必须有 $M \ge 2$。反过来，若 $M \ge 2$，就有 $-3 \le 2 \le M$、$1/2 \le 2 \le M$，并且 $2 \le M$，所以 M 的确是上界。

两方向合起来，全部上界是 $[2, \infty)$。$2, 3, 4$ 只是其中三个，$5/2$、100 也都是。求「全部」时，把充分性和必要性分别写出，比列一个没有结束标志的清单更准确。 ♦

定义 2.4（最大元）　若 $m \in A$ 且对每个 $a \in A$ 都有 $a \le m$，称 m 是 A 的**最大元**（maximum），记为 $\max A$。

刚才的 A 有最大元 2。单点集 $\{0\}$ 的最大元是 0，不需要严格大于其他元素。空集没有最大元，因为其中根本选不出 m。区间 $(0, 1)$ 有很多上界，却没有最大元：对任意 $a \in (0, 1)$，

$$a < \frac{a+1}{2} < 1,$$

所以集合中还能找到更大的元素。

易错提醒　「有上界就有最大元」是错的。$(0, 1)$ 有上界 1，但 $1 \notin (0, 1)$，任何区间内的候选又都会被 $(a+1)/2$ 超过。正确的关系是：最大元一定是上界，而且属于集合；一般上界只要求挡住全部元素。

图 2.1 把三种端点情况并排画出。蓝色线段表示集合，橙色射线表示其全部实数上界；端点的实心、空心只说明端点是否属于蓝色集合。

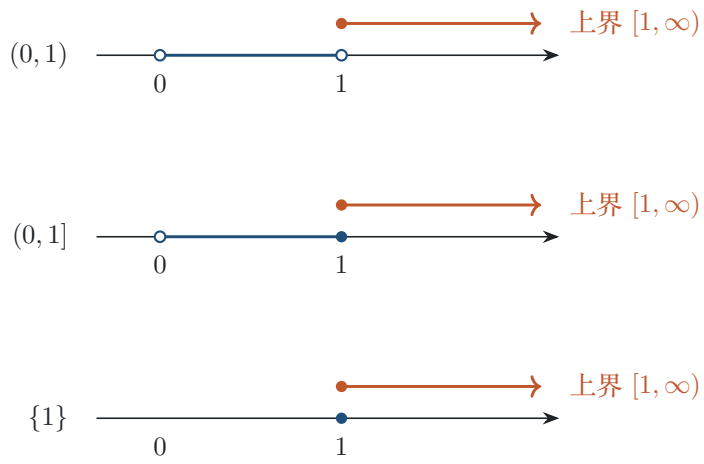


图 2.1　三个集合的上确界都是 1；后两个集合有最大元 1，第一个集合没有最大元。

图中的区别也可以直接用集合语言说：1 属于蓝色集合时，它兼任最大元；1 不属于蓝色集合时，它仍可能是最小的橙色上界。最小上界并不要求从蓝色集合内部选取。

2.2.1　空集与无上界集合

若 $A = \varnothing$，则「对所有 $a \in A$ 有 $a \le M$」没有反例，所以每个实数 M 都是空集的上界。这叫全称命题在空集上空真（vacuously true）。但空集在 $\mathbb{R}$ 中没有最小上界：任意上界 M 都能换成更小的上界 $M - 1$。因此实数的最小上界性质必须明确要求集合非空。

另一种情况是根本没有上界。整个 $\mathbb{R}$ 就是例子：给定任意实数 M，实数 $M + 1$ 属于 $\mathbb{R}$ 且大于 M。原课还提出 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$ 中无上界；这个结论要证明自然数能超过任意实数，本讲未用完备性证明，不能只以「数轴画得很长」作为理由。

想一想　如果 $A \subseteq B$，B 的每个上界是否也是 A 的上界？反过来呢？用 $A = \{1\}$、$B = \{1, 2\}$ 检查。

答　正方向成立：任意 $a \in A$ 也属于 B，所以被 B 的上界挡住。反方向不成立：1 是 A 的上界，却不是 B 的上界。这告诉我们，集合扩大时，上界的条件变强；集合缩小时，上界的条件变弱。

2.3　最小上界的两条要求

$(0, 1)$ 没有最大元，但它的上界集恰好是 $[1, \infty)$。这个上界集有最小元 1。把「到上界集里找最小元」压缩成一个定义，就得到上确界。

定义 2.5（上确界）　设 $A \subseteq S$，S 为有序集。若 $s \in S$ 满足

(1) 对所有 $a \in A$，$a \le s$；

(2) 对 A 的每个上界 $M \in S$，$s \le M$，

则称 s 为 A 在 S 中的上确界（supremum），也称最小上界（least upper bound），记为 $s = \sup A$。

第一条要求 s 自己确实是上界。第二条要求它不大于任何其他上界。只检查第二条不够：-100 不超过 $(0,1)$ 的所有上界，却不是其上确界，因为它连上界都不是。只检查第一条也不够：2 是上界，但 1 是更小的上界。

命题 2.6（上确界的唯一性与最大元）　一个有序集中的集合至多有一个上确界。若 A 有最大元 m，则 $m=\sup A$；反过来，若 $\sup A=s$ 且 $s\in A$，则 $s=\max A$。

证明　若 s,t 都是上确界，则 t 是上界，由 s 的最小性得 $s\le t$；由 t 的最小性又得 $t\le s$。全序的反对称性给出 $s=t$。

若 $m=\max A$，它按定义是上界。任意上界 M 必须挡住元素 $m\in A$，所以 $m\le M$；两条要求均满足。最后，若 $s=\sup A\in A$，它既属于集合又挡住全部元素，恰是最大元的定义。 ■

唯一性回答了「若有，会不会有两个」；它没有回答「是否存在」。对 $\varnothing\subseteq\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}$，都不存在实数上确界，原因却不同：前者有上界而没有最小者，后者连上界都没有。下一节的完备性只对满足指定条件的集合承诺存在性。

■ **例 2.4　开区间的上确界**　在 $\mathbb{R}$ 中证明 $\sup(0,1)=1$，并指出 $\sup(0,1]$ 与 $\max(0,1]$。

解　先验证上界，再排除所有更小候选。每个 $a\in(0,1)$ 都小于 1，所以 1 是上界。设 $M<1$。若 $M\le 0$，则 $1/2\in(0,1)$ 且 $1/2>M$。若 $0<M<1$，取 $a=(M+1)/2$，则

$$M<a<1,\qquad a>0,$$

因此 M 不是上界。所以任何上界必须至少等于 1，$\sup(0,1)=1$。

区间 $(0,1]$ 含有元素 1，而它的所有元素不超过 1，所以 $\max(0,1]=1$。命题 2.6 随即给出 $\sup(0,1]=1$。两种区间的上确界相同，最大元是否存在却不同。 ♦

这里分 $M\le 0$ 与 $M>0$，是为了确保构造的反例元素属于原集合。直接对所有 $M<1$ 都取 $(M+1)/2$ 会出问题：当 $M=-3$ 时得到 $-1\notin(0,1)$。候选公式满足「比 M 大」还不够，还要满足「在集合内」。

2.3.1　把最小性改写成从左侧逼近

若 s 是最小上界，任何向左移动后的 $s-\varepsilon$ 都不再是上界。这就给出一个经常用于证明的判别形式。

命题 2.7（上确界的逼近判别）　设非空集合 $A\subseteq\mathbb{R}$，$s\in\mathbb{R}$。则 $s=\sup A$ 当且仅当

(1) 对所有 $a\in A$，$a\le s$；

(2) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $a\in A$ 使 $s-\varepsilon<a$。

证明　若 $s=\sup A$，第一条由定义成立。给定 $\varepsilon>0$，因 $s-\varepsilon<s$，它不能是上界；否则违反 s 的最小性。所以上界条件失败，即存在 $a\in A$ 满足 $a>s-\varepsilon$。

反过来，设两条都满足，则 s 是上界。若还有上界 $M < s$，令 $\varepsilon = s - M > 0$，第二条给出 $a \in A$ 满足 $a > s - \varepsilon = M$，这与 M 是上界矛盾。所以没有比 s 小的上界，$s = \sup A$。 ■

结合第一条，第二条也可写成 $s - \varepsilon < a \le s$。这里允许 $a = s$，因为集合可能有最大元。把右侧误写成严格不等号 $a < s$ 会排除单点集 $A = \{s\}$。又因为元素 a 允许随 ε 改变，判别不要求找到一个元素同时进入所有这些短区间。

■ **例 2.5　按误差大小选择元素**　用逼近判别再证 $\sup(0,1) = 1$。对每个 $\varepsilon > 0$，给出一个统一有效的 $a \in (0,1)$，不要只处理 $\varepsilon < 1$。

解　上界仍取 1。对给定 $\varepsilon > 0$，令

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, 1\}, \qquad a = 1 - \delta.$$

因 $0 < \delta \le 1/2$，有 $1/2 \le a < 1$，故 $a \in (0,1)$；又 $\delta < \varepsilon$，所以 $a > 1 - \varepsilon$。两条都满足，结论成立。例如 $\varepsilon = 1/10$ 时 $a = 19/20$；$\varepsilon = 3$ 时这个公式取 $a = 1/2$，仍在集合中。

若直接取 $a = 1 - \varepsilon/2$，在 $\varepsilon = 3$ 时得到 $-1/2$，失去集合内条件。取两个正数的较小者，是同时满足几个「小于」要求的常用办法。 ♦

证明上确界的两份证据　猜到 s 后，分别交出「所有元素 $\le s$」与「每个 $t < s$ 都被某个集合元素超过」的证据。后一份也可改写为：对给定 $\varepsilon > 0$ 找到 $a \in A$，使 $s - \varepsilon < a$。不能只凭图形判断端点。

2.4　完备性给出什么存在性保证

集合 $\{1,2,3\}$、$(0,1)$ 以及 $(0,1]$ 都有最小实数上界，这会不会是每个有上界的实数集合都具有的性质？若把空集排除，答案正是实数的完备性。

定义 2.8（最小上界性质）　若有序集 S 的每个非空且在 S 中有上界的子集 A，都在 S 中有上确界，就说 S 具有最小上界性质。具有此性质的有序域称为完备有序域（complete ordered field）。

定义必须同时说明集合非空、在当前背景中有上界、上确界仍在当前背景中。它不承诺所有集合有最大元，也不承诺无上界集合有一个实数「上确界」。本课程不把 $+\infty$ 当作实数；若以后使用扩充实数记号，会另外说明。

定理 2.9（实数系的存在性）　存在一个包含有理数系的完备有序域，称为实数系，记为 $\mathbb{R}$。本课程把 $\mathbb{Q}$ 与它在 $\mathbb{R}$ 中的自然副本认同。

证明　这个存在性结论作为本课程的出发点，不作构造证明。从有理数的分割或适当的有理数列构造实数超出本讲范围；此后使用有序域公理与最小上界性质。 ■

直观理解　一个非空集合的上界把它压在某个实数以下。完备性进一步保证所有上界中有最小者：即使集合从未取到最右端，仍能在实数里找到那个端点。这个说法的实际内容在于端点属于当前数系；在有理数里，集合有有理上界，端点却可能无法由有理数表示。

为什么需要域的运算？单纯的最小上界性质不是实数的全部。例如整数集 $\mathbb{Z}$ 作为有序集也有这个性质：一个非空且有整数上界的整数集合一定有最大元，但整数不能总作非零数除法，所以它不是域。本讲不从单个顺序性质辨认整个数系，而是把域、序和完备性三类条件一起使用。

■ **例 2.6**　**三条条件逐个检查**　判断确界原理能否直接应用于下列实数集合：

$$A=\varnothing,\qquad B=\mathbb{R},\qquad C=\{x\in\mathbb{R}:0<x,\ x^2<2\}.$$

解　对 A，非空条件失败；虽然每个实数都是上界，原理仍不适用。对 B，有上界条件失败，因为任意 M 都被 $M+1\in B$ 超过。

对 C，$1\in C$，所以非空；且 2 是上界。后一点要验证：若 $x\in C$ 却有 $x\geq 2$，因 $x,2$ 均为正数，平方保序给出 $x^2\geq 4>2$，矛盾。因此 C 非空且有上界，存在实数 $s=\sup C$。目前只知 $1\leq s\leq 2$；要再证明 $s^2=2$，不能把它当作确界原理自动附带的结论。 ♦

2.4.1　为什么只写上界就够作为公理

原课课堂上有同学问：为什么先定义上界，不同时把下界也当成公理？顺序与加法相容，取负数会把大小关系反转，因此下方的问题可以转换为上方的问题。

若非空 $E\subseteq\mathbb{R}$ 有下界 b，即每个 $x\in E$ 满足 $b\leq x$，令

$$-E=\{-x:x\in E\}.$$

它非空，并且 $-b$ 是它的上界；因而 $\sup(-E)$ 存在。把这个数取负就得到 E 的最大下界：

$$\inf E=-\sup(-E).$$

例如 $E=(2,5)$ 时，$-E=(-5,-2)$，后者的上确界是 -2，所以 E 的下确界是 2。第 3 讲会逐条验证这个式子的两份证据，并系统讨论下确界的运算。

这里使用的是取相反数后的集合，不能把 $-E$ 与补集 $\mathbb{R}\setminus E$ 混淆。对 $E=(2,5)$，补集是 $(-\infty,2]\cup[5,\infty)$，它没有实数上界，根本无法直接套用这个做法。原课口头说明里「用另一边的集合」要落实成明确的 $-E$，才不会引入错误。

易错提醒　「集合有上界，所以可令 $s=\sup A$」少了背景与非空条件。空集在 $\mathbb{R}$ 中有上界却没有实数上确界；稍后还会给出在 $\mathbb{Q}$ 中非空、有有理上界却没有有理上确界的集合。正确写法要先交代 $A\subseteq\mathbb{R}$、$A\neq\varnothing$ 以及一个具体上界。

2.5　用上确界证明正平方根存在

现在回到 $x^2=2$。不能把「$\sqrt{2}$ 就是小数 $1.414\ldots$」当作存在性证明，因为无限小数的意义还没有建立。例 2.6 已经提供可以使用确界原理的集合：

$$C=\{t\in\mathbb{R}:0<t,\ t^2<2\}.$$

它由已知的实数、大小与运算定义，不含尚未建立的平方根符号；$1\in C$、2 为上界也已分别核对。

> **定理 2.10（二的正平方根）**　存在唯一的实数 $s>0$ 使 $s^2=2$。这个数记为 $\sqrt{2}$，并且
>
> $$\sqrt{2}=\sup\{t\in\mathbb{R}:0<t,\ t^2<2\}.$$

思路　设 $s=\sup C$，先知 $1\le s\le 2$。若 $s^2>2$，就把 s 向左移一个足够小的正数，得到更小的上界，违反最小性。若 $s^2<2$，则向右移一个足够小的正数，仍属于 C，违反上界性。两种严格不等都排除以后才得到等号。最后单独证明正根唯一。

证明　**存在性**。由非空性、有上界性与完备性，$s=\sup C\in\mathbb{R}$ 存在。因 $1\in C$ 且 2 是上界，$1\le s\le 2$，特别地 $s>0$。

第一步：排除 $s^2>2$。假设 $d=s^2-2>0$。选定

$$h=\min\left\{\frac{s}{2},\frac{d}{4s}\right\}.$$

两个候选都为正，故 $h>0$；又 $h\le s/2$，所以 $s-h\ge s/2>0$。利用 $h\le d/(4s)$，

$$(s-h)^2=s^2-2sh+h^2\ge s^2-2sh\ge s^2-\frac{d}{2}=2+\frac{d}{2}>2.$$

现在验证 $s-h$ 是上界，不能只停在它的平方大于 2。任取 $t\in C$，$t>0$ 且 $t^2<2$。若 $t\ge s-h>0$，平方保序会推出 $t^2\ge(s-h)^2>2$，矛盾。所以每个 $t\in C$ 都小于 $s-h$，它确实是 C 的上界。可是 $h>0$ 给出 $s-h<s$，与 s 为最小上界矛盾。因此 $s^2\le 2$。

第二步：排除 $s^2<2$。假设 $e=2-s^2>0$。这次选择

$$h=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{e}{2(2s+1)}\right\}.$$

有 $0<h\le 1/2<1$，因而 $h^2<h$；同时 $h(2s+1)\le e/2$。于是

$$(s+h)^2=s^2+2sh+h^2<s^2+h(2s+1)\le s^2+\frac{e}{2}=2-\frac{e}{2}<2.$$

还要核对正性：$s+h>s\ge 1>0$。所以 $s+h\in C$。但 $s+h>s$，与 s 是上界矛盾。因此 $s^2\ge 2$。

两步合起来 $s^2=2$。至此才把 s 记为 $\sqrt{2}$。

唯一性。若 $u,v>0$ 且 $u^2=v^2=2$，则

$$(u-v)(u+v)=u^2-v^2=0.$$

域中非零因子可以约去；$u+v>0$，所以 $u-v=0$，即 $u=v$。也可以用正数平方严格保序排除 $u<v$ 与 $v<u$。两个方向均说明正根唯一。 ■

注意两次矛盾分别用到了上确界定义的不同半边：第一步造出更小的上界，破坏最小性；第二步造出超过它的集合元素，破坏上界性。若没有分清这两种目标，容易把一个正确的平方估计误当成完整论证。

注 2.1　[与原课讲义的两处差别] 原讲义先写 $A=(0,2)\cap\mathbb{Q}$，随后才用文字补上「平方小于 2」；集合公式必须把平方条件写进去，否则该集合的实数上确界是 2。此外，如果坚持只取有理数，$s+h$ 的平方小于 2 还不能保证 $s+h\in A$，因为它未必有理。课堂转写使用实数集合，故本讲采用 $C\subseteq\mathbb{R}$ 的版本。它让两次扰动都留在背景数系内，也避免在证明稠密性之前调用稠密性。

■ 例 2.7　**把「足够小」落实为数**　模仿上面的两步，对候选值 $s=3/2$ 与 $s=7/5$ 分别算出一个允许的 h，检查平方估计。

解　若 $s=3/2$，则 $s^2-2=1/4$，第一步给出

$$h=\min\{3/4,1/24\}=1/24,\qquad s-h=35/24.$$

它的平方是 $1225/576>1152/576=2$，所以任何正数平方小于 2 时，都小于 $35/24$。这说明 $3/2$ 虽是上界，还能向下改善。

若 $s=7/5$，则 $2-s^2=1/25$，第二步给出

$$h=\min\{1/2,1/190\}=1/190,\qquad s+h=267/190.$$

此数的平方为 $71289/36100<72200/36100=2$，而它严格大于 $7/5$。所以 $7/5$ 还不是上界。两个例子展示了证明中「过大就能向左改、过小就能向右改」的具体计算。 ♦

图 2.2 用两条横向数轴记录两种矛盾。图中 s 是假设中的确界，位置关系用于表达证明的逻辑，不把错误假设当成实际存在的第二个根。

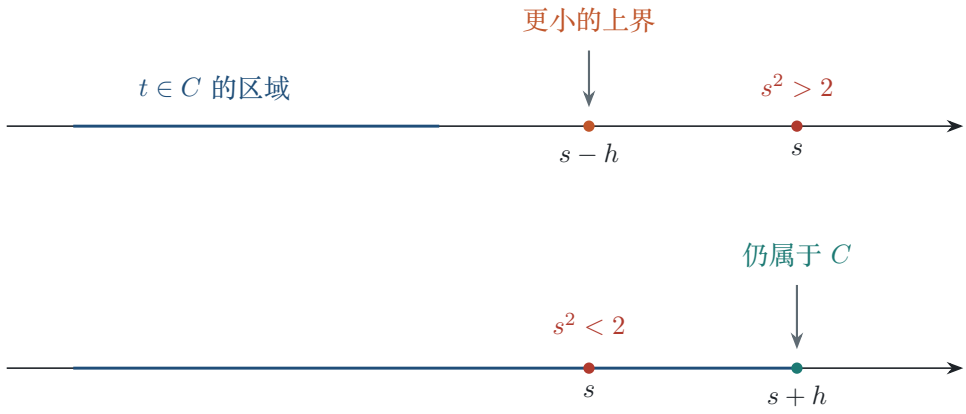


图 2.2　平方偏大时构造更小的上界，平方偏小时构造更大的集合元素；两种构造分别违反上确界定义的一条要求。

图中箭头的依据是代数估计与 $s-h>0$ 的检查。单凭平方偏大，不能推出它是上界：$(-2)^2>2$，但 -2 不是 C 的上界。

推论 2.11（实数中确实有无理数）　$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，所以 $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$。

证明　定理 2.10 给出平方等于 2 的正实数，定理 2.1 排除了所有有理数。因此它不属于 $\mathbb{Q}$。 ■

这个推论的两项依据分别承担存在与排除的责任，顺序不可混淆。先排除有理数并不会自动生成一个实数解；先得到实数解也不会自动说明它无理。两部分合并后，关于两个数系的区别才得到了完整结论。

2.5.1 有理数为什么不完备

■ **例 2.8　有有理上界，却没有最小有理上界**　对 $B = \{r \in \mathbb{Q} : 0 < r,\ r^2 < 2\}$，证明 B 在 $\mathbb{Q}$ 中非空且有上界，但在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界。

解　非空和有上界仍用 $1 \in B$ 与上界 $2 \in \mathbb{Q}$。关键是在有理数内部改善任何可能的最小上界。对正有理数 r 定义

$$T(r) = \frac{2r+2}{r+2} = r + \frac{2-r^2}{r+2}.$$

分母 $r+2 > 0$，所以 $T(r)$ 是正有理数。直接展开还得到

$$T(r)^2 - 2 = \frac{(2r+2)^2 - 2(r+2)^2}{(r+2)^2} = \frac{2(r^2-2)}{(r+2)^2}.$$

假设 $s \in \mathbb{Q}$ 是 B 的上确界。因 $1 \in B$，$s \geq 1 > 0$；由定理 2.1，$s^2 \neq 2$。于是只有两种情况。

若 $s^2 < 2$，则 $T(s) - s = (2 - s^2)/(s+2) > 0$；上式又给出 $T(s)^2 < 2$。所以 $T(s) \in B$ 且 $T(s) > s$，与上界性矛盾。

若 $s^2 > 2$，则 $0 < T(s) < s$ 且 $T(s)^2 > 2$。任取 $b \in B$，如果 $b \geq T(s) > 0$，就会有 $b^2 \geq T(s)^2 > 2$，与 $b \in B$ 矛盾。因此 $T(s)$ 是比 s 更小的有理上界，违反最小性。

两种情况均不可能，所以 B 没有有理上确界。例如 $7/5$ 可以向右改善为 $24/17$，其平方 $576/289 < 2$；有理上界 $3/2$ 可以向左改善为 $10/7$，其平方 $100/49 > 2$。整个论证都在有理数内部完成，没有使用有理数稠密性。 ♦

这个例子给出一个关于数系本身的结论：$\mathbb{Q}$ 不具有最小上界性质，所以它不是完备有序域。对同一个集合 B，允许上界取遍所有实数时，它会有实数上确界 $\sqrt{2}$。这个后一句还要用「根以下能找到有理数」的稠密性说明，完整验证留到第 4 讲；$\mathbb{Q}$ 不完备的证明已经独立完成。

检查构造有没有留在数系内　构造 $s+h$、$s-h$ 或 $T(s)$ 后，除大小与代数条件外，还要检查它属于允许的背景集合。处理实数集时，实数运算保留实数；处理有理数集时，要确保每次运算确实给出有理数。这个检查能及时发现存在性证明中的隐含假设。

2.6　自然数能超过任何实数

给定一个很大的实数，逐次加 1 最终能超过它吗？对手边写得出的整数，这很直观；但实数完备性谈的是所有实数，所以仍需一个统一论证。原 Lecture 2 的最后两项结论是阿基米德性质

与有理数稠密性。本节保留它们的陈述和证明主线，第 4 讲进一步展开整数部分以及各种应用。

定理 2.12（阿基米德性质）　对每个 $x \in \mathbb{R}$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $x < n$。等价地，$\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有上界。

证明　反设 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上界。它非空，因为 $1 \in \mathbb{N}$；由完备性存在 $\alpha = \sup \mathbb{N}$。对任意 $n \in \mathbb{N}$，后继 $n+1$ 仍在 $\mathbb{N}$，所以 $n+1 \le \alpha$，从而 $n \le \alpha - 1$。这对所有 n 成立，故 $\alpha - 1$ 也是上界；但 $\alpha - 1 < \alpha$，违反最小性。于是 $\mathbb{N}$ 无上界。展开「无上界」的量词，就得到给定任意 x，总有自然数 $n > x$。 ■

因此自然数在 $\mathbb{Q}$ 中也无上界：若有有理上界，它同时会是一个实数上界。这里证明用到的关键事实是 $n+1$ 仍为自然数；对一个任意有上界的集合，不能把元素加 1 后仍属于集合当成理所当然。

阿基米德性质也给出任意小的正倒数。给定 $\varepsilon > 0$，先选 $n > 1/\varepsilon$；因 n, ε 均为正，取倒数得到

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

它让我们可以选足够细的有理网格。这个过程的顺序是先给定误差，再选自然数；不能先选定一个自然数，期待它对所有正误差都有效。

定理 2.13（有理数在实数中稠密）　若 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x < y$，则存在有理数 q 满足 $x < q < y$。

证明　完整证明及其整数选择细节见第 4 讲。本处记录路线：先由阿基米德性质取 $n \in \mathbb{N}$ 使 $1/n < y - x$；再找整数 m 满足

$$nx < m \le nx + 1.$$

整数部分性质保证这样的 m 存在，第 4 讲将用自然数良序与阿基米德性质证明它，不把「最大整数存在」留作未经说明的步骤。除以正数 n 后，

$$x < \frac{m}{n} \le x + \frac{1}{n} < y,$$

即得所需的 $q = m/n$。这一段把结论归结为明确的整数选择命题，尚未代替第 4 讲对该命题的证明。 ■

■ **例 2.9　给出两个严格位于中间的分数**　分别在 $(1.41, 1.42)$ 和 $(-8/3, -7/3)$ 中找一个有理数，并逐边验证。

解　这里两端都已经是有理数，可以直接取平均，不需要使用一般稠密性定理。第一个区间取 $q = 1.415 = 283/200$，有

$$1.41 = 282/200 < 283/200 < 284/200 = 1.42.$$

第二个区间取 $q = -5/2 = -15/6$，两端分别是 $-16/6$ 和 $-14/6$，所以 $-8/3 < -5/2 < -7/3$。注意负数比较方向由同一个正分母 6 决定，不能只看分子绝对值。 ♦

两端均有理时可以取中点；端点为任意实数时，中点未必有理，一般稠密性才解决了这个问题。

前后联系　本讲的依赖次序是：有序域运算与完备性给出正平方根存在；整数奇偶性给出该根无理；完备性还给出阿基米德性质，配合整数部分性质才得到有理数稠密性。这个次序避免用稠密性反过来证明先前需要的平方根存在。第 3 讲复习确界的证明格式并推广平方根构造，第 4 讲完成整数部分与稠密性细节。

本讲小结

- **有理数中没有平方等于 2 的数**：最简分数的平方关系会迫使分子分母同时为偶数；这项排除结论与实数解存在须分别证明。
- **上界** M 要满足对所有 $a \in A$ 都有 $a \le M$；**最大元**还要满足 $M \in A$。有上界不保证有最大元。
- **上确界** s 既是上界，又不超过任何上界；它若存在便唯一，并且 $s \in A \iff s = \max A$。
- 上确界的**逼近判别**：先证 $a \le s$ 对所有元素成立，再对每个 $\varepsilon > 0$ 找到 $a \in A$ 使 $s - \varepsilon < a$。
- **完备性**承诺非空、有上界的实数集合有实数上确界。空集、无上界集合以及把背景换成 $\mathbb{Q}$ 都不能不加检查地使用它。
- $\sqrt{2} = \sup\{t > 0 : t^2 < 2\}$。平方偏大时向左造更小上界，平方偏小时向右造更大集合元素；每次都须检查符号、大小和所属数系。
- **阿基米德性质**：$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ 使 $x < n$。它保证 $1/n$ 可任意小；有理数稠密性的整数选择细节在第 4 讲。

练习

2.1 ★　判断真假，假的给出反例：(a) 一个集合有上界，就有最大元；(b) 若 $\max A$ 存在，它必等于 $\sup A$；(c) 若每个 $a \in A$ 都有 $a < s$，则 $s = \sup A$。

2.2 ★　对 $A = \{-2, 0, 3/2\}$、$B = (-1, 4)$、$D = (-1, 0) \cup \{2\}$，分别求全部实数上界与上确界，并说明最大元是否存在。

2.3 ★　已知 $A = (0, 4)$，用逼近判别证明 $\sup A = 4$。对所有 $\varepsilon > 0$ 给出一个统一的集合元素公式。

2.4 ★★　证明不存在平方等于 6 的有理数。可以使用本讲已证明的「$3 \mid m^2$ 蕴含 $3 \mid m$」，但要说明分子分母为何最终有公因子。

2.5 ★　设 $A = \{c\}$，$c \in \mathbb{R}$。证明其上确界是 c，并指出为什么逼近判别中必须允许所选元素等于上确界。

2.6 ★★　对 $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$，求上确界和下确界，并说明为什么两个都不是集合中的元素。此题可看作习题集 1 第 3 题的对称区间版本。

2.7 ★★ 下面的说法错在哪里：「$(-2)^2>2$，所以 -2 是 $C=\{t>0:t^2<2\}$ 的上界」？在平方根证明的第一步中，哪一个额外条件排除了这个错误？

2.8 ★★★ 对 $B_3=\{r\in\mathbb{Q}:0<r,\ r^2<3\}$，证明它没有有理上确界。提示：使用 $T_3(r)=(3r+3)/(r+3)$，分别计算 $T_3(r)-r$ 与 $T_3(r)^2-3$。

2.9 ★★ 对 $E=(2,5)$，写出全部实数下界，并用下界的定义证明其最大下界为 2。再检验 $-E=(-5,-2)$ 的上确界与这个结论的关系。

2.10 ★★★ 证明：若 $z\ge 0$ 且对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $z<1/n$，则 $z=0$。为什么不能把「对每个 n」换成「对某个 n」？

练习答案与提示

2.1 (a) 假：$(0,1)$ 有上界 1，却没有最大元，因每个 a 都被 $(a+1)/2$ 超过。(b) 真，见命题 2.6：最大元本身是上界，并被所有上界挡住。(c) 假：$A=(0,1)$、$s=2$ 满足所给条件，但 $\sup A=1$。条件没有保证最小性。

2.2 A 的全部上界为 $[3/2,\infty)$，因为最大元素是 $3/2$；$\sup A=\max A=3/2$。B 的全部上界为 $[4,\infty)$，上确界为 4，没有最大元。为验证 $M<4$ 不是上界：若 $M\le -1$，可用元素 0；若 $-1<M<4$，用 $(M+4)/2\in B$，它严格大于 M。D 的最大元素是 2，故其全部上界为 $[2,\infty)$，$\sup D=\max D=2$。

2.3 4 是上界。给定 $\varepsilon>0$，取 $a=4-\min\{\varepsilon,1\}/2$，则 $7/2\le a<4$ 且 $a>4-\varepsilon$，满足逼近判别，故 $\sup A=4$。例如 $\varepsilon=1/100$ 时可取 $a=799/200$。

2.4 假设最简分数 m/n 的平方为 6，则 $m^2=6n^2$。所以 $3\mid m^2$，从而 $m=3k$。代入得 $9k^2=6n^2$，约去 3 得 $3k^2=2n^2$。若 n 不被 3 整除，则 $n^2\equiv 1\pmod 3$，右边除以 3 余 2，左边却余 0，矛盾。所以 $3\mid n$；分子分母同被 3 整除，与最简性矛盾。

2.5 $c\in A$，并且 A 中唯一元素不超过 c，所以 $c=\max A=\sup A$。对任何 $\varepsilon>0$，选取的元素只能是 $a=c$，它满足 $c-\varepsilon<a\le c$。若额外要求 $a<c$，即使这个最简单的集合也无法满足，故不能把允许的等号删掉。

2.6 $E=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$：区间内 $|x|<\sqrt{2}$，故 $x^2<2$；反过来，$x\ge\sqrt{2}$ 或 $x\le-\sqrt{2}$ 都会使 $x^2\ge 2$，所以 $x^2<2$ 的数必在区间内。由开区间的端点性质，$\sup E=\sqrt{2}$、$\inf E=-\sqrt{2}$。端点平方为 2，故都不在 E 中。

2.7 平方比较只能在控制符号后推出原数的大小。$1\in C$，但 $1>-2$，直接否定 -2 是上界。在第一步中选取 $h\le s/2$，保证 $s-h\ge s/2>0$，再把正数 t 与正数 $s-h$ 的平方比较，才能推出 $t<s-h$。

2.8 $1\in B_3$，2 是有理上界，因为正数 $r\ge 2$ 会使 $r^2\ge 4>3$。对 $r>0$，直接通分得

$$T_3(r)-r=\frac{3-r^2}{r+3},\qquad T_3(r)^2-3=\frac{6(r^2-3)}{(r+3)^2}.$$

假设 $s\in\mathbb{Q}$ 是上确界，因 $1\in B_3$，$s\ge 1$；例 2.1 排除 $s^2=3$。若 $s^2<3$，则 $T_3(s)>s$ 且 $T_3(s)\in B_3$，违反上界性。若 $s^2>3$，则 $0<T_3(s)<s$ 且 $T_3(s)^2>3$；每个 $r\in B_3$ 均小于 $T_3(s)$，否则正数平方保序导致矛盾。于是 $T_3(s)$ 是更小的有理上界，违反最小性。所以没有有理上确界。

2.9 全部下界为 $(-\infty,2]$。$b\le 2$ 时，每个 $x\in E$ 都有 $b<x$，故 b 是下界。若 $b\ge 5$，取 $x=3$；若 $2<b<5$，取 $x=(2+b)/2$，均有 $x\in E$ 且 $x<b$，所以 $b>2$ 不是下界。因此最大下界为 2。又 $-E=(-5,-2)$ 的上确界为 -2，故 $-\sup(-E)=2$。

2.10 若 $z>0$，阿基米德性质给出 $n>1/z$，从而 $1/n<z$，与假设矛盾。结合 $z\ge 0$ 得 $z=0$。若只对某个 n 成立，取 $z=1/2$、$n=1$ 就有 $0\le z<1/n$ 而 $z\ne 0$。

第 3 讲

确界、平方根存在性与阿基米德性质

Suprema, Square Roots and the Archimedean Property

对应材料：MIT 18.100B（2025 春）Lecture 3；习题集 1 第 6 题（改编为下确界证明）。

本讲目标

(1) 会把上界、下界、上确界、下确界写成完整的量词陈述，区分确界与最大、最小元。

(2) 掌握上确界的两项判别条件，会用任意小的误差检验确界，会由上确界原理推出下确界存在。

(3) 理解完备性怎样保证正平方根存在，能独立写出排除 $\alpha^2 > 2$ 与 $\alpha^2 < 2$ 的两段证明。

(4) 会用最小上界证明阿基米德性质，并将它改写为「正整数的倒数可以任意小」。

(5) 理解数列是以正整数为自变量的函数，会按定义证明 $1/n \to 0$，解释 $(-1)^n$ 为什么没有极限。

3.1 上下界与确界的两项条件

集合 $\{-2, 0, 3\}$ 有最大元 3；区间 $(0, 2)$ 却没有最大元。因为任何 $x \in (0, 2)$ 的右边还有 $(x+2)/2$，而这个中点仍小于 2。两个集合都可以从右边界定其大小：前者不超过 3，后者不超过 2。第 2 讲留下的问题是：当集合里找不到最大的数时，怎样准确表达它的右端位置？

先把「所有元素不超过某个数」写清楚。本讲只在实数中讨论上下界，且 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$。

定义 3.1（上界与下界） 设 $A \subseteq \mathbb{R}$。若 $M \in \mathbb{R}$ 满足对每个 $a \in A$ 都有 $a \le M$，称 M 为 A 的**上界**（upper bound）。若 $m \in \mathbb{R}$ 满足对每个 $a \in A$ 都有 $m \le a$，称 m 为 A 的**下界**（lower bound）。

例如 $3, 4, 100$ 都是 $\{-2, 0, 3\}$ 的上界，2 不是上界，因为元素 3 超过它。$-2, -3$ 都是下界，0 不是下界，因为 $-2 < 0$。单点集 $\{0\}$ 的上界是所有非负实数，下界是所有非正实数；同一个数 0 可以同时是上界和下界。

定义中的 M 不要求属于 A。要检验上界，应先任取一个 $a \in A$，再证明 $a \le M$；要否定上界，只须找到一个 $a \in A$ 使 $a > M$。这两个目标分别是全称陈述和存在陈述，证明写法不能混用。

定义 3.2（上确界与下确界）　设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 非空。若 s 是 A 的上界，且对 A 的每个上界 M 都有 $s \le M$，称 s 为 A 的**上确界**（supremum），记为 $s = \sup A$。若 t 是 A 的下界，且对每个下界 m 都有 $m \le t$，称 t 为**下确界**（infimum），记为 $t = \inf A$。

上确界同时要求「确实是上界」和「比任何上界都小或相等」；下确界同时要求「确实是下界」和「比任何下界都大或相等」。只完成其中一项不能结束证明。若 s, t 同时是上确界，把 t 作为上界代入 s 的最小性得 $s \le t$，交换二者得 $t \le s$，故 $s = t$。下确界的唯一性由相同的两次比较得到。

例 3.1　半开区间的两端　求 $A = (-1, 2]$ 的上下确界，并判断它有没有最大元和最小元。

解　先检查上界，再检查最小性。任意 $a \in A$ 满足 $a \le 2$，所以 2 是上界。又 $2 \in A$，任何上界 M 必须满足 $2 \le M$。于是 $\sup A = 2$，并且 2 是最大元。

每个 $a \in A$ 满足 $-1 < a$，所以 -1 是下界。要证明它是最大的下界，取任意 $m > -1$。若 $m > 2$，元素 2 已满足 $2 < m$；若 $-1 < m \le 2$，取 $a = (-1 + m)/2$，则 $-1 < a < m \le 2$，故 $a \in A$。两种情形都表明 m 不是下界。因此 $\inf A = -1$。由于 $-1 \notin A$，它不是最小元；而每个 $a \in A$ 的左边还有 $(-1 + a)/2 \in A$，所以不存在别的最小元。 ♦

图 3.1 把三种端点情况放在同一条数轴刻度下比较。蓝色表示集合中的区间，实心端点属于集合，空心端点不属于集合。

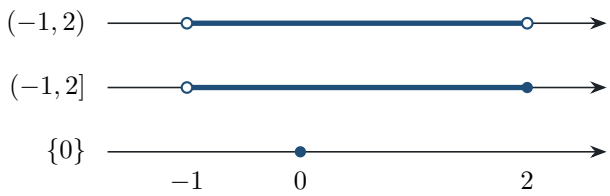


图 3.1　前两个区间的下确界都是 -1、上确界都是 2，端点是否属于集合决定最值是否取得。

图中的空心端点提醒我们：集合可以不断接近自己的确界，却不包含它。确界描述集合与其全部上下界的关系；最值还额外要求这个端点是集合的元素。

命题 3.3（确界与最值）　设非空实数集 A 有上确界 s。则 A 有最大元当且仅当 $s \in A$，此时 $\max A = s$。下确界与最小元有对应结论。

证明　若 $s \in A$，由于 $a \le s$ 对一切 $a \in A$ 成立，s 就是最大元。反之，若 $b = \max A$，则 b 是上界，所以 $s \le b$；而 $b \in A$ 且 s 是上界，又有 $b \le s$，故 $b = s \in A$。把所有不等号方向反过来，即得最小元的结论。 ■

易错提醒　「有上确界就有最大元」是错的。区间 $(0,2)$ 的上确界是 2，但 2 不在其中，任意元素 x 右边还有 $(x+2)/2$。正确的附加条件是 $\sup A \in A$。同样，不能把 $\inf A$ 自动当作集合中最小的元素。

■ **例 3.2　怎样否定一个候选上确界**　有人说 $\sup(0,2)=3/2$，另一个人说它等于 3。分别找出这两个说法违背的条件。

解　对 $3/2$，应先问它是不是上界。取 $a=7/4$，则 $0<7/4<2$，但 $7/4>3/2$，所以它连上界都不是。对 3，所有 $a\in(0,2)$ 确实满足 $a\le 3$；问题在最小性：2 已经是比 3 小的上界。两个说法分别漏掉了定义的第一项和第二项。

真正的候选是 2。对任意 $b<2$，若 $b\le 0$，取 $a=1$；若 $0<b<2$，取 $a=(b+2)/2$。都有 $a\in(0,2)$ 且 $a>b$，从而任何比 2 小的数都不是上界。这才完成最小性的验证。 ♦

想一想　空集是否有上界？它是否有实数上确界？

答　空集没有元素可以违反 $a\le M$，所以每个实数都是它的上界；但实数全体没有最小元，因为 $M-1<M$。故空集没有实数上确界。它也没有实数下确界。「非空」使确界原理避免了这个边界问题。

3.2　确界的逼近刻画与集合变换

已知 $\sup(0,2)=2$，把右端点向左移动 $1/2$、$1/10$、$1/100$，会分别得到 $3/2$、$19/10$、$199/100$。无论移动多小的一段正距离，新的位置都不再能挡住整个区间。这个观察给出了比「与所有上界比较」更便于运用的确界判别。

命题 3.4（上确界的逼近刻画）　设 $A\subseteq\mathbb{R}$ 非空，$s\in\mathbb{R}$。则 $s=\sup A$ 当且仅当下列两项同时成立：

(1) 对每个 $a\in A$，有 $a\le s$；

(2) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $a\in A$，使 $s-\varepsilon<a$。

直观理解　第一项保证集合不越过 s；第二项保证在 s 左边任意近的位置，都还能找到集合中的元素。两项合在一起把 s 的位置确定下来。第二项允许每次选择不同的 a，也允许 $a=s$，因此取得最大值的集合也符合它。

思路　正向把 $s-\varepsilon$ 视为一个更小的候选上界；反向则假设有上界 $M<s$，把差 $s-M$ 选作误差。两次都直接使用「不是上界」与「存在越过它的元素」之间的等价关系。

证明　若 $s=\sup A$，第一项是定义。任取 $\varepsilon>0$，因为 $s-\varepsilon<s$，由最小性知 $s-\varepsilon$ 不是上界。因此存在 $a\in A$ 使 $a>s-\varepsilon$，第二项成立。

反过来，设两项成立。第一项说明 s 是上界。任取另一个上界 M，若 $M<s$，令 $\varepsilon=s-M>0$，

第二项给出 $a \in A$ 满足 $a > s - \varepsilon = M$，与 M 是上界矛盾。所以 $s \le M$ 对任意上界成立，s 是最小上界。 ■

命题 3.4 的两个条件互不替代。取 $A = (0,2)$、$s = 3$，第一项成立，但 $\varepsilon = 1/2$ 时找不到 $a > 5/2$。取 $s = 1$，第二项成立，因为可以始终选 $a = 3/2$，第一项却失败。验证确界时，两行都要写。

■ **例 3.3　不必找到离端点最近的元素**　用逼近刻画重新证明 $\sup(0,2) = 2$，并给出一个适用于每个 $\varepsilon > 0$ 的元素公式。

解　第一项 $a \le 2$ 来自区间定义。第二项要让 a 同时满足 $0 < a < 2$ 和 $2 - \varepsilon < a$。取

$$d = \min\{\varepsilon/2, 1\}, \qquad a = 2 - d.$$

因为 $0 < d \le 1$，有 $1 \le a < 2$，故 $a \in (0,2)$。又 $d \le \varepsilon/2 < \varepsilon$，故 $a = 2 - d > 2 - \varepsilon$。当误差很大时，取最小值让所选元素仍留在区间中；当误差很小时，$d \le \varepsilon/2$ 保证严格逼近。

这里没有「离 2 最近的元素」。一旦给出一个元素，还能取它与 2 的中点，得到更近的元素；确界的存在不要求最近点的存在。 ♦

第 1 讲给出域与序的运算规则，第 2 讲用平方等于 2 的问题说明了有理数的不足。在这些规则之外，实数还满足下面的存在性保证。我们以它为实数的基本性质，不在这里重新构造实数。

公理 3.5（实数的完备性）　实数是包含有理数的**完备有序域**（complete ordered field）：每个非空、有上界的实数集合都有实数上确界。

「有上界」不能省略。例如 $\mathbb{R}$ 自身没有上界：任给 M，实数 $M+1$ 超过它。原理不宣称这样的集合有实数上确界。本讲不使用扩充实数 $+\infty$ 或 $-\infty$；写 $\sup A$ 时，总要先验证相应存在条件。

下确界可以从同一个原理得到，无须再加入一个独立的公理。这正是原课程习题集 1 第 6 题的内容。

定理 3.6（下确界的存在）　若 $A \subseteq \mathbb{R}$ 非空且有下界，令 $-A = \{-a : a \in A\}$，则 $-A$ 非空且有上界，并且

$$\inf A = -\sup(-A).$$

思路　取负号会使大小关系反向。因此 A 的下界变成 $-A$ 的上界。先对 $-A$ 使用完备性，再把得到的最小上界取负号，并分别核对下界性与最大性。

证明　取 $a_0 \in A$，则 $-a_0 \in -A$，所以 $-A$ 非空。设 m 是 A 的下界，对任意 $a \in A$，$m \le a$ 推出 $-a \le -m$，故 $-m$ 是 $-A$ 的上界。由完备性，可令 $s = \sup(-A)$。

先证 $-s$ 是下界。对每个 $a \in A$，$-a \le s$，取负号得 $-s \le a$。再取任一下界 b，则 $b \le a$ 对

一切 $a \in A$ 成立，故 $-b$ 是 $-A$ 的上界。由最小性 $s \le -b$，再次取负号得 $b \le -s$。所以 $-s$ 不小于任何下界，确为下确界。 ■

■ **例 3.4　把下界问题翻成上界问题**　设 $A = (-1, 2]$。写出 $-A$，并用定理 3.6 求 $\inf A$。再对 $B = \{-2, 0, 3\}$ 做一次验证。

解　不等式 $-1 < a \le 2$ 取负号后变成 $-2 \le -a < 1$，所以 $-A = [-2, 1)$。它的上确界是 1：所有元素不超过 1，而任意 $M < 1$ 都能被区间内一个更大的元素超过。因此 $\inf A = -1$。

对有限集 B，$-B = \{-3, 0, 2\}$，其上确界为 2，所以 $\inf B = -2$，恰是 B 的最小元。取负号时端点的开闭跟随对应元素移动；不能只改两个端点的符号而保持原来的左右顺序。 ♦

下确界也有逼近刻画：$t = \inf A$ 当且仅当 $t \le a$ 对所有 $a \in A$ 成立，且对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $a \in A$ 使 $a < t + \varepsilon$。证明可对 $-A$ 使用命题 3.4，把 $-t - \varepsilon < -a$ 取负号，即得 $a < t + \varepsilon$。若把区间 $(-1, 2]$ 中每个数加 3，得到 $(2, 5]$；若把每个数乘 -2，得到 $[-4, 2)$。这两种变换给出了确界运算中最常用的规则。

> **命题 3.7（平移、正倍数与负倍数）**　设非空实数集 A 有上下界，$s = \sup A$，$t = \inf A$。对 $c \in \mathbb{R}$，记 $A + c = \{a + c : a \in A\}$，则 $\sup(A + c) = s + c$，$\inf(A + c) = t + c$。若 $\lambda > 0$，则 $\sup(\lambda A) = \lambda s$、$\inf(\lambda A) = \lambda t$；若 $\lambda < 0$，则 $\sup(\lambda A) = \lambda t$、$\inf(\lambda A) = \lambda s$。

思路　平移和乘正数保持不等号方向，乘负数反转方向。每个公式都先核对界，再核对最优性；最优性可以把任意新上界或下界逆变换回原集合的界。

证明　任意 $a \in A$ 满足 $a + c \le s + c$，故 $s + c$ 是 $A + c$ 的上界。若 M 为另一个上界，则 $a + c \le M$ 给出 $a \le M - c$，故 $s \le M - c$，也就是 $s + c \le M$。下确界公式由 $t \le a$ 及任意下界 $m - c$ 的比较得到。

若 $\lambda > 0$，则 $\lambda a \le \lambda s$。任意上界 M 满足 $a \le M/\lambda$，于是 $s \le M/\lambda$，得 $\lambda s \le M$。对下界，$\lambda t \le \lambda a$，且任一下界 m 给出 $m/\lambda \le a$，故 $m/\lambda \le t$，即 $m \le \lambda t$。

若 $\lambda < 0$，由 $t \le a$ 得 $\lambda a \le \lambda t$，所以 λt 是上界。任意上界 M 给出 $\lambda a \le M$，除以负数后得到 $a \ge M/\lambda$，所以 $M/\lambda \le t$；再乘负数即 $\lambda t \le M$。因此 $\sup(\lambda A) = \lambda t$。对下确界，由 $a \le s$ 得 $\lambda s \le \lambda a$；任一下界 m 给出 $\lambda a \ge m$，故 $a \le m/\lambda$，进而 $s \le m/\lambda$，也就是 $m \le \lambda s$。 ■

■ **例 3.5　变换后的确界与最值**　设 $A = (-1, 2]$。分别求 $A + 3$、$-2A$ 的上下确界与最值。

解　$A + 3 = (2, 5]$，下确界为 2，上确界和最大元为 5，没有最小元。$-2A = [-4, 2)$，下确界和最小元为 -4，上确界为 2，没有最大元。

可直接回代端点检查：原来的元素 2 变成 5 或 -4，所以对应端点保留；原来不属于集合的 -1 变成 2，所以这两个新集合都不取得这个对应端点。负数倍使原来最大的元素变成最小的元素，这与确界公式中的 s, t 互换一致。当 $\lambda = 0$ 时需单独处理：非空集 A 变成 $\{0\}$，上下确界均为 0。 ♦

想一想　若非空集合 $A \subseteq B$，且 B 有上界，是否一定有 $\sup A < \sup B$？

答　只能保证 $\sup A \le \sup B$。因为 $\sup B$ 是 B 的上界，也是 A 的上界，再用 $\sup A$ 的最小性即可。严格包含仍可能取等号：$\{1\}$ 真包含于 $\{0,1\}$，但两者上确界都是 1。若两者还有下界，则 $\inf B \le \inf A$，理由是 B 的每个下界也是 A 的下界。

方法：把确界结论拆成两行　要证 $s = \sup A$，先对任意 $a \in A$ 证明 $a \le s$；再对任意 $\varepsilon > 0$ 找出 $a \in A$ 使 $s - \varepsilon < a$。若不方便找元素，则证明任意比 s 小的数都不能作上界。两种最小性写法可按题目选择。

3.3　由完备性证明正平方根存在

$1^2 < 2 < 2^2$ 告诉我们平方等于 2 的正数若存在，就应当位于 1 与 2 之间。进一步有 $(7/5)^2 = 49/25 < 2$、$(3/2)^2 = 9/4 > 2$。这些计算可以不断缩小候选范围，但任意有限次计算都只得到区间，尚未证明有一个实数恰好平方为 2。这一缺口由确界原理填补。

引理 3.8（正数上平方严格增大）　若 $0 \le x < y$，则 $x^2 < y^2$。

证明　$y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$。其中 $y - x > 0$；又 $y > x \ge 0$，故 $y + x > 0$。两个正数乘积为正，于是 $y^2 - x^2 > 0$。 ■

非负条件不能去掉。例如 $-2 < -1$，但 $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$。后面由平方大小比较原数时，都要先说明相关数为正。

定理 3.9（正平方根的存在与唯一性）　存在唯一的实数 $\alpha > 0$ 使 $\alpha^2 = 2$。这个数记为 $\sqrt{2}$。

直观理解　把所有正的、平方不超过 2 的实数收在一个集合中，它们应当位于目标数的左侧。取这个集合的上确界。若它的平方大于 2，向左移动少许后仍能作上界，违背最小性；若它的平方小于 2，向右移动少许后还留在集合内，违背上界性。唯一剩下的可能便是平方恰好等于 2。

这里的「少许」必须写成有依据的正数。图 3.2 表示两种移动的方向；图像用于理解目标，证明只使用域、序和确界原理，不预先使用连续性或介值定理。

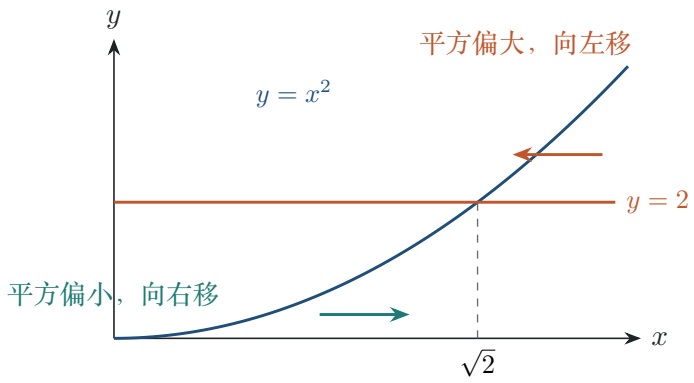


图 3.2　平方偏大时构造更小的上界，平方偏小时构造超过原上界的集合元素。

思路　定义 $A=\{x\in\mathbb{R}:x>0,\ x^2\le 2\}$，先验证非空和有上界，才取 $\alpha=\sup A$。接着分别排除平方偏大与偏小，两次都给出显式扰动，并先检查新点为正。最后用平方严格单调性证明正解唯一。

证明　**第一步：确界存在且为正。**因 $1>0$ 且 $1^2\le 2$，有 $1\in A$，故 A 非空。对任意 $x\in A$，若 $x>2$，引理 3.8 给出 $x^2>4>2$，与 $x^2\le 2$ 矛盾，所以 $x\le 2$。因此 2 是上界。由完备性，$\alpha=\sup A$ 存在，并满足

$$1\le\alpha\le 2.$$

左边来自 $1\in A$ 及 α 为上界，右边来自 2 为上界及 α 的最小性。特别地 $\alpha>0$，以后除以 α 合法。此处只需非严格的 $1\le\alpha$，不把它误写成尚未证明的 $1<\alpha$。

第二步：排除 $\alpha^2>2$。假设 $\alpha^2>2$，令

$$h=\frac{\alpha^2-2}{4\alpha},\qquad \alpha'=\alpha-h.$$

分子、分母均为正，故 $h>0$；并且 $\alpha^2-2<\alpha^2$ 给出 $h<\alpha/4$。因此 $0<3\alpha/4<\alpha'<\alpha$。展开平方得到

$$(\alpha')^2=\alpha^2-2\alpha h+h^2>\alpha^2-2\alpha h=\frac{\alpha^2+2}{2}>2.$$

要由此得到矛盾，还须证明 α' 是整个 A 的上界。任取 $x\in A$，若 $x>\alpha'$，因 $x,\alpha'>0$，平方严格单调性给出 $x^2>(\alpha')^2>2$，与 $x\in A$ 矛盾。故每个 $x\in A$ 都有 $x\le\alpha'$。这样得到一个小于 α 的上界，违反 α 的最小性，所以 $\alpha^2\le 2$。

第三步：排除 $\alpha^2<2$。假设 $\alpha^2<2$，记

$$\delta=2-\alpha^2>0,\qquad h=\frac{\delta}{4\alpha},\qquad \alpha_1=\alpha+h.$$

由 $\alpha\ge 1$，得 $0<\delta\le 1$ 及 $0<h\le\delta/4\le 1/4<1$，从而 $h^2<h\le\delta/4$。又 $2\alpha h=\delta/2$，所以

$$\alpha_1^2=\alpha^2+2\alpha h+h^2<\alpha^2+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{4}<\alpha^2+\delta=2.$$

因为 $\alpha_1>\alpha>0$ 且 $\alpha_1^2<2$，有 $\alpha_1\in A$，与 α 是上界矛盾。故 $\alpha^2\ge 2$。第二、三步合起来得到 $\alpha^2=2$，完成存在性证明。

第四步：唯一性。若另有 $\beta>0$ 满足 $\beta^2=2$，全序性给出 $\alpha<\beta$、$\alpha=\beta$、$\beta<\alpha$ 三种可能。第一、三种都由平方严格单调性推出两者平方不相等，故只能 $\alpha=\beta$。 ■

■ **例 3.6　平方偏大时的实际移动**　把证明中向左移动的规则用在 $a = 3/2$ 上，计算 $h = (a^2 - 2)/(4a)$，并验证新点 $a - h$ 仍在正平方根右边。

解　先算平方与 2 的差：$a^2 - 2 = 9/4 - 2 = 1/4$，于是

$$h = \frac{1/4}{6} = \frac{1}{24}, \qquad a - h = \frac{35}{24}, \qquad \left(\frac{35}{24}\right)^2 = \frac{1225}{576} > \frac{1152}{576} = 2.$$

由于 $35/24 > 0$，平方比较说明 $35/24 > \sqrt{2}$。所以从 $3/2$ 向左移动 $1/24$ 后仍是集合 A 的上界，但比原来的上界小。这正展示了「只要平方偏大，就还有缩小上界的余地」。这里 a 是用于演示的有理数，并不假设它是 A 的确界；真正的反证在假设 $\alpha^2 > 2$ 时对 α 运用同一规则。 ♦

■ **例 3.7　平方偏小时的实际移动**　把向右移动的规则用在 $a = 7/5$ 上，计算 $\delta = 2 - a^2$、$h = \delta/(4a)$，并检验 $a + h$ 仍属于 A。

解　这次要保留平方到 2 之间的正余量。计算得

$$\delta = 2 - \frac{49}{25} = \frac{1}{25}, \qquad h = \frac{1/25}{28/5} = \frac{1}{140}, \qquad a + h = \frac{197}{140}.$$

新点为正，且

$$\left(\frac{197}{140}\right)^2 = \frac{38809}{19600} < \frac{39200}{19600} = 2.$$

所以 $197/140 \in A$，而 $197/140 > 7/5$。平方仍有正余量时，就可以在不离开集合的前提下增大元素。证明中用 $h^2 < h$ 控制增加的二次项；这里的分数计算把这种控制具体显示出来。 ♦

易错提醒　「$\alpha^2 < 2$，所以 $\alpha \in A$，矛盾」这一写法缺少关键一步。上确界可以属于集合，单凭 $\alpha \in A$ 没有矛盾。必须造出 $\alpha_1 > \alpha$ 且 $\alpha_1 \in A$，才与上界性冲突。例如 $\sup\{0, 1\} = 1 \in \{0, 1\}$ 完全正常。

回看证明，各条件各有用途。非空性保证可以调用完备性；有上界保证确界是实数；$1 \in A$ 给出正下界，使扰动公式的分母非零；正数平方单调性把平方的不等式转成上界结论。最后两次矛盾所用的定义也不同：平方偏大违反最小性，平方偏小违反上界性。把这两点标在草稿旁，可以避免写着写着交换了目标。

第 2 讲已证明不存在平方等于 2 的有理数。因此刚构造出的 $\sqrt{2}$ 是无理数；在有理数中同样取正数平方不超过 2 的集合，无法得到有理数上确界。这说明有序域的运算规则本身不足以产生这个数，完备性确实增加了内容。我们也没有先把 $\sqrt{2}$ 定义成无限小数再借用其存在：先有实数 α，才可以讨论用有理小数逼近它。

3.4　阿基米德性质的第一次严格证明

给定 100，我们能选出更大的正整数 101。给定一个任意实数 x，是否总能找到正整数 $n > x$？对熟悉的小数这似乎没有疑问，但实数是由抽象性质刻画的，论证应当从这些性质出发。完备性还会排除「比所有自然数都大」的实数。

定理 3.10（阿基米德性质）　自然数集合 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有上界。等价地，对每个 $x \in \mathbb{R}$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $n > x$。

直观理解　假设正整数全都被某个实数界住，则完备性给出其中最小的上界 M。自然数的特点是：n 在集合中，$n+1$ 也在集合中。因此所有 n 都得满足 $n+1 \le M$，这会让 $M-1$ 也成为上界。最小上界就失去了最小性。

思路　反设 $\mathbb{N}$ 有上界，明确调用完备性得到 $M = \sup \mathbb{N}$。然后任取一个自然数，用其后继 $n+1$ 再取一次上界不等式。由此对每个 n 都得到 $n \le M-1$，最后与最小性比较。

证明　若 $\mathbb{N}$ 有上界，因 $1 \in \mathbb{N}$，完备性保证 $M = \sup \mathbb{N}$ 存在。任取 $n \in \mathbb{N}$，由 $n+1 \in \mathbb{N}$ 和 M 为上界，得 $n+1 \le M$。两边减去 1，得 $n \le M-1$。

由于 n 是任取的，这说明 $M-1$ 是 $\mathbb{N}$ 的上界。可是 $M-1 < M$，与 M 是最小上界矛盾。所以 $\mathbb{N}$ 没有上界。将「x 不是上界」写成存在量词，就是存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $n > x$，等价陈述随之成立。 ■

证明中没有找到一个具体的「最后一个自然数」；事实上它直接排除了整个集合有上界。也不能从「每个 n 还有 $n+1$」单独推导无界：区间 $(0,1)$ 中每个元素右边也还有元素，却有上界 1。这里另外使用了统一的步长 1 和实数完备性。

推论 3.11（正整数的倒数可以任意小）　对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $0 < 1/n < \varepsilon$。更一般地，给定 $c > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使对所有 $n \ge N$ 都有 $c/n < \varepsilon$。

证明　对实数 $1/\varepsilon$ 用定理 3.10，取 $n > 1/\varepsilon$。乘正数 ε/n 得 $1/n < \varepsilon$。一般情形对 c/ε 使用同一定理，取 $N > c/\varepsilon$；若 $n \ge N$，则 $n > c/\varepsilon$，故 $c/n < \varepsilon$。 ■

■ **例 3.8　严格误差与整数阈值**　分别为 $\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$ 选出正整数 N，使所有 $n \ge N$ 都有 $1/n < \varepsilon$。

解　先解严格不等式 $n > 1/\varepsilon$。可以分别取 $N = 11, 101, 1001$。例如 $n \ge 101$ 时，$1/n \le 1/101 < 1/100$；另外两种情况分别用 $1/11 < 1/10$、$1/1001 < 1/1000$。

若在第二种情况下取 $N = 100$，则 $n = 100$ 时只有 $1/n = 1/100$，未达到严格误差。阈值无需最小，但必须保证起点也满足要求。把这一步核对清楚，后面写极限证明会少掉一类常见错误。 ♦

■ **例 3.9　带系数的误差**　找到一个 N，使所有 $n \ge N$ 都有 $7/n < 1/100$。再说明对任意 $x > 0$ 和 $y > 0$，都能找到自然数 n 使 $nx > y$。

解　第一问解出 $n > 700$，故取 $N = 701$。对任意 $n \ge 701$，有 $7/n \le 7/701 < 1/100$，最后一个不等式可乘以正数 70100 化成 $700 < 701$ 验证。

第二问把不等式两边除以正数 x，目标等价于 $n > y/x$。对实数 y/x 使用阿基米德性质，取这样的自然数 n，再乘回 x 即得 $nx > y$。因此「自然数无上界」也可以改写成「任意正长度的自然数倍都能超过给定正实数」。若 $x = 0$，结论对 $y > 0$ 失败，所以正性条件不能删。 ♦

想一想　把 $M = \sup \mathbb{N}$ 代入刚才的反证时，是否需要假设 $M \in \mathbb{N}$?

答　不需要。上确界的定义只要求 $M \in \mathbb{R}$。我们用的是对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $n+1 \le M$，然后证明每个 $n \le M-1$；没有对 M 使用后继，也没有宣称 M 是自然数。把确界当成集合元素，会把这个证明错误地缩成「最大自然数再加 1」，从而漏掉有界但不取最大值的可能。

方法：先解误差不等式，再选整数　遇到 $c/n < \varepsilon$，先在正实数中解出 $n > c/\varepsilon$，再用阿基米德性质保证有自然数超过右端。最后检查：一旦 $n \ge N$，不等式是否始终成立。这里只需选出一个可用阈值，不必求最小阈值。

下一讲将用这一性质寻找整数部分，再证明任意两个不同实数之间存在有理数。本讲先把它用在数列 $1/n$ 上：不仅存在一个很小的倒数，而且从某个位置起，后面所有倒数都很小。这使我们能够精确地表达「趋于 0」。

3.5　数列与极限的第一种严格写法

$1, 1/2, 1/3, \ldots$ 每一项都有明确的位置；$-1, 1, -1, 1, \ldots$ 虽然只出现两个不同数，却也有无限多个位置。数列记录位置与数值的对应关系，因此不应把它与其取值集合混为一谈。

定义 3.12（实数数列）　一个**实数数列**（real sequence）是函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$。记 $a_n = f(n)$，写作 $(a_n)_{n\ge 1}$，其中 a_n 称为第 n 项。

例如 $a_n = 1/n$ 给出第一列，$a_n = (-1)^n$ 给出第二列。常值数列 $a_n = 0$ 也是数列，尽管它的取值集合只有一个元素。数列 $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ 与 $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \ldots)$ 取值集合相同，但作为函数不同，因为第 2 项不同。比较数列必须保留项的位置。

定义 3.13（数列极限）　设 (a_n) 为实数数列，$a \in \mathbb{R}$。若对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使对所有 $n \ge N$ 有 $|a_n - a| < \varepsilon$，称 (a_n) **收敛**（converges）于 a，记为 $a_n \to a$ 或 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

定义要求的是整个尾段都在指定误差内。给定 ε 后可以选阈值 N，且 N 可以依赖于 ε；但选定 N 后，后面的每一个 n 都必须满足不等式。不能为每个 n 另选一个更大的 N，也不能只找到一个满足误差的项就宣布收敛。

■ **例 3.10　直接按定义证明倒数趋于零**　证明 $a_n = 1/n$ 收敛于 0。

解　要控制 $|a_n - 0| = 1/n$，先任取 $\varepsilon > 0$。由阿基米德性质，选 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $N > 1/\varepsilon$。于是对每

个 $n \geq N$，有

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

这就是极限定义所要求的完整量词顺序，故 $1/n \to 0$。不能只写「n 无穷大，所以 $1/n$ 无穷小」；证明需要给出如何从任意误差选择阈值，并说明同一个阈值控制全部后续项。 ♦

图 3.3 将一个具体误差 $\varepsilon = 1/4$ 画出来：横坐标是项号，曲线只帮助辨认数值，真正的数列由离散的点组成。

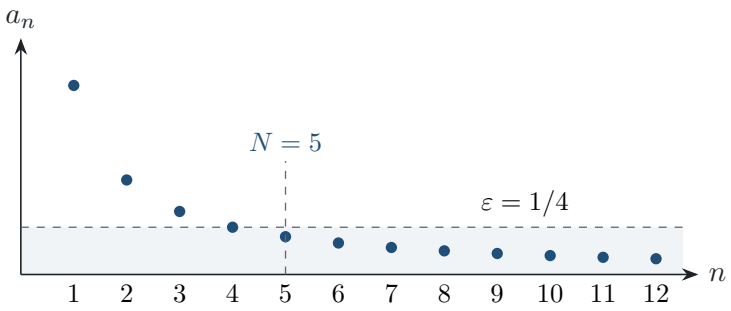


图 3.3　当 $n \geq 5$ 时，点 $1/n$ 全部进入误差带 $0 < a_n < 1/4$；第 4 项恰在边界上。

图中的第 4 项满足 $a_4 = 1/4$，它在误差带边界上，尚未满足严格小于；第 5 项及其后的每项才都在带内。改变误差带的宽度时，阈值也可以改变。图只画有限多点，而对所有 $n \geq N$ 的结论来自前面的不等式证明。

■ **例 3.11**　**交错列为何不能停留在任意小的误差内**　证明 $a_n = (-1)^n$ 没有实数极限。

解　反设 $a_n \to a$，取固定误差 $\varepsilon = 1/2$。定义保证存在 N，使所有 $n \geq N$ 的项都满足 $|a_n - a| < 1/2$。尾段里既有偶数项，也有奇数项：$2N \geq N$ 且 $2N + 1 \geq N$。因此

$$|1 - a| < \frac{1}{2}, \qquad |-1 - a| < \frac{1}{2}.$$

第一式等价于 $1/2 < a < 3/2$，第二式等价于 $-3/2 < a < -1/2$；这两个区间没有公共点，矛盾。因此不存在这样的 a。前六项 $-1, 1, -1, 1, -1, 1$ 显示交替现象，而任意尾段中都同时出现两种值才是证明所需的事实。 ♦

■ **例 3.12**　**平方根的小数近似先说明什么**　原课程给出 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$ 逼近 $\sqrt{2}$。核对前四个小数的位置，并说明要从有限计算过渡到极限，还需什么统一估计。

解　由于 $\sqrt{2}$ 已由定理 3.9 构造出来，可以用平方比较定位它。表 3.1 中每个下端点平方小于 2，对应上端点平方大于 2，且所有端点为正。

下端点 d_n	d_n^2	上端点 u_n	u_n^2
1	1	2	4
1.4	1.96	1.5	2.25
1.41	1.9881	1.42	2.0164
1.414	1.999396	1.415	2.002225

表 3.1　前四对有理端点都满足 $d_n < \sqrt{2} < u_n$，区间长度依次为 $1, 1/10, 1/100, 1/1000$。

这些计算验证了前四项，却没有单独决定省略号之后的项。要把它写成严格的极限例子，需要为每个 n 定义第 n 个小数截断 d_n，并证明统一误差

$$0 \le \sqrt{2} - d_n < 10^{1-n}.$$

小数截断的构造和这条估计在第 4 讲完成。这里先解释估计怎样产生极限：任取 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/\varepsilon$。归纳可得 $10^{n-1} \ge n$，因为初始 $n = 1$ 时相等，而 $10n \ge n + 1$ 对 $n \ge 1$ 成立。因此对所有 $n \ge N$，

$$|d_n - \sqrt{2}| < 10^{1-n} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

这给出 $d_n \to \sqrt{2}$。有限个数的核对、对全部项的误差估计、按定义选择阈值，是三项不同的工作，不能用表格替代后两项。 ♦

易错提醒　「无论多靠后，总能找到一项接近 a」不足以推出收敛。例如 $(-1)^n$ 的偶数项总是等于 1，但每个尾段都有值为 -1 的项。极限定义要求存在阈值后所有项都接近 a。否定定义时，要证明某个固定正误差无法控制任何尾段。

前后联系　本讲得到两类结论：确界保证某些实数存在，阿基米德性质把任意正误差与足够大的整数联系起来。第 4 讲把整数、稠密性和小数的细节补齐；第 5 讲系统证明数列极限的唯一性、四则运算法则等性质。本讲的三个数列例子均直接使用定义，不依赖这些尚未证明的一般定理。

本讲小结

- **上确界有两项条件**：s 是上界，且 $s \le M$ 对每个上界 M 成立。$\sup A \in A$ 当且仅当 A 取得最大元。
- **逼近刻画**：$s = \sup A$ 等价于 $a \le s$ 对所有 $a \in A$ 成立，且每个 $\varepsilon > 0$ 都能找到 $a \in A$ 满足 $s - \varepsilon < a$。
- **完备性**：非空、有上界的实数集有上确界；非空、有下界的实数集有下确界，且 $\inf A = -\sup(-A)$。
- **变换规则**：平移保持确界的相对位置；乘负数交换上下确界。若非空 $A \subseteq B$ 且 B 有上界，则 $\sup A \le \sup B$。
- **平方根存在**：取 $A = \{x > 0 : x^2 \le 2\}$ 的上确界；平方偏大时造更小的上界，平方偏小时造更大的集合元素，故 $\alpha^2 = 2$。
- **阿基米德性质**：每个 $x \in \mathbb{R}$ 都有自然数 $n > x$；等价地，正整数倒数能小于任意给定正误差。反证的关键是 $M - 1$ 仍为上界。
- **极限的量词**：$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N$，$|a_n - a| < \varepsilon$。由此 $1/n \to 0$，而 $(-1)^n$ 不收敛。

练习

3.1 ★ 求 $A = \{-3/2, 0, 5/2\}$ 与 $B = [-2, 4)$ 的上下确界，并说明四个确界中哪些由集合元素取得。

3.2 ★ 判断真假，假的给反例：(a) 非空实数集的上确界一定属于集合；(b) 没有最大元的实数集没有上界；(c) 若 $s = \sup A$，则 s 不超过 A 的任意上界；(d) 若非空 $A \subseteq B$ 且 B 有下界，则 $\inf A \le \inf B$。

3.3 ★ 设 $A = (-2, 4]$，记 $C = \{3a + 1 : a \in A\}$、$D = \{-2a + 1 : a \in A\}$。求 C, D 的上下确界，并判断最大元、最小元是否存在。

3.4 ★★ 设 $A = \{n/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$。证明 $\inf A = 1/2$、$\sup A = 1$，并说明哪一个确界取得。证明上确界时使用阿基米德性质。

3.5 ★★ 设非空实数集 A, B 均有上界。证明 $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$。说明为什么这里不要求确界属于原集合。

3.6 ★★ 设 A 非空、有下界，$t \in \mathbb{R}$。不引用下确界的逼近刻画，直接从定义证明：$t = \inf A$ 当且仅当 $t \le a$ 对所有 $a \in A$ 成立，且任给 $\varepsilon > 0$，存在 $a \in A$ 使 $a < t + \varepsilon$。

3.7 ★★ 对 $a = 4/3$，使用平方根证明中的向右扰动规则计算 $h = (2 - a^2)/(4a)$，验证 $a + h$ 比 a 大且平方仍小于 2。解释这个计算对应证明中的哪一种矛盾。

3.8 ★ 找出一个正整数 N，使每个 $n \ge N$ 都满足 $3/n < 1/100$。说明 $N = 300$ 是否可用，并验证你的选择。

3.9 ★★★ 直接使用极限定义，证明 $a_n = 2 + 3/n$ 收敛于 2。给定一般 $\varepsilon > 0$ 时阈值应满足什

么不等式？不得引用尚未证明的极限运算法则。

3.10 ★★★ 证明 $b_n = 1 + \frac{3}{2}(-1)^n$ 没有实数极限。先写出奇数项与偶数项，再选一个固定正误差，说明任何候选极限都不能同时满足两种尾部误差要求。

练习答案与提示

3.1 对有限集 A，$\inf A = -3/2$、$\sup A = 5/2$，两者都是元素，分别是最小元和最大元。对 $B = [-2, 4)$，-2 是下界且属于集合，所以为下确界和最小元；4 是上界。任给 $M < 4$，若 $M < -2$，取 $b = -2$；若 $-2 \le M < 4$，取 $b = (M + 4)/2$。两种情形都有 $b \in B$ 且 $b > M$，所以 M 不是上界，故 $\sup B = 4$。由于 $4 \notin B$，不存在最大元。

3.2 (a) 假，取 $A = (0, 2)$，其上确界 2 不属于 A。(b) 假，同一个区间没有最大元，却有上界 2。(c) 真，这是最小上界定义的第二项。(d) 假，取 $A = \{1\}$、$B = \{0, 1\}$，则 $A \subseteq B$，但 $\inf A = 1 > 0 = \inf B$。一般的正确方向为 $\inf B \le \inf A$，因为 $\inf B$ 也是 A 的下界，而 $\inf A$ 是 A 最大的下界。

3.3 因 $-2 < a \le 4$，乘 3 加 1 得 $-5 < 3a + 1 \le 13$，并且逆变换 $a = (c - 1)/3$ 表明区间中每个 c 都能取得，故 $C = (-5, 13]$。于是下确界为 -5，无最小元；上确界和最大元为 13。乘 -2 加 1 时不等号反向，得 $-7 \le -2a + 1 < 5$，逆变换也给出每个点都能取得，所以 $D = [-7, 5)$，下确界与最小元为 -7，上确界为 5，无最大元。端点 $a = 4$ 分别对应 13 和 -7，可直接核对取得情况。

3.4 写成 $n/(n+1) = 1 - 1/(n+1)$。因 $n \ge 1$，$1/(n+1) \le 1/2$，所以每项不小于 $1/2$；$n = 1$ 取得 $1/2$，故它是下确界与最小元。每项都严格小于 1，所以 1 是上界。任取 $\varepsilon > 0$，用阿基米德性质取 $n > 1/\varepsilon$，则 $1/(n+1) < 1/n < \varepsilon$，从而 $n/(n+1) > 1 - \varepsilon$。由逼近刻画，$\sup A = 1$。没有一项等于 1，故不取最大元。

3.5 记 $s = \sup A$、$t = \sup B$、$u = \max\{s, t\}$。对任意 $x \in A \cup B$，若 $x \in A$，则 $x \le s \le u$；若 $x \in B$，则 $x \le t \le u$。因此 u 是并集上界。任取并集的上界 M，它同时是 A 与 B 的上界，所以 $s \le M$、$t \le M$，进而 $u \le M$。这证明 u 为最小上界。论证只比较上界，不需要 $s \in A$ 或 $t \in B$，例如两个开区间也能用此公式。

3.6 若 $t = \inf A$，第一项是定义。任取 $\varepsilon > 0$，由于 $t + \varepsilon > t$，$t + \varepsilon$ 不可能是下界，否则违背 t 的最大性。因此存在 $a \in A$ 满足 $a < t + \varepsilon$。反之，设两项成立，则 t 是下界。若另一个下界 m 大于 t，取 $\varepsilon = m - t > 0$，第二项给出 $a \in A$ 满足 $a < t + \varepsilon = m$，与 m 为下界冲突。所以所有下界都不超过 t，从而 $t = \inf A$。

3.7 $a^2 = 16/9$，故 $2 - a^2 = 2/9$，$h = (2/9)/(16/3) = 1/24$，于是 $a + h = 4/3 + 1/24 = 11/8 > 4/3$。其平方为 $121/64 < 128/64 = 2$，且新点为正，所以仍在 $A = \{x > 0 : x^2 \le 2\}$ 中。若 a 原来被假设是 A 的上界，这个更大元素便会违背上界性。本题只作具体移动演示，并未假设 $4/3$ 真是上界。

3.8 取 $N = 301$。对每个 $n \ge 301$，$3/n \le 3/301 < 1/100$；最后一步由 $300 < 301$ 得到。$N = 300$ 不可用，因为起点 $n = 300$ 时 $3/n = 1/100$，只有等号，没有严格小于。任何大于 300 的整数阈值都可用。

3.9 任取 $\varepsilon > 0$，由阿基米德性质取 $N \in \mathbb{N}$ 使 $N > 3/\varepsilon$。对所有 $n \ge N$，$|a_n - 2| = |3/n| = 3/n \le 3/N < \varepsilon$。这里使用 $n > 0$，所以绝对值等于 $3/n$。因此按定义 $a_n \to 2$。阈值依赖于给定误差，但同一个 N 控制全部后续项；证明没有把 $2 + 3/n$ 分拆后交换极限。

3.10 奇数项为 $-1/2$，偶数项为 $5/2$。反设 $b_n \to b$，取 $\varepsilon = 1/2$，则存在 N，使所有 $n \ge N$ 都有 $|b_n - b| < 1/2$。取尾段中的奇数 $2N + 1$ 与偶数 $2N$，得到 $|-1/2 - b| < 1/2$ 和 $|5/2 - b| < 1/2$。第一式要求 $-1 < b < 0$，第二式要求 $2 < b < 3$，互相矛盾。所以不存在实数极限。关键是每个尾段均有这两种值；只列出最初几项不能排除它们后来停止交替的可能，通项公式才保证它们永远交替。

第 4 讲

阿基米德性质、整数部分与稠密性

The Archimedean Property, Integer Parts and Density

对应材料：MIT 18.100B Lecture 4 讲义（完备有序域、$0.999\cdots=1$）；Lecture 2、3 讲义中的阿基米德性质及其推论、有理数的稠密性；习题集 1 第 3、5、6 题，习题集 3 第 1、3 题。

本讲目标

(1) 记住「$\mathbb{R}$ 是包含 $\mathbb{Q}$ 的完备有序域」这句话的三层含义，会用 ε 刻画上确界与下确界。

(2) 理解阿基米德性质：$\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有上界。会证明它，会在三种等价形式之间切换，特别是「对任意 $\varepsilon>0$ 有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$」。

(3) 掌握「任意小就是零」的论证方式，并用它严格证明 $0.999\cdots=1$。

(4) 通过有理函数域 $\mathbb{R}(X)$ 看到：有序域不一定满足阿基米德性质；阿基米德性质比完备性弱。

(5) 证明整数部分 $\lfloor x\rfloor$ 的存在唯一性，进而证明有理数和无理数在 $\mathbb{R}$ 中都稠密。

4.1 回顾：完备有序域

第 3 讲和第 4 讲的原讲义都从同一句话开始：

> $\mathbb{R}$ 是一个包含 $\mathbb{Q}$ 的完备有序域。

这句话里有三个词。域说的是能做加减乘除，其中除数不能为零；有序说的是能比较大小，而且大小关系和运算相容；完备说的是每个有上界的非空子集都有最小上界。前两条在第 1 讲讲过，完备性是第 2、3 讲的主题。本讲要回答的问题是：**完备性到底给了我们什么？** 答案的第一部分是两条贯穿整门课的性质：阿基米德性质和有理数的稠密性（任何两个实数之间都有有理数）。阿基米德性质为误差估计提供整数阈值，稠密性为实数提供有理近似。

先把记号和定义统一一下。本课程约定 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$（不含 0），$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$，$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\}$。

定义 4.1（上界、下界、上确界、下确界）　设 S 是有序集，$A \subseteq S$ 非空。

(1) 若存在 $M \in S$，使对一切 $a \in A$ 有 $a \le M$，则称 M 是 A 的**上界**（upper bound），称 A **有上界**（bounded above）。

(2) 若存在 $m \in S$，使对一切 $a \in A$ 有 $m \le a$，则称 m 是 A 的**下界**（lower bound）。

(3) 若 s 是 A 的上界，且对 A 的任一上界 M 都有 $s \le M$，则称 s 是 A 的**上确界**（supremum）（最小上界），记作 $\sup A$。

(4) 若 ℓ 是 A 的下界，且对 A 的任一下界 m 都有 $m \le \ell$，则称 ℓ 是 A 的**下确界**（infimum）（最大下界），记作 $\inf A$。

上确界若存在则唯一：若 s, s' 都是最小上界，则 $s \le s'$（s' 是上界）且 $s' \le s$（s 是上界），所以 $s = s'$。原讲义第 4 讲有一处笔误，把 $\sup A$ 写成了 greatest lower bound；正确的说法是 least upper bound，即最小上界。

公理 4.2（完备性，确界原理）　$\mathbb{R}$ 的每个有上界的非空子集都有上确界。

定理 4.3（实数的存在性）　存在一个包含 $\mathbb{Q}$ 的完备有序域，记作 $\mathbb{R}$。

课程将这个存在性定理作为出发点，不证明实数的构造。一种构造使用 Dedekind 分割，另一种使用有理柯西列；两者均超出当前范围。同构意义下的唯一性同样不在本课证明。从现在起，论证使用实数的域、序与完备性公理，不以图像代替这些条件。

完备性公理只提到上确界。下确界不需要另立公理，它可以由上确界得到。

命题 4.4　设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 非空且有下界。令 $-A = \{-a \mid a \in A\}$，则 $\inf A$ 存在，并且 $\inf A = -\sup(-A)$。

证明　关键是一个等价关系：m 是 A 的下界，当且仅当 $-m$ 是 $-A$ 的上界。因为对一切 $a \in A$，$m \le a$ 等价于 $-a \le -m$；不等式两边乘 -1 会反向，这是有序域的基本性质。

A 有下界 m，所以 $-A$ 有上界 $-m$；A 中取一个元素 a，则 $-a \in -A$，所以 $-A$ 非空。由完备性，$s = \sup(-A)$ 存在。令 $\ell = -s$。

- s 是 $-A$ 的上界，由上面的等价关系，$\ell = -s$ 是 A 的下界。
- 设 m 是 A 的任一下界，则 $-m$ 是 $-A$ 的上界。s 是最小上界，所以 $s \le -m$，即 $m \le -s = \ell$。

所以 ℓ 是最大下界，$\inf A = \ell = -\sup(-A)$。 ■

这正是习题集 1 第 6 题。下面这个引理把「最小上界」翻译成可以直接操作的不等式，本讲几乎每个证明都要用它。

引理 4.5（确界的 ε 刻画）　设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 非空，$s \in \mathbb{R}$。则 $s = \sup A$ 当且仅当

(1) s 是 A 的上界；

(2) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $a \in A$，使 $a > s - \varepsilon$。

类似地，$\ell = \inf A$ 当且仅当 ℓ 是下界，且对每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $a \in A$ 使 $a < \ell + \varepsilon$。

证明　「$\Rightarrow$」：设 $s = \sup A$，(1) 由定义成立。任取 $\varepsilon > 0$，则 $s - \varepsilon < s$。若 $s - \varepsilon$ 是上界，就与 s 是最小上界矛盾。所以 $s - \varepsilon$ 不是上界，即存在 $a \in A$ 使 $a > s - \varepsilon$。

「$\Leftarrow$」：设 (1)(2) 成立，M 是 A 的任一上界，要证 $s \le M$。若不然，$M < s$，取 $\varepsilon = s - M > 0$。由 (2)，有 $a \in A$ 使 $a > s - \varepsilon = M$，与 M 是上界矛盾。下确界的情形完全对称。 ■

直观理解　条件 (2) 说的是：从 s 往左挪任意小的一步，就会碰到 A 的点。所以 s 是一个「紧贴着」A 的上界，中间没有空隙。注意 s 本身不必属于 A。例如 $\sup(0,1) = 1$，而 $1 \notin (0,1)$。第 3 讲证明 $\sqrt{2}$ 存在时，「$\alpha - h$ 仍是上界」与「$\alpha + h$ 仍在集合里」两种矛盾，用的就是这个想法。

想一想　试用引理 4.5 验证 $\sup\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$。哪一步需要额外的理由？

答　1 是上界，因为 $1 - \frac{1}{n} < 1$。条件 (2)：给定 $\varepsilon > 0$，要找 n 使 $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$，即 $\frac{1}{n} < \varepsilon$，也就是 $n > \frac{1}{\varepsilon}$。「这样的 n 当然存在」这一句需要理由：假如 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上界，比如每个 n 都不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$，这一步就做不下去了。$\mathbb{N}$ 没有上界正是下一节的阿基米德性质，它要用完备性来证明。

图 4.1 是本讲的路线图。所有结论都从完备性出发，经过阿基米德性质和整数部分，最后到达稠密性。

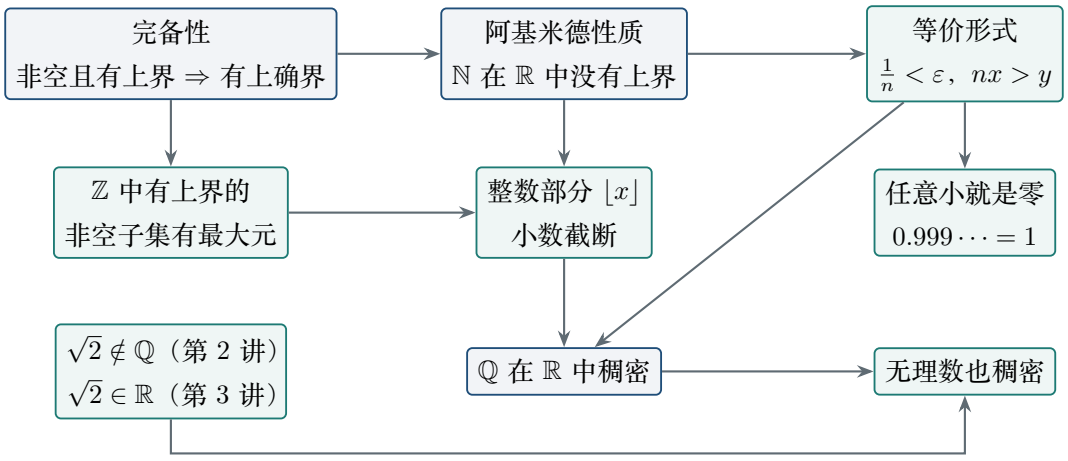


图 4.1　本讲的逻辑路线，箭头表示「用来证明」。蓝框是完备性公理和两条核心结论，青框是推论与工具。

4.2　阿基米德性质：把实数尺度换成整数

要使 $1/n < 0.001$，可以取 $n = 1001$；要使 $1/n < 3/7$，取 $n = 3$ 即可。两次计算都在问同一件事：给定一个实数阈值，是否总能找到更大的自然数？第 3 讲已给过证明，本节把证明与常用形式放在一起，便于后面调用。

定理 4.6（阿基米德性质）　对每个 $x \in \mathbb{R}$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $n > x$。等价地，对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $0 < 1/n < \varepsilon$。

思路　假设所有自然数都有一个上界，完备性就给出最小上界。自然数加 1 仍在集合内，这会迫使原来的上界还可减去 1，与最小性矛盾。

证明　假设 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上界。它非空，故由完备性可取 $s = \sup \mathbb{N}$。任给 $n \in \mathbb{N}$，因为 $n+1 \in \mathbb{N}$，有 $n+1 \le s$，即 $n \le s-1$。这对每个 n 都成立，所以 $s-1$ 是 $\mathbb{N}$ 的上界，然而 $s-1 < s$，矛盾。因此 $\mathbb{N}$ 无上界，即对每个实数 x 都有自然数 $n > x$。

给定 $\varepsilon > 0$，将第一种形式用于 $x = 1/\varepsilon$，得 $n > 1/\varepsilon$。两边都是正数，取倒数得 $1/n < \varepsilon$。反过来，若第二种形式成立，对 $x \ge 0$ 取 $\varepsilon = 1/(x+1)$，便有 $n > x+1 > x$；对 $x < 0$，取 $n = 1$ 已足够。两种形式等价。 ■

证明只说某个整数存在，没有给一个实数的机器表示，也没有假设「把小数一直写下去」。其作用是为后面每次选择整数提供依据。若 $u > 0$、$v \in \mathbb{R}$，把 x 换成 v/u 便可选 n 使 $nu > v$；固定的正步长反复累加，能超过任何指定的实数。

■ **例 4.1　严格不等号决定取值**　分别为 $\varepsilon = 1/10$、$1/1000$、$3/7$ 找到使 $1/n < \varepsilon$ 的自然数，并说明是否可以取 $n = 1/\varepsilon$。

解　先把条件等价变为 $n > 1/\varepsilon$。三个情形可依次取 $n = 11, 1001, 3$，回代为 $1/11 < 1/10$、$1/1001 < 1/1000$、$1/3 < 3/7$。最后一个由 $7 < 9$ 得到。若 $1/\varepsilon$ 本身是整数，取它只会使 $1/n = \varepsilon$，达不到严格不等号。选整数时要保留严格边界。 ♦

引理 4.7（任意小即为零）　若 $d \in \mathbb{R}$、$d \ge 0$，且对每个 $\varepsilon > 0$ 有 $d < \varepsilon$，则 $d = 0$。只要求对每个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $d < 1/n$，结论也成立。

证明　第一种情形若 $d > 0$，取 $\varepsilon = d/2$，得到 $d < d/2$，矛盾。第二种情形若 $d > 0$，由阿基米德性质取 $n > 1/d$，于是 $1/n < d$，与 $d < 1/n$ 矛盾。因为 $d \ge 0$，均只能有 $d = 0$。 ■

想一想　若一个非负实数小于 10^{-100}，能否断言它是 0？若它小于每个 10^{-k} 呢？
答　前者不能，$10^{-101} > 0$ 就是反例。后者可以：对任意 $\varepsilon > 0$，选自然数 $k > 1/\varepsilon$，用 $10^k > k$ 得 $10^{-k} < 1/k < \varepsilon$，再用引理。关键在「每个」的量词，有限精度的测量本身不等于零。

选择尺度　看到「给定 $\varepsilon>0$，选一个足够大的整数」时，先把所需估计解成 $n>C/\varepsilon$ 一类条件，再调用阿基米德性质。写出阈值，可以看清所选的 n 依赖哪些已知量。

4.3　有序域仍可能不满足阿基米德性质

整数系数多项式 $X-100$ 在足够大的正实数处为正；$X-1000000$ 也一样。若用「变量充分大时的大小」给多项式排序，形式变量 X 就会比每个常数整数都大。习题集 1 第 4、5 题要求检查这个现象。这里的 X 是形式符号，不是事先选定的某个实数。

对非零实系数多项式 $P(X)=a_dX^d+\cdots+a_0$，规定 P 为正当且仅当首项系数 $a_d>0$。这和「对一切充分大的实数 t，$P(t)>0$」等价。为证明后一句，令 $B=\sum_{i<d}|a_i|$，取 $t>\max\{1,2B/|a_d|\}$。当 $d\geq 1$ 时，

$$\left|\sum_{i<d}a_it^i\right|\leq Bt^{d-1}<\tfrac{1}{2}|a_d|t^d,$$

低次项不能改变首项的符号；$d=0$ 时直接检查常数即可。比较 P,Q 时规定 $P<Q$ 当且仅当 $Q-P$ 为正。

■ **例 4.2　多项式的次序**　按上述次序比较 X 与任意正整数 n，比较 X^2 与 $1000X$，并说明整数系数多项式集合为什么还不是域。

解　先看差的首项。$X-n$ 的首项系数为 1，故对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $n<X$。$X^2-1000X$ 的首项系数也为 1，所以 $1000X<X^2$。这里的量词是对每个 n 分别判断多项式 $X-n$ 的符号，并没有声称存在一个实数同时超过全部整数。

整数系数多项式对加、减、乘封闭，却不包含常数 2 的乘法逆元 $1/2$，也不包含 X 的逆元 $1/X$。因此它是有序集合与有序环的例子，不能直接作为「有序域」的反例。若要展示有序域的边界，需要进一步允许多项式之商。　♦

定义 4.8（有理函数域及其序）　$\mathbb{R}(X)$ 由形式分式 $P(X)/Q(X)$ 组成，其中 $P,Q\in\mathbb{R}[X]$、$Q\neq 0$，相等按交叉相乘判断。非零分式为正，指分子与分母首项系数同号。定义 $f<g$ 当且仅当 $g-f$ 为正。

先检查这个符号规定不依赖写法。若 $P/Q=R/S$ 且均非零，则 $PS=RQ$；两边首项系数相等，所以「P 与 Q 同号」和「R 与 S 同号」等价。因而同一个有理函数即使约分或同时乘上负多项式，正负也不会改变。加、减、乘和非零元的倒数按分式运算定义，由多项式的交换、结合、分配律得到域公理，且常数 $0,1$ 不相同。

次序也必须逐条检查。由多项式的最终符号，任意非零 P/Q 在所有充分大的实数 t 处都有定义，其符号等于分子、分母首项系数之商的符号。因此形式分式为正，等价于它在充分大的 t 处取正值。每个非零分式恰为正或负，给出三歧性。若 $f,g>0$，在一个同时适用的阈值之后，有 $f(t),g(t)>0$，于是 $f(t)+g(t)>0$、$f(t)g(t)>0$，故 $f+g$、fg 均非零且为正。从正数对加法封闭可得次序传递，从差不变可得平移保持次序；正数乘积为正则给出乘法相容性。因此它确实是有序域。

命题 4.9　有序域 $\mathbb{R}(X)$ 不满足阿基米德性质，因而也不完备。

证明　对每个常数自然数 n，$X-n$ 的首项系数为正，故 $n<X$。所以 X 是自然数集合在这个有序域内的一个上界，阿基米德性质失败。如果这个有序域还完备，那么定理 4.6 的上确界证明逐字适用，强迫自然数无上界，产生矛盾。因此它不完备。 ■

形式变量与实数取值　「X 比每个自然数大」发生在 $\mathbb{R}(X)$ 的形式次序中。若先把 X 代成固定实数 t，再声称 $t>n$ 对所有自然数成立，就违背实数的阿基米德性质。次序定义中的「充分大」允许阈值依赖被比较的那对有理函数。

反过来，满足阿基米德性质也不足以保证完备。$\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的有序子域，给定有理数 q，可在 $\mathbb{R}$ 内取自然数 $n>q$，这个 n 仍在 $\mathbb{Q}$ 中，所以 $\mathbb{Q}$ 满足阿基米德性质。但第 2、3 讲已用平方接近 2 的集合说明 $\mathbb{Q}$ 不完备。三层条件可依次区分：域规定运算，有序规定比较，阿基米德性质控制整数尺度，完备性才保证所有适用的确界存在。

4.4　整数部分：网格中紧靠左侧的点

$2\le 2.7<3$，而 $-3\le -2.7<-2$。正数时「去掉小数」碰巧能得到左边的整数，负数时却不行：-2 已在 -2.7 右边。寻找满足 $m\le x<m+1$ 的整数，需要一个不区分正负的存在性证明。

引理 4.10（有界整数集有最大元）　非空集合 $E\subseteq\mathbb{Z}$ 若在 $\mathbb{R}$ 中有上界，则有最大元。

证明　取 $e_0\in E$。由阿基米德性质，存在自然数 N 大于 E 的某个实数上界。$E\cap\{e_0,e_0+1,\dots,N\}$ 是非空有限集合，所以有最大元 m。对任意 $e\in E$，若 $e\ge e_0$，它属于该有限集合，故 $e\le m$；若 $e<e_0$，则 $e<e_0\le m$。因此 m 是整个 E 的最大元。 ■

定理 4.11（整数部分）　对每个 $x\in\mathbb{R}$，存在唯一整数 m 使 $m\le x<m+1$，记为 $\lfloor x\rfloor$，称为 x 的**整数部分**（floor）。因此

$$\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1,\qquad 0\le x-\lfloor x\rfloor<1.$$

思路　把所有不超过 x 的整数收集起来。先证明这个集合非空且有上界，再取其中最大者；如果下一个整数仍不超过 x，就会违背最大性。

证明　令 $E=\{k\in\mathbb{Z}:k\le x\}$。由阿基米德性质取 $N>-x$，则 $-N<x$，故 $-N\in E$，所以非空。x 是它的上界，由引理 4.10，它有最大元 m。既然 $m\in E$，有 $m\le x$。若 $m+1\le x$，则 $m+1\in E$ 且大于 m，矛盾，所以 $x<m+1$。

若 m' 也满足 $m'\le x<m'+1$，则 $m-m'<1$ 且 $m'-m<1$。二者都是整数，因此都不大于 0，即 $m\le m'$ 且 $m'\le m$。故 $m=m'$，唯一性得证。 ■

■ **例 4.3　负数也向下取整**　求 $\lfloor 2.7\rfloor$、$\lfloor -2.7\rfloor$、$\lfloor -3\rfloor$、$\lfloor 0\rfloor$、$\lfloor 7/3\rfloor$，并核对每个对应区间。

解　按定义寻找左闭右开单位区间：$2.7 \in [2,3)$，$-2.7 \in [-3,-2)$，$-3 \in [-3,-2)$，$0 \in [0,1)$，$7/3 \in [2,3)$。所以答案依次为 $2,-3,-3,0,2$。特别地，整数本身取整后不变，不能因为「向下」二字再减去 1。 ♦

图 4.2 画出正负两种情形，蓝色粗段采用左闭右开的端点。每个实数只落入一个这样的区间，图像同时解释存在性与唯一性中的两个不等号。

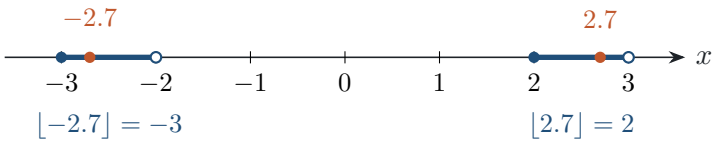


图 4.2　整数部分取所在单位区间的左端点；-2.7 对应 -3，2.7 对应 2。

取整不等于向零截断　把 -2.7 的小数部分直接删掉得到 -2，却有 $-2 > -2.7$，不满足整数部分定义。向下取整始终满足 $\lfloor x\rfloor \le x$。用程序验证时，应使用数学意义的 floor，而不能默认整数类型转换采用同一种规则。

整数部分还有两个直接用途。其一，$\lfloor x+j\rfloor = \lfloor x\rfloor + j$ 对每个整数 j 成立：把 $m \le x < m+1$ 两边同加 j，再用唯一性。其二，若 $x < y$，则 $\lfloor x\rfloor \le \lfloor y\rfloor$：不超过 x 的整数也不超过 y，因此前一集合的最大元不超过后一集合的最大元。

■ **例 4.4　把确界问题转成整数不等式**　求习题集 1 第 3 题中 $E = \{(n^2+n)/(n^2+1) : n \in \mathbb{N}\}$ 的上下确界，并判断是否取得。

解　先算前几项 $1, 6/5, 6/5, 20/17, 15/13$，猜测最大值为 $6/5$。证明时把分母乘过去：

$$\frac{n^2+n}{n^2+1} \le \frac{6}{5} \iff 0 \le n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3).$$

对正整数 n，右侧总非负：$n \le 2$ 时两因子都非正，$n \ge 3$ 时两因子都非负，中间没有别的整数。$n = 2, 3$ 取等号，故上确界与最大值都为 $6/5$。

另一方面，$n^2+n \ge n^2+1$ 因为 $n \ge 1$，所以每项不小于 1，且 $n = 1$ 恰等于 1。下确界与最小值都为 1。这个集合的两个确界均由整数下标处取得；这并不意味着任意有界集合都有最大值和最小值。 ♦

4.5　稠密性：在任意短区间内找点

在 1.414 与 1.4142 之间找有理数，1.4141 就可以；在 -3.1 与 -2.9 之间，-3 可以。可是一旦端点用任意实数表示，不能只靠观察十进制。需要先选足够细的等距网格，再证明其中确有一点严格落在区间内部。

定理 4.12（有理数的稠密性）　若 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x < y$，则存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使 $x < r < y$。

直观理解　把数轴上的整数网格缩小到间距 $1/n$。只要间距比 $y-x$ 小，紧靠 x 右边的第一个网格点就来不及越过 y。图 4.3 将这个「第一个点」标为 m/n；它的存在由整数部分保证。

思路　先用阿基米德性质选 $n > 1/(y-x)$，使网格足够细。再取 $m = \lfloor nx \rfloor + 1$，这是严格大于 nx 的第一个整数。最后把整数部分的上下界一起除以正数 n。

证明　因 $y - x > 0$，可选 $n \in \mathbb{N}$ 使 $1/n < y - x$。令 $m = \lfloor nx \rfloor + 1$，由整数部分定义，

$$nx < m \le nx + 1.$$

所以 $r = m/n$ 为有理数，并有

$$x < \frac{m}{n} \le x + \frac{1}{n} < y.$$

所需的两个严格不等号都成立，结论得证。 ∎

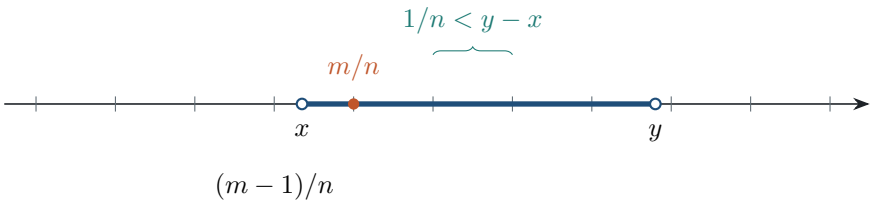


图 4.3　网格间距小于区间长度时，严格位于 x 右侧的第一个网格点仍小于 y。图中横向比例只表达先后次序。

图中即使 x 恰落在网格上，也必须再向右取一个点：用 $\lceil nx \rceil$ 会在 $nx \in \mathbb{Z}$ 时给出端点 x。公式 $\lfloor nx \rfloor + 1$ 统一处理端点是否在网格上的两种情形，因此更适合严格开区间。

■ **例 4.5　短区间内的具体构造**　用上述方法在 $1.414 < x < 1.4142$ 中找到一个有理数，并比较 $n = 1000$ 与 $n = 10000$ 两种网格。

解　区间长为 $0.0002 = 1/5000$。$n = 1000$ 的网格间距 0.001 太大；按公式取 $m = 1415$ 给出 1.415，已经越过右端点。定理并没有保证这个网格可用，因为它不满足 $1/n < y - x$。

改用 $n = 10000 > 5000$，得 $m = \lfloor 14140 \rfloor + 1 = 14141$，所以 $r = 14141/10000 = 1.4141$。直接核对 $1.414 < 1.4141 < 1.4142$。这个例子说明先选网格的步骤承担了保证存在性的工作，后面的取整不能弥补间距过大的问题。 ♦

推论 4.13（无理数的稠密性）　若 $x < y$，则开区间 (x, y) 内也有无理数。

证明　对区间 $(x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2})$ 使用有理数稠密性，选 $r \in \mathbb{Q}$ 使 $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$。令 $z = r + \sqrt{2}$，则 $x < z < y$。若 z 有理，则 $z - r = \sqrt{2}$ 也有理，与第 2 讲矛盾。因此 z 是所需无理数。 ∎

此处没有使用「无理数加无理数仍无理」这个错误说法；真正用的是有理数对减法封闭。比如 $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2$ 就给出两个无理数之和为有理数的反例。构造时把一个已知无理数平移一个有理量，可以保留无理性，也可以将所在区间控制住。

例 4.6　同一短区间中的两类数　说明区间 $(1.414, 1.415)$ 内既有有理数，也有无理数；再说明任意非空开区间内两类数实际上各有无穷多个。

解　有理数可取 $1.4145 = 2829/2000$。无理数可取 $\sqrt{2}$，因为 $1.414^2 = 1.999396 < 2$，$1.415^2 = 2.002225 > 2$，两端均为正，故 $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$。平方比较的合法性依赖正数区间上平方严格递增。

对一般 (x, y)，先取一个有理数 $r_1 \in (x, y)$，再在 (x, r_1) 中取一个 r_2，重复得到严格递减的有理数，因而互不相同。每一步的区间均非空，稠密性保证选点能继续。将「有理」换成「无理」，用推论 4.13 重复同一构造，得到无穷多个无理数。 ♦

想一想　有理数稠密是否意味着每个实数都是有理数？能否因此认为每个非空集合都与 $\mathbb{Q}$ 相交？

答　都不能。稠密性只量化非空开区间。单点集合 $\{\sqrt{2}\}$ 非空，却不含有理数；它也不是非空开区间。对每个 k 都能找到 $r_k \in \mathbb{Q}$ 与 $\sqrt{2}$ 相距小于 $1/k$，并不会让某个 r_k 恰等于 $\sqrt{2}$。任意接近与属于集合是不同的命题。

前后联系　原 Lecture 2 的稠密性证明直接写「取最大的整数」，习题集 3 第 1 题把这一步列为可用事实。本讲先证明整数集最大元，再证明整数部分，补齐了该步骤。下讲处理数列时，每个 $1/k$ 都对应一个精度要求；本讲的取整公式还能把同一个实数写成一列有理近似。

4.6　小数表示与数列：从有限近似到极限

$0.9, 0.99, 0.999$ 都不等于 1；但记号 $0.999\cdots$ 并不表示其中某个特别长的有限小数。要给无限位小数赋予数值，先给出一列有限截断，再说明这列截断趋向哪个实数。这样可以分别检查「每项是多少」与「极限是多少」。

定义 4.14（数列与极限，回顾）　实数列是函数 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，记第 n 项为 a_n。称 a_n 收敛于 $L \in \mathbb{R}$，若对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使对所有 $n \geq N$ 有 $|a_n - L| < \varepsilon$，记作 $a_n \to L$。

例如 $a_n = 1/n$ 收敛到 0：给定 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/\varepsilon$，则 $n \geq N$ 时有 $|a_n| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$。这里的 N 可以依赖 ε，却不能在证明中随着 n 随意改变。下讲会系统讨论定义的否定、极限唯一性与代数法则，本讲先处理原课的三个直接例子和小数问题。

例 4.7　无限循环小数的定义　定义 $a_n = \sum_{j=1}^{n} 9 \cdot 10^{-j}$。证明 $a_n \to 1$，从而说明 $0.999\cdots = 1$ 的严格含义。

解　先求有限和，再估计误差。等比求和给出 $a_n = 1 - 10^{-n}$，因此对每个有限 n 都有 $a_n < 1$，而误差恰为 $1 - a_n = 10^{-n}$。由归纳法有 $10^n > n$：$n = 1$ 成立；若 $10^n > n$，则 $10^{n+1} > 10n \geq n + 1$。给定 $\varepsilon > 0$，选自然数 $N > 1/\varepsilon$。对所有 $n \geq N$，

$$|a_n - 1| = 10^{-n} < 1/n \leq 1/N < \varepsilon.$$

故按定义 $a_n \to 1$。无限小数 $0.999\cdots$ 定义为这些有限截断的极限，因此等于 1。这没有把某一个有限小数强行等同于 1。 ♦

还可以只用确界原理处理同一问题。集合 $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ 非空，且 1 是上界，令 $s = \sup A$。因为 $a_n \leq s \leq 1$，有 $0 \leq 1 - s \leq 1 - a_n = 10^{-n}$。给定任意 $\varepsilon > 0$，刚才的估计可选 n 使 $10^{-n} < \varepsilon$，于是 $1 - s < \varepsilon$。由「任意小即为零」得到 $s = 1$。两个证明都使用同一个误差上界，第二个还清楚展示了完备性确保候选值存在的地方。

没有「最后一位」　将 $1 - 0.999\cdots$ 写成「$0.000\cdots1$」，并没有定义一个实数；无限个小数位之后不存在最后一位。正确的比较应当用有限截断及其误差 10^{-n}，或者用已定义的极限。每个截断有正误差，不代表极限还保留一个正误差。

■ **例 4.8　每个实数的有理截断**　给定 $x \in \mathbb{R}$，令 $q_k = 10^{-k}\lfloor 10^k x \rfloor$。证明 $q_k \in \mathbb{Q}$ 且 $q_k \to x$。对 $x = 1/3$ 和 $x = -1/3$ 写出前三项。

解　整数部分提供误差而不需要预先知道小数展开。由定义

$$\lfloor 10^k x \rfloor \leq 10^k x < \lfloor 10^k x \rfloor + 1,$$

除以正数 10^k，得 $q_k \leq x < q_k + 10^{-k}$，所以 $0 \leq x - q_k < 10^{-k}$。每个 q_k 是整数除以 10^k，故有理。给定 $\varepsilon > 0$，选择 $K > 1/\varepsilon$，则 $k \geq K$ 时 $|q_k - x| < 10^{-k} < 1/k \leq 1/K < \varepsilon$，由定义收敛于 x。

正数情形前三项为 $3/10, 33/100, 333/1000$；负数情形为 $-4/10, -34/100, -334/1000$，因为 $\lfloor -10/3 \rfloor = -4$。此构造选择左侧近似，故与负数小数表示的向零截断不同。公式的好处是所有实数一律满足同一个单侧误差估计。 ♦

■ **例 4.9　有界与收敛的区别**　证明每个收敛实数列有界，并解释为什么 $a_n = (-1)^n$ 不收敛。这个例子对应原 Lecture 4 的有界性定理。

解　设 $a_n \to L$。先控制尾部，再把有限多个开头并入同一个界。取 $\varepsilon = 1$，存在 N 使 $n \geq N$ 时 $|a_n - L| < 1$，故 $|a_n| \leq |L| + |a_n - L| < |L| + 1$。令

$$B = \max\{1, |L| + 1, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|\}.$$

当 $N = 1$ 时删去没有的前项即可。对所有 n 都有 $|a_n| \leq B$，所以数列有界。这里的界允许比所有项都大，完全不要求它恰好为最大项。

$(-1)^n$ 的所有项都位于 $[-1,1]$，所以有界。若它收敛于 L，取 $\varepsilon = 1/2$，则某个 N 之后的所有项都与 L 距离小于 $1/2$。选一个不小于 N 的奇数下标与一个不小于 N 的偶数下标，得到 $|-1-L|<1/2$、$|1-L|<1/2$。三角不等式便给出

$$2 = |1-(-1)| \le |1-L| + |L-(-1)| < 1,$$

矛盾，故不收敛。这个反例否定的是「有界推出收敛」，并未否定刚证明的反向命题。 ♦

原 Lecture 4 后半还给出极限的四则运算与子列。本书按既有安排将四则运算的完整证明集中在第 5 讲，将子列与 Bolzano–Weierstrass 定理集中在第 7 讲。它们会反复使用这里的两项工具：阿基米德性质提供精度下标，有界性把变化的因子统一控制住。

本讲小结

- 实数的完备性保证有上界的非空集合有上确界；下确界由 $\inf A = -\sup(-A)$ 得到。
- 阿基米德性质给出 $n > x$、$1/n < \varepsilon$ 与 $nu > v$ 的整数选择；严格不等号不能换成等号。
- $d \ge 0$ 且对每个正精度均有 $d < \varepsilon$，则 $d = 0$；「每个」不能换成有限次核对。
- 整数部分满足 $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$，负数同样向下取整。
- 选 $1/n < y - x$，再取 $m = \lfloor nx \rfloor + 1$，可得 $x < m/n < y$；有理数与无理数都稠密。
- 小数截断 $q_k = 10^{-k}\lfloor 10^k x \rfloor$ 满足 $0 \le x - q_k < 10^{-k}$；$0.999\cdots$ 的截断为 $1 - 10^{-n}$，故极限为 1。
- 收敛数列有界，因为尾部可统一估计而开头只有有限项；$(-1)^n$ 说明有界性本身不保证收敛。

练习

4.1 ★ 判断真假，假的给反例：(a) 每个有序域都满足阿基米德性质；(b) 阿基米德有序域都完备；(c) 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $0 \le d < 1/n$ 的实数 d 必为 0；(d) 若 $x < y$，必有整数严格位于二者之间。

4.2 ★ 求 $\lfloor 17/5 \rfloor$、$\lfloor -17/5 \rfloor$。证明对任意实数 x，$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ 只能为 0 或 -1，并说明何时取每个值。

4.3 ★ 找出一个有理数严格位于 $22/7$ 与 3.144 之间，用分数交叉相乘核对。再按定理给出一个适用的网格间距。

4.4 ★ 设 $a_n = n/(n+1)$。只用极限定义证明 $a_n \to 1$；当 $\varepsilon = 1/100$ 时，给出一个可用的 N，并检查严格不等号。

4.5 ★★ 若实数 a, b 满足对每个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $a \le b + 1/n$，证明 $a \le b$。说明为什么只对 $n \le 1000$ 验证不够。

4.6 ★★ 设 $x < y$。用本讲的方法证明 (x, y) 内有无穷多个有理数，并进一步找到两个有理数 r, s，使 $x < r < s < y$。

4.7 ★★ 给定 $\varepsilon>0$，证明存在正整数 n，使 $0<\sqrt{2}/n<\varepsilon$。据此给出任意 (x,y) 中一个无理数的另一种构造：先选 $r\in\mathbb{Q}\cap(x,y)$，再选 n。

4.8 ★★ 对 $x\in\mathbb{R}$ 定义 $q_k=10^{-k}\lfloor 10^k x\rfloor$。证明 $q_k\le q_{k+1}\le x$，并给出 $x-q_k$ 的严格上界。说明这为有理数逼近实数提供了怎样的精度保证。

4.9 ★★★ 设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 非空且有上界，$s=\sup E$。对每个 $n\in\mathbb{N}$ 选择 $a_n\in E$ 使 $s-1/n<a_n\le s$，证明这样的选择存在且 $a_n\to s$。这是否保证 $s\in E$？（习题集 3 第 3 题。）

4.10 ★★★ 证明对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 有 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\le\lfloor x+y\rfloor\le\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$。再解释为什么 $0.24999\cdots=0.25$，从而 $0.2+0.4999\cdots=0.7$；无限小数必须以截断极限解释。

练习答案与提示

4.1 (a) 假，按最终符号排序的 $\mathbb{R}(X)$ 内，形式变量 X 大于每个常数自然数。(b) 假，$\mathbb{Q}$ 满足阿基米德性质，但平方逼近 2 的集合没有有理上确界。(c) 真，若 $d>0$，选 $n>1/d$ 就与 $d<1/n$ 矛盾。(d) 假，$(1/10,1/5)$ 内没有整数，因为其中数均严格位于 0 与 1 之间；但有理数 $3/20$ 在其中。

4.2 两个整数部分分别为 $3,-4$。令 $m=\lfloor x\rfloor$。若 $x=m$ 为整数，$\lfloor -x\rfloor=-m$，和为 0。若 $m<x<m+1$，取负得 $-m-1<-x<-m$，故 $\lfloor -x\rfloor=-m-1$，和为 -1。两个情形穷尽所有实数。

4.3 可取 $3143/1000$：$3143\cdot 7=22001>22000=22\cdot 1000$，且 $3143<3144$。区间长度为 $3.144-22/7=1/875$，故可取 $n=1000>875$，网格间距 $1/1000$ 小于区间长度。按公式 $m=\lfloor 1000\cdot 22/7\rfloor+1=3143$，正好得到上述有理数。

4.4 误差 $|a_n-1|=1/(n+1)$。给定 $\varepsilon>0$，取 $N>1/\varepsilon$，则 $n\ge N$ 时 $1/(n+1)<1/N<\varepsilon$。当 $\varepsilon=1/100$ 时，取 $N=100$ 也已可用，因为 $n+1\ge 101$，故 $1/(n+1)\le 1/101<1/100$；阈值不要求最小。

4.5 若 $a>b$，取自然数 $n>1/(a-b)$，则 $1/n<a-b$，从而 $b+1/n<a$，与条件矛盾。故 $a\le b$。只验证到 1000，取 $a=b+1/2000$ 就能通过所有这些有限检查，却仍有 $a>b$。

4.6 先在 (x,y) 取有理数 s，再在 (x,s) 取有理数 r，即得两个点。继续在 (x,r) 内选点，每次都严格小于已选的点，因此得到互异的有理数。每一步存在性由定理 4.12 保证，无需预先假设区间内已经有无穷多点。

4.7 对 $\sqrt{2}/\varepsilon$ 使用阿基米德性质，选 $n>\sqrt{2}/\varepsilon$，则 $0<\sqrt{2}/n<\varepsilon$。取 $r\in\mathbb{Q}\cap(x,y)$ 后，对正数 $y-r$ 使用前一步，选 n 使 $\sqrt{2}/n<y-r$。于是 $z=r+\sqrt{2}/n$ 满足 $x<r<z<y$。若 z 有理，则 $n(z-r)=\sqrt{2}$ 有理，矛盾。因此 z 无理。

4.8 记 $m_k=\lfloor 10^k x\rfloor$。由 $m_k\le 10^k x$ 得 $10m_k\le 10^{k+1}x$，左边为整数，故 $10m_k\le\lfloor 10^{k+1}x\rfloor$。除以 10^{k+1}，得 $q_k\le q_{k+1}$；而 $q_{k+1}\le x$ 来自定义。本讲已证 $0\le x-q_k<10^{-k}$，所以保留 k 个十进制网格位，绝对误差严格小于 10^{-k}。单调性帮助理解近似方向，收敛证明本身仍可直接用误差界完成。

4.9 因为 $s-1/n<s$，它不可能是上界，故存在 $a_n\in E$ 大于 $s-1/n$；s 为上界又给 $a_n\le s$。给定 $\varepsilon>0$，选 $N>1/\varepsilon$，则 $n\ge N$ 时 $|a_n-s|=s-a_n<1/n\le 1/N<\varepsilon$，故 $a_n\to s$。这不保证 $s\in E$：取 $E=(0,1)$，则 $s=1\notin E$，例如 $a_n=1-1/(n+1)$ 就是集合内趋向 s 的一列。

4.10 令 $m=\lfloor x\rfloor$、$n=\lfloor y\rfloor$，则 $m+n\le x+y<m+n+2$。由整数部分的最大性，$m+n\le\lfloor x+y\rfloor<m+n+2$；中间的数为整数，所以至多为 $m+n+1$，即得所求。

对 $k\ge 1$，$0.24999\cdots$ 截断到小数点后第 $k+2$ 位得到 $u_k=0.25-10^{-(k+2)}$；$0.4999\cdots$ 截断到第 $k+1$ 位得到 $v_k=0.5-10^{-(k+1)}$。两列误差均小于 10^{-k}，由本节已证的误差估计，$u_k\to 0.25$、$v_k\to 0.5$，故两个无限小数分别等于这两个数。再由 $|(0.2+v_k)-0.7|=10^{-(k+1)}$ 得极限为 0.7。

第 5 讲

数列与极限

Sequences and Limits

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 4 讲义（数列、极限的定义、$0.999\cdots=1$、收敛数列有界、极限的四则运算、子列）与 Lecture 5 讲义前半（四则运算的陈述、$\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\to 1$、子列的形式定义、$\sqrt{2}$ 的十进制逼近）；习题集 1 第 3(4) 题，习题集 2 第 1–4 题。Lecture 5 后半的单调收敛定理与柯西列放在第 6 讲。

本讲目标

(1) 把数列看成函数 $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，分清「数列」和「数列的值的集合」。

(2) 读懂、会写极限的 ε–N 定义：先打草稿找 N，再正向写证明；会写定义的否定，用它证明发散。

(3) 证明极限唯一、收敛数列有界，并知道这两条各自能推出什么。

(4) 完整证明极限的四则运算法则，会用它们求有理式数列的极限，并知道「拆开求极限」什么时候不合法。

(5) 掌握极限的保序性和夹逼定理，知道严格不等式取极限后会变成非严格不等式。

(6) 理解子列的定义 $n_1<n_2<\cdots$，证明「收敛 $\iff$ 每个子列都收敛到同一极限」，会用两个子列证明发散。

5.1 从十进制小数说起：什么是数列

第 3 讲用上确界证明了存在 $\alpha>0$ 使 $\alpha^2=2$：取 $A=\{\,x>0\mid x^2\le 2\,\}$，令 $\alpha=\sup A$。这个证明说明 $\sqrt{2}$ 存在，却没有告诉我们它大约是多少。实际上我们认识 $\sqrt{2}$ 的方式是它的十进制展开：

$$1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad 1.4142,\quad 1.41421,\quad \ldots$$

每一项比上一项多一位小数，越来越「接近」$\sqrt{2}$。另一个熟悉的例子是

$$0.9,\quad 0.99,\quad 0.999,\quad 0.9999,\quad \ldots$$

第 4 讲已经把无限小数定义为有限截断的极限，并证明 $0.999\cdots=1$。本讲从这些熟悉的数列出发，系统整理「一串数」与「极限」的定义，再用统一的误差语言核对这个等式（例 5.2）。左侧每个有限截断都小于 1，它们的极限仍可等于 1；区分单项与极限，正是后面保序结论的要点。

定义 5.1（数列） 实数列（sequence of real numbers）是一个函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$。通常记 $a_n=f(n)$，称 a_n 为数列的第 n 项（term），整个数列记作 (a_n)、$(a_n)_{n\ge 1}$ 或 $a_1,a_2,a_3,\dots$。

本课程约定 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$，所以数列从第 1 项开始。有时为了方便也从 a_0 或 a_5 开始，这不影响任何结论。下面是几个贯穿全讲的例子：

- $a_n=\dfrac{1}{n}$：$1,\ \frac12,\ \frac13,\ \frac14,\dots$，越来越小，但总是正的。
- $a_n=(-1)^n$：$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\dots$，在 -1 与 1 之间来回跳。
- $a_n=n$：$1,2,3,\dots$，没有上界。
- $a_n=c$（常数列）：$c,c,c,\dots$。
- $\sqrt{2}$ 的十进制截断：$a_1=1$，$a_2=1.4$，$a_3=1.41,\dots$（§5.5 给出精确定义）。

数列不是集合　数列 (a_n) 是函数，它记录了每一项的位置；而 $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ 是它的值的集合。$a_n=(-1)^n$ 的值的集合只有两个元素 $\{-1,1\}$，数列却有无穷多项。数列 $1,-1,1,-1,\dots$ 与 $-1,1,-1,1,\dots$ 的值的集合相同，却是两个不同的数列；数列 $1,1,-1,1,1,-1,\dots$ 的值的集合也一样。原讲义里「$\{a_n\}$ 有界」指的是值的集合有界，本讲义写作「数列 (a_n) 有界」。

5.2　极限的 ε–N 定义

5.2.1　「越来越接近」为什么不够

说 $\frac1n$ 趋于 0，直觉上的理由是「它越来越接近 0」。可是 $\frac1n$ 也越来越接近 -1：第 n 项到 -1 的距离是 $1+\frac1n$，一项比一项小。没有人认为 $\frac1n$ 趋于 -1。两者的区别在于：到 0 的距离 $\frac1n$ 可以任意小，到 -1 的距离却永远大于 1。另外，趋于一个数不必从同一侧靠近：数列 $1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 在 1 的两侧来回摆动（图 5.1），我们仍然希望说它趋于 1。

所以「趋于 a」的准确含义应该是：无论要求多接近 a，从某一项以后的所有项都能做到这么接近。把「要求多接近」记作 ε，把「从某一项以后」记作 $n\ge N$，就得到下面的定义。

定义 5.2（数列的极限）　设 (a_n) 是实数列，$a\in\mathbb{R}$。如果对每个 $\varepsilon>0$，都存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n\ge N$ 时

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

就说 (a_n) 收敛（converges）到 a，称 a 为数列的极限（limit），记作 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a$。存在极限的数列称为收敛数列（convergent sequence），不收敛的数列称为发散（divergent）的。

不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 等价于 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$，即 a_n 落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 里。把数列画成平面上的点 (n,a_n)，这个区间就是一条以直线 $y=a$ 为中心、宽 2ε 的水平带子。定义说的是：不管带子多窄，从某个 N 起，所有点都在带子里。N 之前的点可以在任何地方，但它们只有有限个。

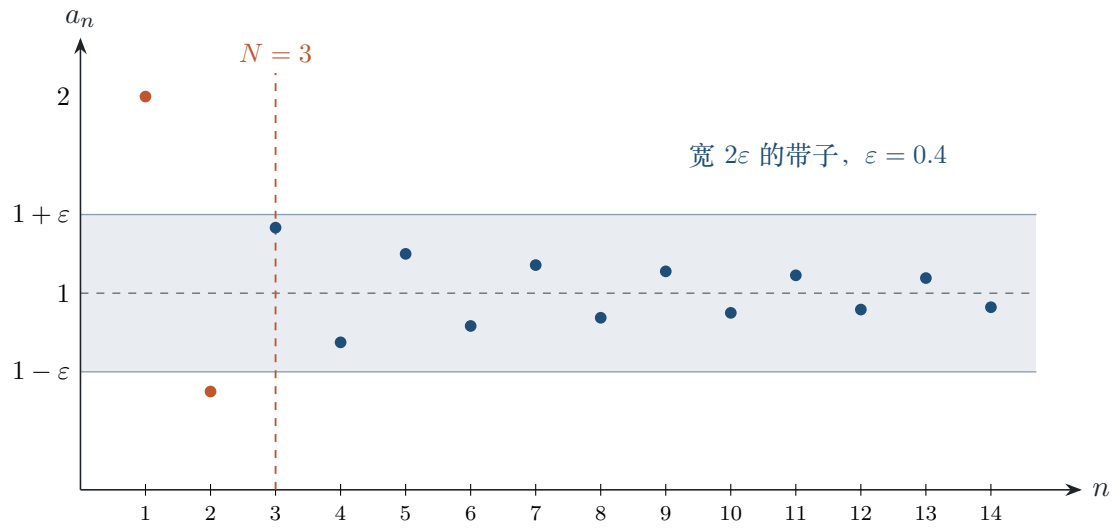


图 5.1　数列 $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 与 $\varepsilon = 0.4$ 的带子。橙色的 a_1, a_2 在带子外，从 $N = 3$ 起全部（蓝色）在带子里。若把 ε 缩小到 0.1，需要 $\frac{1}{n} < 0.1$，即从 $N = 11$ 起。

把定义看成一场游戏　怀疑者先出一个误差 $\varepsilon > 0$，你来回答一个 N；只要 $n \geq N$ 的每一项都满足 $|a_n - a| < \varepsilon$，你就赢了这一轮。「$a_n \to a$」的意思是：**无论怀疑者出多小的 ε，你都有必胜的回答**。所以 N 是在看到 ε 之后才选的，ε 越小，N 一般越大。证明收敛，就是给出一个由 ε 算出 N 的办法。

注 5.1　定义里的几处细节可以放宽，得到的概念不变：把 $< \varepsilon$ 换成 $\leq \varepsilon$（若对每个 ε 都能做到 $\leq \varepsilon$，那么对 $\frac{\varepsilon}{2}$ 也能做到，于是 $\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$）；把 ε 换成 $C\varepsilon$，其中 $C > 0$ 是固定常数（ε 取遍所有正数时，$C\varepsilon$ 也取遍所有正数）；允许 N 是实数（取不小于它的整数即可）。后面的证明会随手使用这些变形。

5.2.2　用定义证明收敛

■ 例 5.1　证明 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$。

解　任给 $\varepsilon > 0$。由阿基米德性质（第 4 讲），存在 $N \in \mathbb{N}$ 使 $N > \frac{1}{\varepsilon}$，即 $\frac{1}{N} < \varepsilon$。于是当 $n \geq N$ 时

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

按定义，$\frac{1}{n} \to 0$。例如 $\varepsilon = 0.01$ 时，N 必须大于 100，取 $N = 101$。$N = 100$ 不行：$\frac{1}{100} < 0.01$ 不成立。 ♦

这个例子用到的正是阿基米德性质的推论「对任意 $\varepsilon > 0$，存在 n 使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$」。换句话说，**阿基米德性质就是「$\frac{1}{n} \to 0$」**。在不满足阿基米德性质的有序域里，这一步会失败。例如把习题集 1 第 4、5 题的定序方式（按 x 充分大时的符号比较大小）用到有理函数域 $\mathbb{R}(x)$ 上，正元素 $\frac{1}{x}$ 比每个 $\frac{1}{n}$ 都小，取 $\varepsilon = \frac{1}{x}$，就没有任何 N 能让 $\frac{1}{n} < \varepsilon$。

■ 例 5.2　$0.999\cdots = 1$　令 $a_1 = 0.9$，$a_2 = 0.99$，$a_3 = 0.999$，一般地 $a_n = 1 - 10^{-n}$。证明

$\lim a_n = 1$，从而 $0.999\cdots = 1$。

解　先算误差：$|a_n - 1| = 10^{-n}$。要让它小于 ε，用一个简单的放大：$10^n > n$ 对所有 $n \geq 1$ 成立（$n = 1$ 时 $10 > 1$；若 $10^n > n$，则 $10^{n+1} = 10 \cdot 10^n > 10n \geq n + 1$），所以 $10^{-n} < \frac{1}{n}$。

任给 $\varepsilon > 0$，由阿基米德性质取 N 使 $\frac{1}{N} < \varepsilon$。当 $n \geq N$ 时

$$|a_n - 1| = 10^{-n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

所以 $a_n \to 1$。按照无限小数的定义，$0.999\cdots$ 就是 $\lim a_n$，因此 $0.999\cdots = 1$。 ♦

「永远差一点」的直觉说的是每一项 a_n 都小于 1，这完全正确；但等式说的是极限等于 1，极限不是数列中的某一项。差距 10^{-n} 最终小于任何给定的正数，这正是极限为 1 的含义。

前两个例子的误差很简单，N 一眼就能看出来。误差复杂时，标准做法是先打草稿、再写证明。

■ **例 5.3**　证明 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$。

解　草稿：从结论往回推。化简误差：

$$\left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2(n+3)}{n+3}\right| = \frac{5}{n+3}.$$

要让 $\frac{5}{n+3} < \varepsilon$，可以精确解出 $n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$；但更省事的办法是先放大成简单的式子：$\frac{5}{n+3} < \frac{5}{n}$，只要 $\frac{5}{n} < \varepsilon$，即 $n > \frac{5}{\varepsilon}$ 就够了。放大会让 N 偏大，但定义只要求存在一个 N，不要求最小。

证明：从 N 往前推。任给 $\varepsilon > 0$。由阿基米德性质取整数 $N > \frac{5}{\varepsilon}$。当 $n \geq N$ 时

$$\left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| = \frac{5}{n+3} < \frac{5}{n} \leq \frac{5}{N} < \varepsilon.$$

所以 $\frac{2n+1}{n+3} \to 2$。 ♦

表 5.1 比较了证明中取的 N 与真正最小的 N（满足「$n \geq N$ 时误差 $< \varepsilon$」的最小整数，由 $\frac{5}{n+3} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$ 算出）。两者只差 3 左右，而且都随 ε 缩小十倍而增大约十倍。

ε	证明中取的 N（$N > \frac{5}{\varepsilon}$）	最小的 N	验证：$\lvert a_N - 2\rvert = \frac{5}{N+3}$
0.1	51	48	$\frac{5}{51} \approx 0.0980 < 0.1$
0.01	501	498	$\frac{5}{501} \approx 0.00998 < 0.01$
0.001	5001	4998	$\frac{5}{5001} \approx 0.000\,9998 < 0.001$

表 5.1　例 5.3 中 N 与 ε 的关系。最后一列验证的是最小的 N。

写 ε–N 证明的两步

(1) **草稿（倒着想）**：化简 $|a_n - a|$，把它放大成一个简单的、随 n 增大而趋于 0 的式子，例如 $\frac{C}{n}$；由「简单式子 $< \varepsilon$」解出 n 需要多大。

(2) **证明（正着写）**：「任给 $\varepsilon > 0$，取 $N = \ldots$。当 $n \geq N$ 时，$|a_n - a| \leq \cdots < \varepsilon$。」草稿里的推导顺序和证明里的顺序正好相反。

5.2.3 发散：定义的否定

要证明数列不收敛到 a，需要写出定义的否定。把「对每个」换成「存在」，「存在」换成「对每个」，最后的不等式取反：

$$a_n \not\to a \iff \text{存在}\varepsilon_0 > 0,\ \text{使得对每个}N \in \mathbb{N},\ \text{都存在}n \geq N\ \text{满足}|a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

换成带子的语言：存在某条固定宽度的带子，无论从哪一项往后看，总有点跑到带子外面，也就是说有无穷多项在带子外。数列发散，是指这件事对每个实数 a 都成立。

■ **例 5.4**　证明 $a_n = (-1)^n$ 发散。

解　用反证法。设 $a_n \to a$。取 $\varepsilon = 1$，则存在 N，使 $n \geq N$ 时 $|(-1)^n - a| < 1$。在 $n \geq N$ 中取一个偶数 n 和一个奇数 n，分别得到 $|1 - a| < 1$ 与 $|-1 - a| < 1$。由三角不等式

$$2 = |1 - (-1)| \leq |1 - a| + |a - (-1)| < 1 + 1 = 2,$$

得到 $2 < 2$，矛盾。所以 $(-1)^n$ 不收敛到任何实数。 ♦

这里取 $\varepsilon = 1$ 的原因是：一条宽度 $2\varepsilon = 2$ 的开带子装不下相距为 2 的两个点 1 与 -1。任何 $\varepsilon \leq 1$ 都可以，$\varepsilon > 1$ 则不行。

量词的顺序　定义是「$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$：$|a_n - a| < \varepsilon$」。常见错误有两种。

- 让 N 依赖于 n：「对每个 n，取 $N = n$」毫无意义，N 只能依赖 ε（以及数列本身）。
- 把顺序换成「$\exists N\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N$」：这要求一个 N 对所有 ε 都管用，于是 $n \geq N$ 时 $|a_n - a|$ 小于每个正数，只能等于 0。换序后的条件说的是「数列从某项起恒等于 a」，比收敛强得多，$\frac{1}{n}$ 就不满足。

另外，「有无穷多项落在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 里」也不等于收敛：$(-1)^n$ 有无穷多项等于 1，却不收敛到 1。收敛要求的是从某项起的所有项。

想一想　把数列 $\frac{1}{n}$ 的前 100 项都改成 5，得到的数列还收敛吗？极限是多少？一般地，改动数列的有限项会影响收敛性吗？

答　仍收敛到 0。对给定的 ε，原来的 N 若不超过 100，就改用 $N = 101$；从第 101 项起两个数列完全一样。一般地，改动、删去或添加有限项都不改变收敛性和极限，因为定义只关心「从某项起」的项。所以本讲的条件「对所有 n 成立」大多可以放宽为「对充分大的 n 成立」。

5.3　极限唯一，收敛数列有界

定义说「a 是一个极限」，但我们一直在说「那个极限」并写 $\lim a_n = a$。这个记号要合法，必须先证明极限不会有两个。

定理 5.3（极限的唯一性）　若 $a_n \to a$ 且 $a_n \to b$，则 $a = b$。

思路　如果 $a \neq b$，以 a 和 b 为中心各画一条半宽为 $\frac{|a-b|}{2}$ 的带子，两条带子不相交。数列从某项起必须同时待在两条带子里，这不可能。

证明　假设 $a \neq b$，令 $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$。由 $a_n \to a$，存在 N_1 使 $n \geq N_1$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$；由 $a_n \to b$，存在 N_2 使 $n \geq N_2$ 时 $|a_n - b| < \varepsilon$。取 $n = \max\{N_1, N_2\}$，两式同时成立，于是

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|,$$

矛盾。所以 $a = b$。 ∎

证明中「取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，让两个条件同时成立」是本讲反复出现的手法：两个「从某项起」的条件，总可以从一个共同的项起同时满足。

定义 5.4（有界数列）　若存在 $M > 0$ 使 $|a_n| \leq M$ 对所有 n 成立，就称数列 (a_n) 有界（bounded）。等价地，值的集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 既有上界又有下界。

定理 5.5（收敛数列有界）　收敛数列是有界的。

思路　取 $\varepsilon = 1$：从第 N 项起，所有项都在区间 $(a-1, a+1)$ 里，被 $|a|+1$ 控制住；N 之前只剩有限项，有限个数总有最大值。两部分取较大者。

证明　设 $a_n \to a$。取 $\varepsilon = 1$，存在 N 使 $n \geq N$ 时 $|a_n - a| < 1$，于是

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \qquad (n \geq N).$$

前 $N-1$ 项是有限个数，令 $C = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|\}$（$N = 1$ 时令 $C = 0$）。取 $M = \max\{C,\ |a|+1\}$，则对所有 n 都有 $|a_n| \leq M$。 ∎

关键一步是「有限个数有最大值，无穷个数不一定」。极限把无穷多项（尾巴）压进一个区间，剩下的只有有限个，这正是收敛数列比一般数列好控制的原因。

反过来不成立：$(-1)^n$ 有界（$|(-1)^n| \leq 1$），但例 5.4 证明了它发散。定理 5.5 最常用的形式是它的逆否命题。

推论 5.6　无界数列一定发散。

例如 $a_n = n$ 无界（阿基米德性质说 $\mathbb{N}$ 没有上界），所以发散；$a_n = (-1)^n n$ 满足 $|a_n| = n$，也无界，所以发散。再如 $a_n = \frac{n^2}{n+1}$：因为 $n+1 \le 2n$，有 $a_n \ge \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$，所以无界，发散。

数列	有界?	收敛?	理由
$\frac{1}{n}$	是	是，极限 0	例 5.1
$(-1)^n$	是	否	例 5.4
n	否	否	推论 5.6

表 5.2　「收敛 $\Rightarrow$ 有界」的逆命题不成立。不存在「收敛但无界」的数列。

表 5.2 的三个例子把可能性分清了。证明乘积极限时，有界性将提供一个与下标无关的常数，避免误差估计中的另一个因子不断变大。

5.4　极限的四则运算：把误差分开控制

$a_n = 1 + 1/n$ 与 $b_n = 2 - 1/n$ 分别趋于 $1, 2$，它们的和恒为 3，乘积为 $2 + 1/n - 1/n^2$。计算让我们猜想，极限与加法、乘法可以交换；要把猜想变成定理，必须证明每个给定精度都能同时满足。

定理 5.7（极限的四则运算法则）　设 $a_n \to a$、$b_n \to b$，$C \in \mathbb{R}$。则

$$Ca_n \to Ca, \quad a_n + b_n \to a + b, \quad a_n b_n \to ab.$$

若另有 $b \neq 0$，则 b_n 从某项起非零，且从该项起定义的商满足 $a_n / b_n \to a/b$。若要求商数列从第 1 项起有定义，还须对每个 n 有 $b_n \neq 0$。

思路　常数倍直接调整精度；加法把总误差分给两个输入；乘法先添减一项，把乘积误差变成两个差，再用有界性控制变化的系数。除法先证倒数极限，关键是分母从某项起与 0 保持固定的正距离。

证明　第一步：常数倍。若 $C = 0$，则 $Ca_n = 0 = Ca$，误差恒为零。若 $C \neq 0$，给定 $\varepsilon > 0$，由 $a_n \to a$，取 N 使 $n \ge N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon / |C|$。于是

$$|Ca_n - Ca| = |C|\,|a_n - a| < \varepsilon.$$

这也证明了取负号的法则，取 $C = -1$ 即可。

第二步：加法。任给 $\varepsilon > 0$，分别取 N_1, N_2，使 $n \ge N_1$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon/2$，$n \ge N_2$ 时 $|b_n - b| < \varepsilon/2$。取 $N = \max\{N_1, N_2\}$。当 $n \ge N$ 时，由三角不等式

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

减法就是加上 $(-b_n)$，故 $a_n - b_n \to a - b$。

第三步：乘法。由定理 5.5，存在固定 $M \geq 1$，使对所有 n 有 $|a_n| \leq M$。添减 $a_n b$，得到

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b + a_n(b_n - b).$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 N_1, N_2 使相应尾部满足

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

当 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时，

$$|a_n b_n - ab| \leq |b|\,|a_n - a| + M|b_n - b| < \frac{|b|\varepsilon}{2(|b|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

分母里写 $|b|+1$，即使 $b = 0$ 也有意义；M 先固定，再按它选择精度，因此 N 没有反过来依赖正在变化的 a_n。

第四步：倒数与商。设 $b \neq 0$。先对精度 $|b|/2 > 0$ 使用 $b_n \to b$，取 N_0，使 $n \geq N_0$ 时 $|b_n - b| < |b|/2$。反三角不等式给出

$$|b_n| \geq |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2} > 0.$$

所以尾部的倒数都有定义，且它们的分母不能任意接近零。给定 $\varepsilon > 0$，再取 N_1，使 $n \geq N_1$ 时 $|b_n - b| < \varepsilon |b|^2/2$。于是 $n \geq \max\{N_0, N_1\}$ 时，

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n|\,|b|} \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \varepsilon.$$

从而 $1/b_n \to 1/b$。把已证的乘法法则用于 a_n 与 $1/b_n$，得到商的结论。最初的有限个分母若为零，可以从 N_0 起讨论，或把这些有限项另行赋值；有限修改不改变尾部的极限。 ■

「分别求极限」的前提　四则法则要求输入极限先存在；商还要求分母极限非零。例如 $a_n = b_n = (-1)^n$ 都发散，乘积却恒为 1，不能从乘积收敛倒推出两个因子收敛。又 $a_n = b_n = 1/n$ 都趋于零，商恒为 1；把它写成「0/0」并不能计算极限。

■ **例 5.5**　**原 Lecture 5 的有理式**　求 $a_n = (n^2+1)/(n^2+n+1)$ 的极限，并直接用定义核对。

解　分子分母同除以 n^2：

$$a_n = \frac{1 + 1/n^2}{1 + 1/n + 1/n^2}.$$

由 $1/n \to 0$ 与乘法法则，$1/n^2 \to 0$，上下两部分均趋于 1，分母极限非零，故商趋于 1。例如 $n = 1, 2, 10, 100$ 时的值依次为 $2/3, 5/7, 101/111, 10001/10101$。

直接证明时，$|a_n - 1| = n/(n^2+n+1) < 1/n$。任给 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/\varepsilon$，则 $n \geq N$ 时误差小于 $1/n \leq 1/N < \varepsilon$。两种方法给出同一结论：法则简化计算，定义说明为什么误差能受控。 ♦

■ **例 5.6**　**先化简，再求极限，习题集 2 第 2(1) 题**　求 $c_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$ 的极限。

解　两项各自无界，不能用两个实数极限作减法。先在每个有限 n 处化简：

$$\frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}, \qquad \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n},$$

故 $c_n = -1 + 1/(n+1) - 1/n = -1 - 1/[n(n+1)] \to -1$。误差 $1/[n(n+1)] < 1/n$，也可直接取 $N > 1/\varepsilon$ 完成定义证明。$n = 1, 2$ 时为 $-3/2, -7/6$，与从 -1 下方逼近的方向一致。 ♦

5.5　保序与夹逼：不用知道中间项的精确值

$1/n > 0$ 对每一项都成立，极限却是 0。所以逐项严格不等式不能原样传到极限；能够保留的是非严格次序。另一个方向也有用：若极限本身严格为正，那么足够靠后的项一定为正。

命题 5.8（极限的保序性与最终正性）　设 $a_n \to a$、$b_n \to b$。若从某项起 $a_n \le b_n$，则 $a \le b$。若 $a > 0$，则从某项起 $a_n > a/2 > 0$。

证明　若 $a > b$，取 $\varepsilon = (a-b)/3 > 0$。在一个共同尾部上，同时有 $a_n > a - \varepsilon$、$b_n < b + \varepsilon$ 及 $a_n \le b_n$，于是

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon,$$

推出 $a - b < 2\varepsilon = 2(a-b)/3$，与 $a - b > 0$ 矛盾。因此 $a \le b$。若 $a > 0$，对精度 $a/2$ 使用定义，尾部上 $|a_n - a| < a/2$，于是 $a_n > a - a/2 = a/2 > 0$。 ■

定理 5.9（夹逼定理）　设 $u_n \to L$、$v_n \to L$，且从某项起 $u_n \le a_n \le v_n$，则 $a_n \to L$。

思路　不必先证明中间数列有极限。直接让两边同时落入 L 的精度区间，再用逐项次序把中间项也放进去。

证明　任给 $\varepsilon > 0$。取 N_1, N_2，使 $n \ge N_1$ 时 $|u_n - L| < \varepsilon$，$n \ge N_2$ 时 $|v_n - L| < \varepsilon$。再设夹逼关系在 $n \ge N_0$ 时成立。取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$，则 $n \ge N$ 时

$$L - \varepsilon < u_n \le a_n \le v_n < L + \varepsilon.$$

故 $|a_n - L| < \varepsilon$，正是 $a_n \to L$ 的定义。 ■

夹逼两端必须趋于同一个极限。$-1 \le (-1)^n \le 1$ 的两端分别趋于 $-1, 1$，不能据此断定中间收敛。这也说明「把所有项装进一个固定区间」仅仅是有界，还缺少区间宽度趋于零的控制。

■ **例 5.7　振荡可以由趋零的振幅控制**　求 $\sin n/n$ 的极限（习题集 2 第 2(2) 题）。

解　使用熟悉的三角函数基本界 $|\sin n| \le 1$，有

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

两端均趋于 0，故夹逼定理给出中间也趋于 0。直接估计则是 $|\sin n/n| \le 1/n$。整个证明无需判断 $\sin n$ 自身是否收敛，更不能未经证明把它的「极限」与 $1/n$ 的极限相乘。 ♦

■ **例 5.8　项数也随下标变化的和，习题集 2 第 2(3) 题**　求 $s_n = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^6 + j}}$ 的极限。

解　不能把有限和的逐项极限法则直接套到项数增加的和上。例如每个 $1/n$ 趋于零，n 个 $1/n$ 的和却恒为 1。这里先给每一项统一的上下界。因为 $1 \le j \le n$，

$$n^6 \le n^6 + j \le n^6 + n,$$

对正数开方、取倒数并乘 n^2，得

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} \le \frac{n^2}{\sqrt{n^6+j}} \le \frac{1}{n}.$$

把 n 项的界相加，得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^{-5}}} \le s_n \le 1.$$

为避免提前调用开方函数的连续性，直接有理化左端的误差：对 $t \ge 0$，

$$0 \le 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} = \frac{t}{\sqrt{1+t}\,(\sqrt{1+t}+1)} \le \frac{t}{2}.$$

取 $t = n^{-5}$，得到 $0 \le 1 - s_n \le 1/(2n^5) \to 0$，所以 $s_n \to 1$。这里先估计整体误差，避免把变化的项数漏掉。 ♦

■ **例 5.9　按原课下标定义 $\sqrt{2}$ 的十进制截断**　令 b_n 为满足 $b_n^2 \le 2 \cdot 10^{2n-2}$ 的最大非负整数，令 $a_n = b_n/10^{n-1}$。证明 $a_n \to \sqrt{2}$。

解　先检查最大整数存在：0 满足条件，而满足条件的非负整数均不超过 $2 \cdot 10^{n-1}$，因此候选有限非空。最大性给出

$$b_n^2 \le 2 \cdot 10^{2n-2} < (b_n+1)^2.$$

由第 3 讲已知的正平方根存在性与非负数平方保序，除以正数 10^{2n-2} 并比较平方，得

$$a_n \le \sqrt{2} < a_n + 10^{1-n}, \qquad 0 \le \sqrt{2} - a_n < 10^{1-n}.$$

误差右端趋于零，故 $a_n \to \sqrt{2}$。前六项恰为 $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421$。注意从 a_1 开始，误差界是 10^{1-n}，而非 10^{-n}。

原 Lecture 5 还以这列数说明单调收敛定理的用法；该证明放到第 6 讲。此处利用已经建立的 $\sqrt{2}$ 存在性直接估计，目的在于把十进制逼近与本讲极限定义准确接上。 ♦

5.6　子列：按递增下标抽取

$(-1)^n$ 中的偶数项全为 1，奇数项全为 -1。把其中一类单独抽出来，就得到更简单的数列。抽取必须保留原来的先后顺序，而且必须选出无穷多项；原来的数值可以重复，下标却不能重复。

> **定义 5.10（子列）**　设 (a_n) 为数列，$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 严格递增，则 $b_k = a_{g(k)}$ 称为它的子列 (subsequence)。常写 $n_k = g(k)$，即 $b_k = a_{n_k}$，其中 $n_1 < n_2 < \cdots$。

图 5.2 把 $a_n = (-1)^n$ 的偶数项抽取出来。顶行标的是原下标，底行标的是抽取后的新下标。$n_k = 2k$ 描述了两种下标之间的对应。

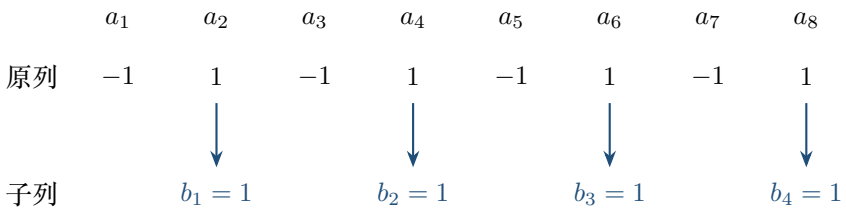


图 5.2　原列 $a_n = (-1)^n$ 抽取偶数下标 $n_k = 2k$，得到常数子列 $b_k = 1$。重复出现的数值 1 来自不同下标。

原 Lecture 4 的其他例子也能直接写出下标：奇数项 $n_k = 2k-1$ 给出常数 -1；取 $n_k = k+1$ 给出 $1, -1, 1, -1, \ldots$。而 $1, 1, -1, -1, \ldots$ 也确实是子列，例如按原下标 $2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, \ldots$ 取项。

若原列是 $a_n = n$，奇数列 $1, 3, 5, \ldots$ 与偶数列 $2, 4, 6, \ldots$ 仍是子列；$1, 1, 2, 2, \ldots$ 则不是，因为第二个数值 1 只能再次使用原下标 1，违反下标严格递增。判断是否为子列，必须同时看原列，不能只看新列是否重复。

定理 5.11（收敛与子列）　$a_n \to a$ 当且仅当它的每个子列均收敛到 a。

证明　先证正向。严格递增的正整数下标满足 $n_k \geq k$：$n_1 \geq 1$，而 $n_{k+1} \geq n_k + 1$，归纳即可。任给 $\varepsilon > 0$，由 $a_n \to a$ 取 N 使 $n \geq N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$。当 $k \geq N$ 时，$n_k \geq k \geq N$，所以 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$，证明子列也趋于 a。

反向中，取 $n_k = k$，原列本身就是一个子列。若每个子列均趋于 a，这个子列也趋于 a，故原列收敛。这里的「每个子列」不能换成「某个子列」。 ■

■ **例 5.10　两个简单子列揭示不同情况**　对 $a_n = \sin(n\pi/8)$ 与 $c_n = (-1)^n n$，分别找单调子列及收敛子列，能找到时写明下标（习题集 2 第 4 题）。

解　对第一列，取 $n_k = 16k$，则 $a_{n_k} = \sin(2k\pi) = 0$，是常数列，既单调又收敛。取 $m_k = 16k + 4$，又得到恒为 1 的子列。因此原列不收敛：若它收敛，每个子列应趋于同一极限，但这两个子列的极限分别为 $0, 1$。

对第二列，偶数项 $c_{2k} = 2k$ 严格递增，奇数项 $c_{2k-1} = -(2k-1)$ 严格递减，它们都是单调子列。然而不存在收敛到实数的子列。对任意递增下标 n_k，都有 $|c_{n_k}| = n_k \geq k$，故这个子列无界，由推论 5.6 发散。单调本身不足以保证有限极限；第 6 讲会补上相应的有界条件。 ♦

想一想　数列有两个收敛子列，就能说它不收敛吗？如果奇数项子列、偶数项子列都趋于同一个 L 呢？

答　只有两个子列的极限不同时，才能立即否定原列收敛。若奇偶子列均趋于 L，原列确实趋于 L：给定 ε，取 K 让两个子列在新下标 $k \geq K$ 时误差都小于 ε；对 $n \geq 2K$，不论奇偶，它在相应子列中的下标均不小于 K，所以误差小于 ε。至于随便挑出的两个子列，即使它们极限相同，也可能遗漏原列中的另一类项。

命题 5.12（何时能抽出趋向给定点的子列）　对实数 L，存在 $a_{n_k} \to L$，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，都有无穷多个下标 n 满足 $|a_n - L| < \varepsilon$。

思路　正向从收敛子列的尾部得到无穷多个互异下标。反向让第 k 次选择满足误差 $< 1/k$，并且下标大于上次；「无穷多个下标」保证有限的旧下标永远挡不住下一次选择。

证明　若 $a_{n_k} \to L$，给定 $\varepsilon > 0$，某个 K 之后所有 $k \geq K$ 都有 $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$。由于 n_k 严格递增，这些是无穷多个不同的原下标。

反向先从满足 $|a_n - L| < 1$ 的下标中取 n_1。已选 n_{k-1} 后，满足 $|a_n - L| < 1/k$ 的下标有无穷多个，而不超过 n_{k-1} 的只有有限个，所以能选 $n_k > n_{k-1}$。如此递归得到子列，且 $|a_{n_k} - L| < 1/k$。任给 $\varepsilon > 0$，取 $K > 1/\varepsilon$，则 $k \geq K$ 时误差小于 $1/k \leq 1/K < \varepsilon$。故子列趋于 L。 ■

这是习题集 2 第 3 题的完整构造。条件数的是项的下标，不要求出现无穷多个互异数值：常数列 $a_n = L$ 只取一个数值，却有无穷多项落在每个邻域内。第 7 讲将用子列进一步讨论有界数列，但这里尚未声称每个有界数列都能抽出收敛子列。

本讲小结

- 极限定义的顺序是 $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$；误差须 $< \varepsilon$，N 不能依赖待检验的 n。
- 极限唯一，收敛必有界，有界不必收敛；有限修改不影响极限。
- 四则法则先查输入收敛。乘法用有界性，除法须分母极限 $b \neq 0$，先保证尾部 $|b_n| > |b|/2$。
- 最终 $a_n \leq b_n$ 推出 $a \leq b$，严格号未必保留；夹逼两端同趋 L，中间也趋 L。
- 子列下标严格递增且 $n_k \geq k$；原列收敛时，每个子列趋于同一极限。不同子列极限可证明发散。
- 每个 L 的邻域含无穷多项，等价于能抽出趋向 L 的子列；按误差 $< 1/k$ 且下标递增构造。

练习

5.1 ★　判断真假，假的给出反例：(a) 若每项均正且数列收敛，则极限严格为正；(b) 若乘积数列收敛，则两个因子数列都收敛；(c) 若有无穷多项落在某个候选值的某一个邻域里，则数列收敛；(d) 改动有限项可能改变极限。

5.2 ★　用定义证明 $(3n-2)/(2n+1) \to 3/2$。当 $\varepsilon = 1/100$ 时，求最小可用正整数 N，并检验 $N-1$ 为何失败。

5.3 ★★　若 $a_n \to 0$，(b_n) 仅有界、不一定收敛，证明 $a_n b_n \to 0$。以 $a_n = 1/n, b_n = (-1)^n$ 说明为何不能直接引用「两列均收敛」的乘法定理。

5.4 ★★　求 $\sqrt{n^2+n} - n$ 的极限。不可提前引用开方函数连续性，须用有理化给出所需误差控制。

5.5 ★　令 $r_n = (n^2+n)/(n^2+1)$。求极限以及值的集合的上确界、下确界，指出哪些界能取

到（习题集 1 第 3(4) 题）。

5.6 ★★ 求 $t_n=\sum_{j=1}^{n} n/(n^2+j)$ 的极限，写出对全部 $1\le j\le n$ 同时成立的上下界，不能只看固定 j。

5.7 ★ 若从某项起 $a_n<b_n$，且两列均收敛，证明两个极限只能保证 $a\le b$。给出极限相等的具体例子，再说明若 $a<b$，两列最终是否必满足 $a_n<b_n$。

5.8 ★★ 设 a_{3k-2},a_{3k-1},a_{3k} 均趋于同一个 L。直接用定义证明 $a_n\to L$。若只知道其中两列趋于 L，结论是否仍成立？

5.9 ★★★ 对原列 $a_n=(-1)^n$，写出生成 $1,1,-1,-1,\dots$ 的一般递增下标公式。再解释为何原列 $a_n=n$ 无法抽出 $1,1,2,2,\dots$；数值重复是否总会妨碍子列？

5.10 ★★★ 假设对每个 $\varepsilon>0$ 都有无穷多个下标 n 满足 $|a_n-L|<\varepsilon$。加强命题 5.12 的递归构造，要求同时 $n_k>k^2$ 且 $|a_{n_k}-L|<2^{-k}$，并证明所得子列收敛。

练习答案与提示

5.1 四项均假。(a) $a_n=1/n>0$ 而极限为 0；能保留的结论是极限非负。(b) $a_n=b_n=(-1)^n$，两个因子均发散，乘积恒为 1。(c) $(-1)^n$ 有无穷多项落在 $(1/2,3/2)$ 中，即偶数项，但它发散；收敛要求每个精度下最终的全部项都进入邻域。(d) 两列从某个下标 N_0 起相同，原精度下标为 N_1 时，取 $\max\{N_0,N_1\}$ 就能保留同一误差估计，故极限不变。

5.2 误差为 $7/[2(2n+1)]<7/(4n)$。任给 $\varepsilon>0$，取正整数 $N>7/(4\varepsilon)$，则 $n\ge N$ 时误差小于 ε。对 $\varepsilon=1/100$，精确求解 $7/[2(2n+1)]<1/100$ 得 $n>174.5$，最小 $N=175$。此时误差 $7/702<1/100$；$n=174$ 时误差为 $7/698>1/100$，故不能再小。

5.3 由有界性取固定 $M\ge 1$ 使 $|b_n|\le M$。给定 $\varepsilon>0$，由 $a_n\to 0$ 取 N 使 $n\ge N$ 时 $|a_n|<\varepsilon/M$，于是 $|a_nb_n|\le M|a_n|<\varepsilon$，所以乘积趋零。例中 $|a_nb_n|=1/n\to 0$，但 b_n 发散，不能以尚未存在的 $\lim b_n$ 代入乘法定理。直接误差估计使用了更弱的有界条件。

5.4 有理化得

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}.$$

令 $u_n=\sqrt{1+1/n}\ge 1$。由 $u_n-1=1/[n(u_n+1)]$，有 $0\le u_n-1\le 1/(2n)$，所以 $u_n\to 1$，再用四则法则得到极限 $1/2$。还可直接估计

$$\left|\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{u_n-1}{2(u_n+1)}\le\frac{1}{8n}\to 0.$$

这样没有使用开方函数连续性，也没有把两个无界量的差当成极限之差。

5.5 $r_n=1+(n-1)/(n^2+1)$，故 $r_n\to 1$，因为 $0\le (n-1)/(n^2+1)<1/n$。并且 $r_n\ge 1$，仅 $n=1$ 时取等，所以下确界是最小值 1。要证上界 $6/5$，通分等价于

$$5(n^2+n)\le 6(n^2+1)\iff (n-2)(n-3)\ge 0.$$

对正整数 n，$n=1$ 时两因子皆负，$n=2,3$ 时积为零，$n\ge 4$ 时两因子皆正，故成立。上确界 $6/5$ 在 $n=2,3$ 处取到。极限为 1 不意味着上确界也是 1。

5.6 对全部 $1\le j\le n$，有 $n/(n^2+n)\le n/(n^2+j)\le 1/n$，把 n 项相加得 $n/(n+1)\le t_n\le 1$。左端趋于 1，右端恒为 1，故夹逼得到 $t_n\to 1$。下界使用最大可能分母，必须覆盖一直变化的每个 j。

5.7 最终的 $a_n < b_n$ 蕴含 $a_n \le b_n$，故保序性给 $a \le b$。反例取 $a_n = -1/n, b_n = 1/n$，每项严格小于，两个极限却都为 0。若反过来已知 $a < b$，取 $\varepsilon = (b-a)/3$，在一个共同尾部上 $a_n < a+\varepsilon < b-\varepsilon < b_n$，所以最终严格不等式成立；与「逐项严格推出极限严格」是不同方向。

5.8 给定 $\varepsilon > 0$，分别给三条子列选择精度下标 K_1, K_2, K_3，取 $K = \max\{K_1, K_2, K_3\}$。每个 $n \ge 3K$ 都恰能写成 $3k-2, 3k-1, 3k$ 之一，且对应 $k \ge K$。于是 $|a_n - L| < \varepsilon$，故原列收敛。只知道两类不够：令 $a_{3k-2} = a_{3k-1} = 0$、$a_{3k} = 1$，前两类趋于 0，第三类却趋于 1，原列发散。

5.9 写 $k = 4q + r$，其中 $q \ge 0$，$r \in \{1,2,3,4\}$，令 $n_k = 6q + s_r$，$s_1 = 2, s_2 = 4, s_3 = 5, s_4 = 7$。每块下标严格增加，块末 $6q+7$ 小于下一块首项 $6q+8$，因此是严格递增下标。前两个下标为偶数，后两个为奇数，生成所需的双正双负。对原列 $a_n = n$，数值 1 只在下标 1 出现，无法再取一次。数值重复本身没有问题，例如 $(-1)^n$ 的偶数下标全部取值 1；限制在下标不可重复。

5.10 令 $n_0 = 0$。已选到 n_{k-1} 后，精度 2^{-k} 的邻域里有无穷多个满足条件的下标。记 $B_k = \max\{n_{k-1}, k^2\}$，删去不超过 B_k 的有限个下标，仍能选出更大的 n_k。如此既有 $n_k > n_{k-1}$、$n_k > k^2$，又有 $|a_{n_k} - L| < 2^{-k}$。由归纳法 $2^k \ge k+1$，所以误差小于等于 $1/(k+1) \to 0$；按极限定义或夹逼定理，子列收敛到 L。任意有限的下标限制都不会耗尽一个无穷下标集合。

第 6 讲

单调收敛定理、柯西列与压缩映射

Monotone Convergence, Cauchy Sequences, and Contractions

对应材料：MIT 18.100B Lecture 5 后半（单调收敛定理）与 Lecture 6 讲义（柯西列、压缩映射、Newton 法）；习题集 3 第 4、5 题，习题集 4 第 1 题。

本讲目标

(1) 理解单调收敛定理的陈述与证明，看清它在哪一步用到了实数的完备性（上确界存在）。

(2) 掌握处理递推数列的标准流程：先证单调、有界，再由单调收敛定理得到极限存在，最后在递推式两边取极限求出极限值。

(3) 会用闭区间套定理和二分法确定一个数，并用单调收敛与上下夹估计证明 $(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛。

(4) 理解柯西列的定义，会判断一个数列是不是柯西列，知道「相邻两项之差趋于 0」不够。

(5) 理解压缩映射定理：压缩映射有唯一不动点，从任意初值出发的迭代都收敛到它，并且有明确的误差估计。会把 Newton 法看成压缩映射的一个应用。

6.1 单调收敛定理

第 5 讲用 ε-N 语言定义了数列极限：$a_n \to a$ 是指对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得 $n \geq N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$。这个定义有一个实际困难：要验证它，**必须事先知道极限 a 是多少**。可是在很多问题里，我们恰恰是想证明「极限存在」，而并不知道极限等于什么。

看三个例子。

- $\sqrt{2}$ 的不足近似 $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \ldots$。我们相信它趋于 $\sqrt{2}$，可 $\sqrt{2}$ 这个数本身就需要靠这样的数列来认识。
- $(1+\frac{1}{n})^n$ 依次约为 $2,\ 2.25,\ 2.370,\ 2.441,\ 2.488,\ \ldots$，增长越来越慢。它的极限后来被命名为 e，也是先有数列、后有极限。
- 递推数列 $a_1 = 0$，$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ 依次约为 $0,\ 1.414,\ 1.848,\ 1.962,\ 1.990,\ \ldots$，看上去趋于 2，但要证明。

三个数列有两个共同点：它们都**一直在增大**，又都**被某个固定的数挡住**。本节证明这两条已经足以保证收敛。

定义 6.1（单调数列与有界数列）　设 $(a_n)_{n\ge 1}$ 是实数列。

(1) 若对一切 n 都有 $a_n \le a_{n+1}$，称 (a_n) **单调递增**（increasing）；若都有 $a_n \ge a_{n+1}$，称它**单调递减**（decreasing）。两者统称**单调**（monotone）。分别把 $\le, \ge$ 换成 $<, >$，就得到严格递增和严格递减。

(2) 若存在 M 使一切 $a_n \le M$，称 (a_n) 有上界；若存在 m 使一切 $a_n \ge m$，称它有下界；两者都成立时称它**有界**（bounded），等价于存在 M 使一切 $|a_n| \le M$。

本讲义中「递增」都指非严格的 $\le$，与 MIT 讲义的用法一致。几个例子：

- $a_n = 1 - \frac{1}{n}$：严格递增，$0 \le a_n < 1$，有界。
- $a_n = n$：严格递增，没有上界。
- $a_n = (-1)^n$：有界（$|a_n| \le 1$），但不单调。
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$：不单调，但收敛于 0。可见单调不是收敛的必要条件。
- 常数列 $a_n = c$：既单调递增又单调递减。

定理 6.2（单调收敛定理）

(1) 若 (a_n) 单调递增且有上界，则 (a_n) 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\ge 1} a_n$。

(2) 若 (a_n) 单调递减且有下界，则 (a_n) 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\ge 1} a_n$。

直观理解　递增数列在数轴上只会向右走（或原地不动）。上界像一堵墙，它走不过去。那么它最终会挤在哪里？不可能停在上确界 a 的左边：a 左边的任何点都不是上界，数列迟早越过它。也不可能停在 a 的右边：所有项都 $\le a$。于是只剩 a 本身。

思路　极限的候选值就是 $a = \sup_n a_n$，它的存在由完备性公理（第 2、3 讲）保证。要证 $|a_n - a| < \varepsilon$，拆成两半：$a_n \le a$ 来自「a 是上界」；$a_n > a - \varepsilon$ 来自「$a - \varepsilon$ 不是上界」，先找到一项越过 $a - \varepsilon$，再用单调性把这一项后面的所有项都拉过来。

证明　(1) 集合 $E = \{\, a_n \mid n \ge 1 \,\}$ 非空且有上界，由完备性公理，$a = \sup E$ 存在。任取 $\varepsilon > 0$。因为 $a - \varepsilon < a$，所以 $a - \varepsilon$ 不是 E 的上界，存在某个 N 使 $a_N > a - \varepsilon$。当 $n \ge N$ 时，由单调性 $a_N \le a_n$，又由上界性 $a_n \le a$，于是

$$a - \varepsilon < a_N \le a_n \le a,$$

即 $|a_n - a| < \varepsilon$。这就证明了 $a_n \to a$。

(2) 令 $b_n = -a_n$。(b_n) 单调递增，且若 m 是 (a_n) 的下界，则 $-m$ 是 (b_n) 的上界。由 (1)，$b_n \to \sup_n b_n = -\inf_n a_n$，从而 $a_n = -b_n \to \inf_n a_n$。 ∎

图 6.1 画出了证明中的数：先有一项 a_N 越过 $a - \varepsilon$，此后所有项都被关在 $(a - \varepsilon,\, a]$ 里。

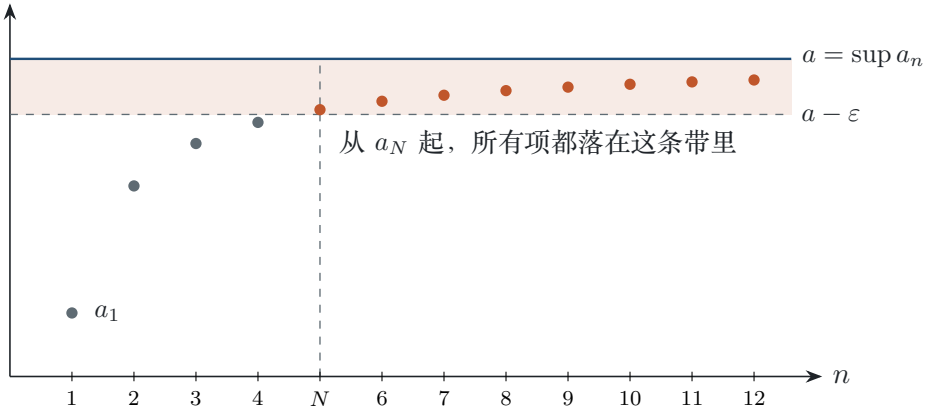


图 6.1　单调收敛定理的证明（$a_n = 2 - \frac{1.6}{n}$，$\varepsilon = 0.35$）。$a_4 \approx 1.60$ 还在带外，$a_5 = 1.68$ 第一次越过 $a - \varepsilon = 1.65$；递增性保证此后再也不会掉出去。

定理的每个条件都不能去掉。

- **去掉有界**：$a_n = n$ 递增但无上界，不收敛。
- **去掉单调**：$a_n = (-1)^n$ 有界，但在 ± 1 之间来回跳，不收敛。
- **换成有理数**：在 $\mathbb{Q}$ 中，$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \ldots$ 递增、以 2 为上界，但在 $\mathbb{Q}$ 中没有极限（它在 $\mathbb{R}$ 中的极限 $\sqrt{2}$ 是无理数，见例 6.2）。证明中唯一用到 $\mathbb{R}$ 特有性质的地方，就是「$\sup E$ 存在」。

核心思想　单调收敛定理把「上确界存在」（集合的性质）翻译成了「单调有界数列收敛」（数列的性质）。它的价值在于：只需验证单调和有界这两件不涉及极限值的事，就能断定极限存在。反过来也成立：在满足阿基米德性质的有序域中，若每个单调有界数列都收敛，则每个非空有上界的集合都有上确界。所以有的教材干脆把单调收敛定理当作完备性公理。

推论 6.3　单调数列收敛当且仅当它有界。若 (a_n) 单调递增且无上界，则 $a_n \to +\infty$，即对任意 M，存在 N，使 $n \geq N$ 时 $a_n > M$。

证明　收敛数列有界（第 5 讲），这是「仅当」。「当」就是定理 6.2。若 (a_n) 递增且无上界，任给 M，M 不是上界，存在 N 使 $a_N > M$；$n \geq N$ 时 $a_n \geq a_N > M$。 ■

想一想　设 (a_n) 单调递增，并且它有一个有上界的子列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$（$n_1 < n_2 < \cdots$）。(a_n) 本身一定收敛吗？

答　一定收敛。设子列以 M 为上界。对任意 n，因为 $n_k \geq k$，取 $k = n$ 得 $n_n \geq n$，由递增性 $a_n \leq a_{n_n} \leq M$。所以 M 也是整个数列的上界，由单调收敛定理，(a_n) 收敛。对单调数列来说，「某个子列有界」就等于「整个数列有界」。

6.2　用单调收敛定理求递推数列的极限

单调收敛定理只告诉我们极限存在，以及它等于上确界。要算出极限的具体值，通常在递推式两边取极限。为此先补一个工具：极限保持非严格不等式。

> **引理 6.4（极限保号）**　设 $a_n \to a$。若存在 N_0，使 $n \ge N_0$ 时 $a_n \le M$，则 $a \le M$。同样，若 $n \ge N_0$ 时 $a_n \ge m$，则 $a \ge m$。

证明　反设 $a > M$，取 $\varepsilon = a - M > 0$。由收敛，存在 N，使 $n \ge N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$，于是 $a_n > a - \varepsilon = M$。取 $n = \max\{N, N_0\}$ 就与 $a_n \le M$ 矛盾。第二个结论对 $-a_n$ 用第一个结论即可。 ■

易错提醒　严格不等式在取极限后可能变成等号：$\frac{1}{n} > 0$ 对一切 n 成立，但极限是 0，不满足 $0 > 0$。所以由 $a_n < M$ 只能推出 $a \le M$。

取极限时还会反复用到一个小事实：若 $a_n \to L$，则平移后的数列 $a_{n+1} \to L$，因为同一个 N 对它也适用。

■ 例 6.1　几何数列　设 $0 \le c < 1$。证明 $c^n \to 0$。

解　$c = 0$ 时数列从第一项起就是 0。设 $0 < c < 1$，令 $a_n = c^n$。则 $a_n > 0$，且 $a_{n+1} = c\,a_n < a_n$，所以 (a_n) 递减、以 0 为下界。由单调收敛定理，$a_n \to L$，由引理 6.4，$L \ge 0$。

在 $a_{n+1} = c\,a_n$ 两边取极限：左边是平移数列，趋于 L；右边趋于 cL。由极限唯一性，$L = cL$，即 $(1-c)L = 0$。因为 $1 - c \ne 0$，所以 $L = 0$。这个结论在 §6.5 证明压缩映射定理时还要用。 ♦

■ 例 6.2　$\sqrt{2}$ 的十进制近似　对 $n \ge 1$，令 b_n 为满足 $b_n^2 \le 2 \cdot 10^{2n-2}$ 的最大非负整数，$a_n = b_n / 10^{n-1}$。证明 (a_n) 收敛，且极限 a 满足 $a^2 = 2$。

解　先看 b_n 是什么。$b_1 = 1$（$1^2 \le 2 < 2^2$），$b_2 = 14$（$14^2 = 196 \le 200 < 225$），继续算下去得 $b_3 = 141$，$b_4 = 1414$，$b_5 = 14142$，$b_6 = 141421$。所以 a_n 就是 $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \ldots$，即 $\sqrt{2}$ 保留 $n-1$ 位小数并向下截断的值。b_n 存在，因为满足条件的非负整数 k 包括 1，并且都满足 $k \le 2 \cdot 10^{n-1}$（否则 $k^2 > 4 \cdot 10^{2n-2}$），有限个整数中有最大的一个。

递增。 $(10b_n)^2 = 100\,b_n^2 \le 2 \cdot 10^{2n} = 2 \cdot 10^{2(n+1)-2}$，所以 $10b_n$ 也满足 b_{n+1} 的条件，而 b_{n+1} 是最大的，故 $b_{n+1} \ge 10b_n$。两边除以 10^n 得 $a_{n+1} \ge a_n$。

有上界。 $a_n^2 = b_n^2 / 10^{2n-2} \le 2$。若 $a_n > 2$ 则 $a_n^2 > 4$，所以 $a_n \le 2$。

由单调收敛定理，$a_n \to a$，且 $a \ge a_1 = 1$。下面两边夹出 a^2。

- 由乘积的极限法则，$a_n^2 \to a^2$。每个 $a_n^2 \le 2$，由引理 6.4，$a^2 \le 2$。
- b_n 是最大的，所以 $(b_n + 1)^2 > 2 \cdot 10^{2n-2}$，两边除以 10^{2n-2} 得 $(a_n + 10^{1-n})^2 > 2$。由例 6.1，$10^{1-n} = (\frac{1}{10})^{n-1} \to 0$，于是 $(a_n + 10^{1-n})^2 \to a^2$，由引理 6.4，$a^2 \ge 2$。

所以 $a^2=2$。这又一次证明了 $\sqrt{2}$ 存在，同时说明它正是十进制展开 $1.41421\ldots$ 所代表的那个数。 ♦

递推数列的四步法

(1) **算几项、猜结论**：猜单调方向和界。

(2) **证明单调和有界**：通常用数学归纳法，或者把 $a_{n+1}-a_n$ 化成能看出符号的形式。

(3) **用单调收敛定理**：得到极限 L 存在，并由引理 6.4 得到 L 满足的不等式。

(4) **取极限、解方程**：在递推式两边取极限得到关于 L 的方程，用第 3 步的不等式排除多余的根。

先证存在，再取极限　第 4 步默认了极限存在，所以第 3 步不能跳过。反例：$a_1=1, a_{n+1}=2a_n$。若直接设 $a_n\to L$，取极限得 $L=2L$，于是「$L=0$」。可是 $a_n=2^{n-1}\to+\infty$。再如 $a_1=1$，$a_{n+1}=-a_n$，同样会「解出」$L=0$，而实际数列在 $1,-1$ 之间跳动。取极限这一步只能说明：**如果**极限存在，它只能是方程的根。

■ **例 6.3**　**习题集 3 第 4 题**　设 $a_1=4$，$a_n=4-\dfrac{4}{a_{n-1}}$（$n\ge 2$）。证明 $a_n\to 2$。

解　*算几项。* $a_1=4$，$a_2=3$，$a_3=\frac{8}{3}$，$a_4=\frac{5}{2}$，$a_5=\frac{12}{5}$。看上去递减，且都大于 2。

*下界。*归纳证明 $a_n\ge 2$：$a_1=4\ge 2$；若 $a_{n-1}\ge 2$，则 $\frac{4}{a_{n-1}}\le 2$，所以 $a_n\ge 4-2=2$。

*递减。*由下界，$a_n>0$，于是

$$a_n-a_{n+1}=a_n-4+\frac{4}{a_n}=\frac{a_n^2-4a_n+4}{a_n}=\frac{(a_n-2)^2}{a_n}\ge 0.$$

这里不需要归纳，配方直接给出符号。

*取极限。*由单调收敛定理，$a_n\to L$，且由引理 6.4，$L\ge 2$。为了避免对 $\frac{4}{a_n}$ 取极限，把递推式写成乘积形式 $a_{n+1}a_n=4a_n-4$。两边取极限得 $L^2=4L-4$，即 $(L-2)^2=0$，所以 $L=2$。 ♦

这个数列其实有通项 $a_n=2+\frac{2}{n}$（可以归纳验证：$4-\frac{4}{2+2/n}=4-\frac{2n}{n+1}=2+\frac{2}{n+1}$）。误差 $\frac{2}{n}$ 下降得很慢。§6.5 会看到压缩映射的误差像 c^n 那样指数下降，比这快得多。

■ **例 6.4**　设 $a_1=0$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$。证明 $a_n\to 2$。

解　前几项约为 $0,\ 1.414,\ 1.848,\ 1.962,\ 1.990$。先说明一个事实：若 $0\le u<v$，则 $\sqrt{u}<\sqrt{v}$（否则 $\sqrt{u}\ge\sqrt{v}\ge 0$，平方得 $u\ge v$）。

归纳证明：对一切 n，$0\le a_n<a_{n+1}<2$。$n=1$ 时 $0<\sqrt{2}<2$。若 $0\le a_n<a_{n+1}<2$，则 $2\le 2+a_n<2+a_{n+1}<4$，开方得 $\sqrt{2}\le a_{n+1}<a_{n+2}<2$，命题对 $n+1$ 成立。

所以 (a_n) 递增且以 2 为上界，$a_n\to L$，$0\le L\le 2$。递推式平方得 $a_{n+1}^2=2+a_n$，取极限得 $L^2=2+L$，即 $(L-2)(L+1)=0$。因为 $L\ge 0$，$L=2$。 ♦

递推 $a_{n+1}=f(a_n)$ 可以用**蛛网图**（cobweb diagram）来看：在同一张图上画 $y=f(x)$ 和

$y=x$。从点 (a_n,a_n) 出发竖直走到曲线，纵坐标就是 $a_{n+1}=f(a_n)$；再水平走回直线 $y=x$，到达 (a_{n+1},a_{n+1})。重复这两步就得到一条折线。曲线与直线的交点满足 $x=f(x)$，正是取极限得到的方程 $L=f(L)$ 的解。

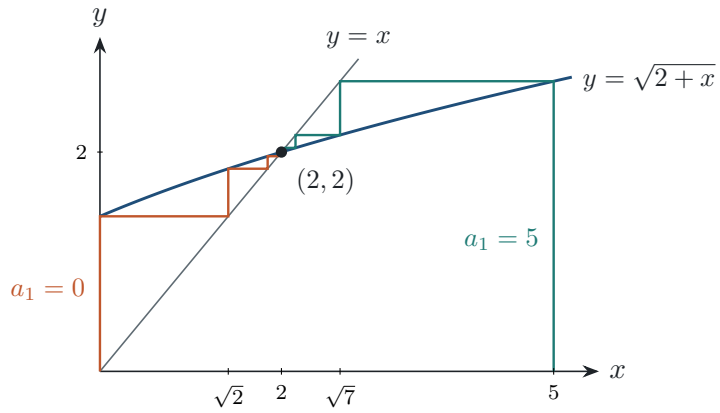


图 6.2　$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 的蛛网图。橙色折线从 $a_1=0$ 出发，像台阶一样上升；绿色折线从 $a_1=5$ 出发，台阶下降。两条折线都被吸到交点 $(2,2)$。

想一想　把例 6.4 的初值改成 $a_1=5$，数列还收敛吗？单调方向变不变？

答　收敛到 2，但变成递减（图 6.2 中的绿色折线）。归纳可得 $a_n>2$：若 $a_n>2$，则 $2+a_n>4$，$a_{n+1}>2$。又 $a_n^2-a_{n+1}^2=a_n^2-a_n-2=(a_n-2)(a_n+1)>0$，两项都为正，所以 $a_{n+1}<a_n$。数列递减、以 2 为下界，极限 $L\ge 2$ 满足 $L^2=2+L$，故 $L=2$。前几项约为 5，2.646，2.155，2.038，2.010。初值在不动点哪一侧，决定了单调方向。

6.3　闭区间套定理与数 e

单调收敛定理的一个直接推论是闭区间套定理。它把「用一串越来越小的区间去夹一个数」这个直观想法变成了定理。

定理 6.5（闭区间套定理）　设 $I_n=[\alpha_n,\beta_n]$（$\alpha_n\le\beta_n$）是一列有界闭区间，且 $I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\cdots$。则 $\bigcap_{n\ge1}I_n\neq\varnothing$。若还有 $\beta_n-\alpha_n\to0$，则交集恰好只有一个点。

思路　区间套着区间，左端点只能右移，右端点只能左移，而且左端点永远在右端点左边。所以 (α_n) 递增有上界，(β_n) 递减有下界，对两者各用一次单调收敛定理。

证明　由 $I_{n+1}\subseteq I_n$ 得 $\alpha_n\le\alpha_{n+1}\le\beta_{n+1}\le\beta_n$，所以 (α_n) 递增，(β_n) 递减。对任意 n,m，令 $k=\max\{n,m\}$，则 $\alpha_n\le\alpha_k\le\beta_k\le\beta_m$。也就是说，每个 β_m 都是 (α_n) 的上界，每个 α_n 都是 (β_m) 的下界。

由单调收敛定理，$\alpha_n\to\alpha=\sup_n\alpha_n$，$\beta_n\to\beta=\inf_n\beta_n$。因为每个 β_m 都是 $\{\alpha_n\}$ 的上界，而 α 是最小上界，所以 $\alpha\le\beta_m$ 对一切 m 成立，即 α 是 $\{\beta_m\}$ 的下界，从而 $\alpha\le\beta$。于是对每个 n，

$$\alpha_n\le\alpha\le\beta\le\beta_n,$$

即 $[\alpha,\beta]\subseteq I_n$，交集非空。反过来，若 x 属于每个 I_n，则 $\alpha_n\le x\le\beta_n$ 对一切 n 成立，所以 $\alpha\le x\le\beta$。这说明 $\bigcap_n I_n=[\alpha,\beta]$。若 $\beta_n-\alpha_n\to 0$，则 $\beta-\alpha=\lim(\beta_n-\alpha_n)=0$，交集是单点集 $\{\alpha\}$。 ■

「有界闭」和「在 $\mathbb{R}$ 中」都不能少。

- **不闭**：$I_n=(0,\frac{1}{n}]$ 一个套一个，但交集为空。$x\le 0$ 不在任何 I_n 中；$x>0$ 时由阿基米德性质有 n 使 $\frac{1}{n}<x$，于是 $x\notin I_n$。
- **无界**：$I_n=[n,\infty)$ 是闭集，也一个套一个，但任意 x 都小于某个 n，交集为空。
- **在 $\mathbb{Q}$ 中**：下面例 6.5 的区间端点全是有理数，但这些区间在 $\mathbb{Q}$ 中没有公共点。

■ **例 6.5**　二分法夹出 $\sqrt{2}$　令 $I_1=[1,2]$。若 $I_k=[\alpha_k,\beta_k]$ 已定义，取中点 $m_k=\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$：若 $m_k^2>2$，令 $I_{k+1}=[\alpha_k,m_k]$；若 $m_k^2<2$，令 $I_{k+1}=[m_k,\beta_k]$。证明 $\bigcap_k I_k=\{\sqrt{2}\}$。

解　前几步列在表 6.1 中。

k	I_k	长度	中点 m_k	m_k^2	保留
1	$[1,\ 2]$	1	3/2	2.2500	左半
2	$[1,\ 1.5]$	1/2	5/4	1.5625	右半
3	$[1.25,\ 1.5]$	1/4	11/8	1.8906	右半
4	$[1.375,\ 1.5]$	1/8	23/16	2.0664	左半
5	$[1.375,\ 1.4375]$	1/16	45/32	1.9775	右半
6	$[1.40625,\ 1.4375]$	1/32	91/64	2.0217	左半
7	$[1.40625,\ 1.421875]$	1/64	181/128	1.9996	右半
8	$[1.4140625,\ 1.421875]$	1/128			

表 6.1　二分法求 $\sqrt{2}$。每一步区间长度减半，并且始终有 $\alpha_k^2<2<\beta_k^2$。

*构造总能进行下去。*中点 m_k 是有理数，而 $\sqrt{2}$ 是无理数（第 2 讲），所以 $m_k^2\neq 2$，两种情形必居其一。归纳可知 $\alpha_k^2<2<\beta_k^2$ 对一切 k 成立：$k=1$ 时 $1<2<4$；每一步保留的那一半，仍是一个端点平方小于 2、另一个端点平方大于 2。

用闭区间套定理。 $I_{k+1}\subseteq I_k$，长度 $\beta_k-\alpha_k=2^{1-k}\to 0$（例 6.1）。由定理 6.5，交集是单点 $\{x\}$，并且由证明过程，$\alpha_k\to x$，$\beta_k\to x$。于是 $\alpha_k^2\to x^2$，$\beta_k^2\to x^2$。由 $\alpha_k^2<2$ 和引理 6.4 得 $x^2\le 2$；由 $\beta_k^2>2$ 得 $x^2\ge 2$。所以 $x^2=2$，又 $x\ge 1>0$，故 $x=\sqrt{2}$。

在 $\mathbb{Q}$ 中做同样的事：令 $J_k=I_k\cap\mathbb{Q}$。这些集合一个套一个，都非空，但 $\bigcap_k J_k=\{\sqrt{2}\}\cap\mathbb{Q}=\varnothing$。闭区间套定理在 $\mathbb{Q}$ 中不成立。 ♦

二分法每一步把区间长度减半，经过 7 次二分后，保留区间的长度为 $1/128<0.008$。选区间内一点作近似，误差不超过这个长度。第 7 讲证明有界数列存在收敛子列时，也会每次保留一

半，只是选留哪一半的标准不同。

下面用同样的「上下夹」思路处理 $(1+\frac{1}{n})^n$。需要一个不等式。

引理 6.6（Bernoulli 不等式）　若 $x \geq -1$，$n \geq 1$ 是整数，则 $(1+x)^n \geq 1+nx$。

证明　对 n 归纳。$n=1$ 时取等号。设 $(1+x)^n \geq 1+nx$。因为 $1+x \geq 0$，两边乘 $1+x$ 不改变不等号方向：

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

若 $x \neq 0$ 且指数至少为 2，最后增加的 $nx^2 > 0$，所以不等式严格成立。 ■

■ **例 6.6　数 e**　令 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$。证明 (a_n) 递增，(b_n) 递减，二者收敛到同一个极限。这个极限记作 e。

解　(a_n) 递增。设 $n \geq 2$。

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}.$$

对 $x = -\frac{1}{n^2} \geq -1$ 用 Bernoulli 不等式，因 $n \geq 2$ 且 $x \neq 0$，有 $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1$，得到严格递增。

(b_n) 递减。同样对 $n \geq 2$，

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

由 Bernoulli 不等式，$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$，所以 $\frac{b_{n-1}}{b_n} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$。

夹在一起。$b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$。由单调性，$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4$。所以 (a_n) 递增有上界 4，(b_n) 递减有下界 2，二者都收敛。又

$$b_n - a_n = \frac{a_n}{n} \leq \frac{4}{n} \to 0,$$

所以两个极限相等。记这个公共极限为 e。由于 (a_n) 严格递增、(b_n) 严格递减，对每个 n 都有 $a_n < e < b_n$，即 $[a_n, b_n]$ 是一列套住 e 的闭区间。 ♦

表 6.2 给出上下端点的数值及其间距所能保证的范围。

n	1	2	5	10	100	1000
$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$	2	2.25	2.48832	2.59374	2.70481	2.71692
$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$	4	3.375	2.98598	2.85312	2.73186	2.71964

表 6.2　e 被夹在 a_n 与 b_n 之间。$n=1000$ 时已知 $2.716 < e < 2.720$；区间长度 a_n/n 只像 $\frac{1}{n}$ 那样缩小，收敛相当慢。

注 6.1　[一个复利模型] 若假设年利率为 100%，一年等分为 n 个计息周期，每个周期按本金的 $1/n$ 计息并将利息并入本金，则一元本金经过一年变为 $(1+1/n)^n$ 元。这里每期利率降低，计息次数增加，二者共同改变最终金额。前面的证明说明，这一具体模型的金额有有限极限；它不需要把无限次计息当作已经定义好的运算。

前后联系　第 9、10 讲会用幂级数 $\sum \frac{x^n}{n!}$ 定义指数函数，那里会看到 $e=\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}$ 与这里的极限是同一个数。二分法则会在第 7 讲（Bolzano–Weierstrass 定理）和第 11 讲（介值定理）中再次出现。

6.4　柯西列

单调收敛定理只管单调数列。很多重要的数列并不单调，比如 $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$ 在 1 的两侧来回跳，又比如交错级数的部分和。我们希望有一个收敛判别法，它

- 不需要事先知道极限是多少；
- 不需要单调性。

想法是这样的：若 $a_n\to a$，那么项数足够大以后，所有项都离 a 很近，于是它们彼此之间也很近。「彼此很近」这件事只涉及数列本身，可以直接检验，用不到 a。

定义 6.7（柯西列）　称数列 (a_n) 为**柯西列**（Cauchy sequence），若对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，使得对一切 $m,n\ge N$，

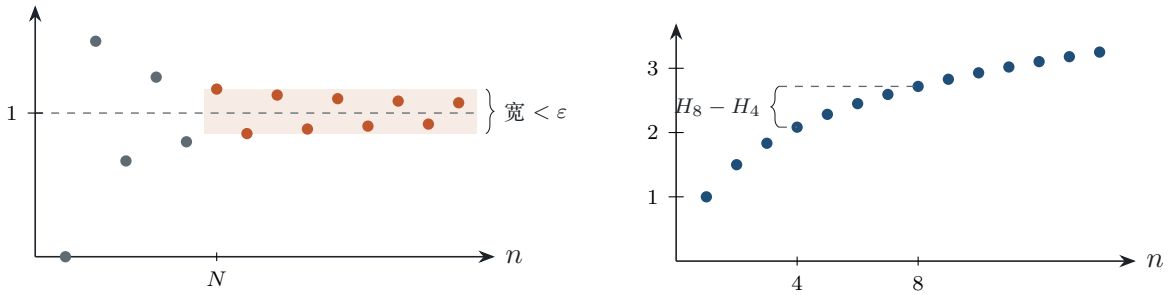
$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

直观地说，柯西列的尾巴越来越挤：对任意宽度 ε，从某一项起，后面所有的项两两相差不到 ε，挤在一条宽度不超过 ε 的带里（图 6.3(a)）。把它和收敛的定义并排放：

$$\begin{aligned} a_n\to a:&\quad \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\ge N:\ |a_n-a|<\varepsilon,\\ \text{柯西列}:&\quad \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n\ge N:\ |a_n-a_m|<\varepsilon. \end{aligned}$$

区别只有一处：收敛的定义拿每一项和一个固定的数 a 比，柯西列的定义拿后面的项互相比。

否定形式：(a_n) 不是柯西列，当且仅当存在 $\varepsilon_0>0$，使得对每个 N，都能找到 $m,n\ge N$ 满足 $|a_n-a_m|\ge\varepsilon_0$。



(a) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$：柯西列　　(b) $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$：不是柯西列

图 6.3　柯西列与非柯西列。(a) 取 $\varepsilon = \frac{1}{3}$，从 $N = 6$ 起所有项落在一条宽度小于 ε 的带里；ε 越小，需要的 N 越大，带越窄。(b) 相邻两项之差 $\frac{1}{n+1}$ 越来越小，但 $H_8 - H_4 \approx 0.63$，并且 $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ 对一切 n 成立，数列始终没有聚拢。

■ **例 6.7**　(1) 证明 $a_n = \frac{1}{n}$ 是柯西列。(2) 设 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$，证明 (s_n) 是柯西列。

解　(1) 任给 $\varepsilon > 0$，由阿基米德性质取 $N > \frac{1}{\varepsilon}$。对 $m, n \geq N$，不妨设 $m \geq n$，则

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(2) 设 $m > n \geq 1$。对 $k \geq 2$，$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$，所以中间项相消：

$$0 < s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $N > \frac{1}{\varepsilon}$，则 $m > n \geq N$ 时 $|s_m - s_n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$（$m = n$ 时差为 0）。数值上，$s_{20} - s_{10} \approx 0.0464$，$s_{1000} - s_{10} \approx 0.0942$，都小于 $\frac{1}{10}$。 ♦

例 6.7(2) 的证明从头到尾没有预先指定 (s_n) 的极限。它的具体值不影响这次收敛性判定；本讲不计算这个极限。

■ **例 6.8　调和数列不是柯西列**　设 $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$。证明 (H_n) 不是柯西列，并说明 $H_n \to +\infty$。

解　$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ 共 n 项，每项都 $\geq \frac{1}{2n}$，所以

$$H_{2n} - H_n \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$。对任意 N，取 $n = N$，$m = 2N$，都有 $m, n \geq N$ 且 $|H_m - H_n| \geq \frac{1}{2}$。由否定形式，$(H_n)$ 不是柯西列。

下面的命题 6.8 会证明收敛数列都是柯西列，所以 (H_n) 发散。它严格递增，由推论 6.3，它无上界且 $H_n \to +\infty$。数值上 $H_2 - H_1 = 0.5$，$H_4 - H_2 \approx 0.583$，$H_{10} - H_5 \approx 0.646$，$H_{20} - H_{10} \approx 0.669$。 ♦

相邻两项之差趋于 0 不够　$|a_{n+1} - a_n| \to 0$ 不能推出 (a_n) 是柯西列。$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \to 0$，但 (H_n) 不是柯西列。$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$，但 $\sqrt{n} \to +\infty$（习题集 4 第 1 题）。柯西列要求的是任意两项都接近，不论它们隔得多远；相邻两项接近只说明每一步很小，许多小步仍然可以累积成很远的距离。

命题 6.8　收敛数列是柯西列。

证明　设 $a_n \to a$，任给 $\varepsilon > 0$。对 $\frac{\varepsilon}{2}$ 用收敛的定义，存在 N，使 $n \geq N$ 时 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$。于是对 $m, n \geq N$，由三角不等式，

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

命题 6.9　柯西列有界。

证明　对 $\varepsilon = 1$ 用柯西列的定义，存在 N，使 $m, n \geq N$ 时 $|a_n - a_m| < 1$。特别地，取 $m = N$，则 $n \geq N$ 时 $|a_n| \leq |a_N| + |a_n - a_N| < |a_N| + 1$。前面只剩有限项，令

$$M = \max\bigl\{|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_{N-1}|,\ |a_N| + 1\bigr\},$$

则一切 $|a_n| \leq M$。

■

这两个命题的证明与第 5 讲「收敛数列有界」的证明几乎一样。真正有分量的是反方向。

定理 6.10（柯西收敛准则）　实数列收敛，当且仅当它是柯西列。

「⇒」就是命题 6.8。「⇐」要从一个柯西列造出它的极限，这需要实数的完备性。第 7 讲先证明 Bolzano–Weierstrass 定理（有界数列有收敛子列），再用它完成这个方向：由命题 6.9，柯西列有界，于是有收敛子列，再证明整个数列跟着子列收敛。本讲先承认这个定理，在 §6.5 中使用它。

核心思想　柯西准则把「收敛」这个需要极限值才能表述的概念，换成了一个只涉及数列自身的条件。要证明一个数列收敛，可以完全不知道极限是多少。例 6.7(2) 就是这样：估计任意两个后部的部分和之差，便能判定 $\sum \frac{1}{k^2}$ 的部分和收敛。

注 6.2　在 $\mathbb{Q}$ 中柯西准则不成立。例 6.2 的十进制近似 $a_n = b_n / 10^{n-1}$ 全是有理数，它在 $\mathbb{R}$ 中收敛，所以是柯西列；但它在 $\mathbb{Q}$ 中没有极限，因为它唯一可能的极限 $\sqrt{2}$ 不是有理数。所以「柯西列都收敛」是完备性的又一种表述。这个区别也解释了为什么只知道项都是有理数，不能推出极限仍是有理数。

表 6.3 把本讲出现的几种性质放在一起比较。

性质	需要极限值?	与收敛的关系	例子或反例
单调且有界	否	推出收敛，反之不然	$\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛但不单调
收敛	是	—	$\frac{1}{n}\to 0$
柯西列	否	与收敛等价（在 $\mathbb{R}$ 中）	$\sum_{k\le n}\frac{1}{k^2}$
有界	否	收敛推出有界，反之不然	$(-1)^n$ 有界但发散
$\lvert a_{n+1}-a_n\rvert\to 0$	否	收敛推出它，反之不然	H_n，$\sqrt{n}$ 发散

表 6.3　几种数列性质的比较。在 $\mathbb{R}$ 中：单调有界 $\Rightarrow$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 柯西列 $\Rightarrow$ 有界。

想一想　(1) 柯西列一定单调吗? (2) 有界数列一定是柯西列吗?

答　(1) 不一定。$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛于 0，所以是柯西列，但它的项正负交替，不单调。(2) 不一定。$a_n=(-1)^n$ 有界，但对任意 N，$|a_{N+1}-a_N|=2$，取 $\varepsilon_0=2$ 就违反了柯西列的条件。有界只是柯西列的必要条件。

6.5　压缩映射与不动点

在计算器上输入一个正数，然后反复按 $\sqrt{\ }$ 键。从 16 出发，依次得到

$$16,\ 4,\ 2,\ 1.41421,\ 1.18921,\ 1.09051,\ 1.04427,\ \ldots$$

从 0.25 出发，依次得到 0.25, 0.5, 0.70711, 0.84090, 0.91700, 0.95760, ...。两串数都向 1 靠拢，而 1 恰好满足 $\sqrt{1}=1$：按键不再改变它。本节研究这种现象：反复作用同一个映射 T，即 $a_{n+1}=T(a_n)$，什么时候一定收敛，收敛到哪里，收敛多快。

定义 6.11（不动点与压缩映射）　设 $I\subseteq\mathbb{R}$，$T:I\to I$。

(1) 若 $T(x_0)=x_0$，称 x_0 为 T 的**不动点**（fixed point）。几何上，不动点是图像 $y=T(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点的横坐标。

(2) 若存在常数 $0\le c<1$，使得对一切 $x,y\in I$，

$$|T(x)-T(y)|\le c\,|x-y|,$$

称 T 为 I 上的**压缩映射**（contraction），c 称为压缩常数。

压缩映射使任意两点的像之间的距离不超过原距离的 c 倍。注意 c 是一个**固定的**、严格小于 1 的数，对所有 x,y 都适用。

■ **例 6.9　压缩映射的例子与非例子**　判断下列映射是不是压缩映射，若是，求一个压缩常数。(1) $T(x)=\frac{x}{2}+1$，$I=\mathbb{R}$。(2) $T(x)=\sqrt{x}$，$I=[1,\infty)$。(3) $T(x)=x^2$，$I=\mathbb{R}$；$I=[0,\frac{1}{3}]$。

解　(1) $|T(x)-T(y)|=\frac{1}{2}|x-y|$，是压缩映射，$c=\frac{1}{2}$。不动点由 $x=\frac{x}{2}+1$ 解得 $x=2$。从 $a_1=0$

出发，迭代得 $0,\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ \frac{31}{16},\ \ldots$，归纳可证 $a_n = 2 - 2^{2-n}$，误差 $|a_n - 2| = 2^{2-n}$ 每步恰好减半。

(2) 若 $x \geq 1$，则 $\sqrt{x} \geq 1$，所以 T 把 $[1,\infty)$ 映到自身。对 $x, y \geq 1$，

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2},$$

是压缩映射，$c = \frac{1}{2}$。这解释了计算器从 16 出发的现象：每按一次键，到 1 的距离至少减半。

从 0.25 出发的另一串数，第二项为 $1/2$。在 $I = [1/2, 1]$ 上，开方仍映入自身，且 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 2\sqrt{1/2} = \sqrt{2}$，所以压缩常数可取 $1/\sqrt{2} < 1$。因此从第二项起也可使用压缩映射定理，得到极限 1。

(3) $|x^2 - y^2| = |x+y|\,|x-y|$。在 $\mathbb{R}$ 上，比值 $|x+y|$ 可以任意大（取 $x = y+1$，y 很大），不存在统一的 $c < 1$，不是压缩映射。在 $[0, \frac{1}{3}]$ 上，T 的值落在 $[0, \frac{1}{9}] \subseteq [0, \frac{1}{3}]$ 中，并且 $|x+y| \leq \frac{2}{3}$，所以是压缩映射，$c = \frac{2}{3}$。 ♦

例 6.9(3) 说明，同一个公式是否是压缩映射，取决于定义域。

引理 6.12（压缩映射保持极限）　设 $T : I \to I$ 是压缩映射，$x_n, x \in I$，$x_n \to x$。则 $T(x_n) \to T(x)$。

证明　$|T(x_n) - T(x)| \leq c|x_n - x| \leq |x_n - x|$。任给 $\varepsilon > 0$，取 N 使 $n \geq N$ 时 $|x_n - x| < \varepsilon$，则同时有 $|T(x_n) - T(x)| < \varepsilon$。 ■

用第 10 讲的语言说，压缩映射是连续函数。

命题 6.13（不动点唯一）　压缩映射至多有一个不动点。

证明　设 $T(x) = x$，$T(y) = y$。则 $|x-y| = |T(x) - T(y)| \leq c|x-y|$，即 $(1-c)|x-y| \leq 0$。因为 $1 - c > 0$，所以 $|x-y| = 0$，$x = y$。 ■

想一想　$T(x) = x^2$ 把 $[0,1]$ 映到自身。它在 $[0,1]$ 上是压缩映射吗？能不能不做计算就回答？
答　不是。T 在 $[0,1]$ 上有两个不动点 0 和 1，而由命题 6.13，压缩映射至多有一个不动点。直接验证也可以：取 $x = 1$，$y = 0.9$，$|T(x) - T(y)| = 0.19 > |x-y| = 0.1$，距离反而被放大了。

存在性的关键是下面这个引理，即习题集 3 第 5 题。

引理 6.14（压缩映射的迭代是柯西列）　设 $T : I \to I$ 是压缩映射，压缩常数为 c。任取 $a_1 \in I$，令 $a_{n+1} = T(a_n)$，记 $d = |a_2 - a_1|$。则

(1) $|a_{n+1} - a_n| \le c^{n-1} d$ 对一切 $n \ge 1$ 成立；

(2) 对 $m > n \ge 1$，$|a_m - a_n| \le \dfrac{c^{n-1}}{1-c}\, d$。特别地，$|a_m - a_1| \le \dfrac{|a_2 - a_1|}{1-c}$；

(3) (a_n) 是柯西列。

思路　每走一步，新步长不超过上一步长的 c 倍。从 a_n 走到 a_m 的距离不超过中间各步步长之和，而步长受几何数列控制，和有上界 $\frac{c^{n-1}d}{1-c}$。这个上界随 n 趋于 0，所以后部各项的距离可以同时控制。

证明　约定 $c^0 = 1$。(1) 对 n 归纳。$n = 1$ 时两边都是 d。若 $|a_{n+1} - a_n| \le c^{n-1} d$，则

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = |T(a_{n+1}) - T(a_n)| \le c\,|a_{n+1} - a_n| \le c^n d.$$

(2) 由三角不等式和 (1)，

$$|a_m - a_n| \le \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \le d\big(c^{n-1} + c^n + \cdots + c^{m-2}\big) = d\, c^{n-1}\, \frac{1 - c^{m-n}}{1-c} \le \frac{c^{n-1}}{1-c}\, d.$$

取 $n = 1$ 即得第二个不等式。

(3) 任给 $\varepsilon > 0$。若 $d = 0$，则 $a_2 = a_1$，数列是常数列。设 $d > 0$。由例 6.1，$c^{n-1} \to 0$，所以存在 N 使 $\frac{c^{N-1}}{1-c} d < \varepsilon$。$(c^{n-1})$ 递减，故 $m > n \ge N$ 时，由 (2)，$|a_m - a_n| \le \frac{c^{n-1}}{1-c} d \le \frac{c^{N-1}}{1-c} d < \varepsilon$。当 $m = n$ 时差为零；当 $m < n$ 时交换二者，所以柯西条件对所有 $m, n \ge N$ 成立。 ■

定理 6.15（压缩映射定理）　设 I 是非空闭区间（可以是 $[\alpha, \beta]$、$[\alpha, \infty)$、$(-\infty, \beta]$ 或 $\mathbb{R}$），$T : I \to I$ 是压缩常数为 c 的压缩映射。则

(1) T 在 I 中有唯一的不动点 a；

(2) 任取 $a_1 \in I$，迭代 $a_{n+1} = T(a_n)$ 都收敛到 a；

(3) 误差估计：$|a_n - a| \le \dfrac{c^{n-1}}{1-c}\, |a_2 - a_1|$。

证明　由引理 6.14，(a_n) 是柯西列；由柯西收敛准则（定理 6.10），$a_n \to a$。所有 a_n 都在 I 中，I 的端点（若有）满足 $\alpha \le a_n \le \beta$，由引理 6.4，$\alpha \le a \le \beta$，所以 $a \in I$。这里用到了 I 是闭的。

由引理 6.12，$T(a_n) \to T(a)$。另一方面 $T(a_n) = a_{n+1}$ 是 (a_n) 的平移，趋于 a。由极限唯一性，$T(a) = a$。唯一性由命题 6.13 给出。最后，在引理 6.14(2) 中固定 n，令 $m \to \infty$，由 $\big||u| - |v|\big| \le |u - v|$ 得 $|a_m - a_n| \to |a - a_n|$，再由引理 6.4 得到误差估计。 ■

误差估计的右边只用到 c 和第一步的步长 $|a_2 - a_1|$，在开始迭代之前就能算出来。所以压缩映射定理不仅保证收敛，还告诉我们迭代多少步就够了。

注 6.3　[不用柯西准则的证明] 柯西准则的「$\Leftarrow$」方向要到第 7 讲才证明。这里给一个只用闭区

间套定理的证明。令 $d=|a_2-a_1|$，$r_n=\frac{c^{n-1}d}{1-c}$，$J_n=[a_n-r_n,\,a_n+r_n]$。若 $x\in J_{n+1}$，则

$$|x-a_n|\le|x-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_n|\le r_{n+1}+c^{n-1}d=\frac{c^nd+(1-c)c^{n-1}d}{1-c}=r_n,$$

所以 $J_{n+1}\subseteq J_n$。又 $r_n\to0$，由定理 6.5，$\bigcap_n J_n=\{a\}$，并且 $|a_n-a|\le r_n\to0$。其余步骤与上面相同。

定理的每个条件都不能去掉，见表 6.4。

映射	区间	缺少的条件	为什么没有不动点
$T(x)=x+1$	$\mathbb{R}$	压缩常数 $c<1$（这里 $c=1$）	$x+1=x$ 无解
$T(x)=\sqrt{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	统一的 $c<1$（只有严格不等式）	$T(x)>\lvert x\rvert\ge x$
$T(x)=\frac{x}{2}$	$(0,1]$	区间是闭的	唯一候选 $0\notin(0,1]$
$T(x)=\frac{x}{2}+1$	$[0,1]$	T 把 I 映入 I	$T(1)=\frac{3}{2}\notin I$；候选 $2\notin I$

表 6.4　压缩映射定理的条件缺一不可。第二行的严格不等式见习题 9。

第三行中，从 $a_1=1$ 出发的迭代 $1,\,\frac12,\,\frac14,\,\dots$ 仍是柯西列，但它的极限 0 跑到了区间外面。这和柯西列在 $\mathbb{Q}$ 中可能没有极限是同一回事。

■ **例 6.10　黄金比**　设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$。证明 $x_n\to\varphi=\frac{1+\sqrt5}{2}$，并估计多少步能保证误差小于 10^{-6}。

解　前几项是 $1,\,2,\,\frac32,\,\frac53,\,\frac85,\,\frac{13}{8},\,\frac{21}{13},\,\dots$，分子分母是相邻的 Fibonacci 数。数列在 1.6 附近上下跳动，不单调，单调收敛定理不能直接用。要用压缩映射定理，先找一个闭区间 I，使 $T(x)=1+\frac1x$ 把 I 映入 I 且在 I 上是压缩映射。

取 $I=[\frac32,2]$。*映入自身*：T 在 I 上递减，$T(2)=\frac32$，$T(\frac32)=\frac53<2$，所以 $T(I)\subseteq[\frac32,\frac53]\subseteq I$。*压缩*：对 $x,y\in I$，$xy\ge\frac94$，

$$|T(x)-T(y)|=\left|\frac1x-\frac1y\right|=\frac{|x-y|}{xy}\le\frac49|x-y|.$$

所以 $c=\frac49$。$x_1=1\notin I$，但 $x_2=2\in I$，从 x_2 起用定理：(x_n) 收敛到 T 在 I 中唯一的不动点。不动点满足 $x=1+\frac1x$，即 $x^2-x-1=0$，两根为 $\frac{1\pm\sqrt5}{2}$，在 I 中的是 $\varphi\approx1.618034$。

误差估计。把 $x_2,x_3,\dots$ 看成从 x_2 出发的迭代，第一步步长 $|x_3-x_2|=\frac12$。由定理 6.15(3)，对 $n\ge2$，

$$|x_n-\varphi|\le\frac{(4/9)^{n-2}}{1-4/9}\cdot\frac12=\frac{9}{10}\left(\frac49\right)^{n-2}.$$

要使右边小于 10^{-6}，需要 $(\frac49)^{n-2}<\frac{10^{-6}}{0.9}$。计算得 $n-2\ge17$，即 $n\ge19$ 足够。 ♦

实际误差比这个估计小得多。$x_{10}=\frac{89}{55}\approx1.618182$，真实误差约 1.5×10^{-4}，而估计给出的是 $0.9\cdot(\frac49)^8\approx1.4\times10^{-3}$。原因是 $\frac49$ 是整个区间上的最坏情形，在 φ 附近 $\frac{|x-y|}{xy}$ 中的 $xy\approx\varphi^2\approx2.618$，实际的缩小倍数约为 $\frac{1}{2.618}\approx0.38$。

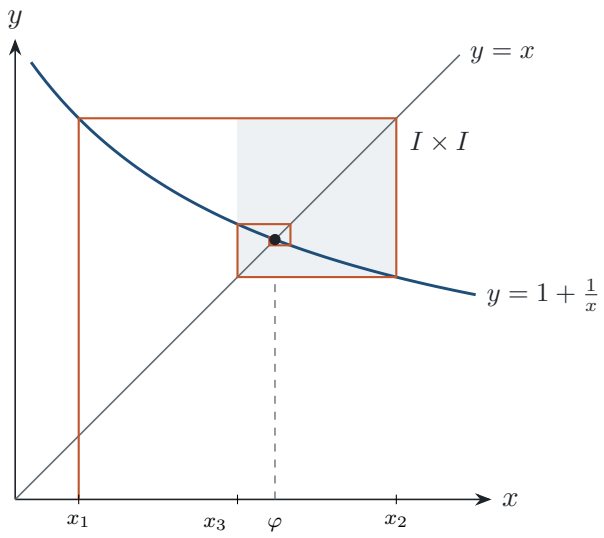


图 6.4　$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}$ 的蛛网图。浅蓝色正方形是 $I\times I$，$I=[\frac{3}{2},2]$：曲线在 I 上的部分完全落在正方形内，这就是「T 把 I 映入 I」。T 递减，折线绕着不动点 (φ,φ) 转圈，向内收缩。

想一想　图 6.2 中的折线是台阶，图 6.4 中的折线是螺旋。区别从哪里来？

答　来自 T 的单调方向。若 T 递增，且 $a_1\le a_2$，则 $a_2=T(a_1)\le T(a_2)=a_3$，依此类推，数列单调，折线是台阶。若 T 严格递减，不动点为 p，则 $a_n<p$ 推出 $a_{n+1}=T(a_n)>T(p)=p$，反之亦然，数列在 p 两侧交替；若某项已经等于 p，后面各项保持为 p。黄金比数列中奇数项递增、偶数项递减，分别从下方和上方逼近 φ。

6.6　Newton 法

压缩映射定理的一个重要应用是求方程 $f(x)=0$ 的近似根。Newton 法的想法是：在当前近似值 x_n 处用切线代替曲线，取切线与 x 轴的交点作为下一个近似值（图 6.5）。$y=f(x)$ 在 x_n 处的切线是 $y=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)$，令 $y=0$ 解出

$$\boxed{x_{n+1}=N(x_n),\qquad N(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.}$$

本节中求导只按微积分课的公式使用，导数的严格定义在第 14 讲。

在 $f'(x)\neq 0$ 的地方，$N(x)=x$ 当且仅当 $f(x)=0$。所以**求 f 的根就是求 N 的不动点**。若 f 在相关区间二阶可导且 f' 处处非零，对 N 求导得到：

$$N'(x)=1-\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'(x)^2}=\frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}.$$

在根 r 处 $f(r)=0$，所以 $N'(r)=0$（只要 $f'(r)\neq 0$）。这提示我们检查根附近是否有统一的导数上界；仅知道一个点的导数为零，还不足以保证压缩。把这个想法变严格需要中值定理（第 14 讲）：$|N(x)-N(y)|=|N'(\xi)||x-y|$。若在根附近的某个非空闭区间上 N 可导、$|N'|\le\frac{1}{2}$ 且 N 映入自身，压缩映射定理就适用。

下面的例子不用导数，直接验证一切。

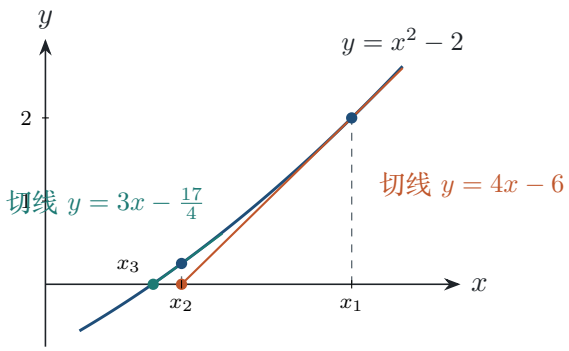


图 6.5　$f(x) = x^2 - 2$ 的 Newton 法，$x_1 = 2$。在 $(2, 2)$ 处的切线交 x 轴于 $x_2 = \frac{3}{2}$；在 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ 处的切线交 x 轴于 $x_3 = \frac{17}{12} \approx 1.41667$，与 $\sqrt{2} \approx 1.41421$ 相差约 0.0025，在此图的尺度下非常接近。

■ **例 6.11　不用导数验证 Newton 迭代**　设 $x_1 = 2$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2/x_n)$。证明所有项有定义且收敛于 $\sqrt{2}$，并给出保证误差小于 10^{-6} 的一个下标。

解　先在固定闭区间 $I = [1, 2]$ 内检查映入性和压缩性，再调用定理。令 $N(x) = \frac{1}{2}(x + 2/x)$，因 $x \geq 1$，分母始终非零。对 $x \in I$，

$$N(x) - 1 = \frac{(x-1)^2 + 1}{2x} > 0, \qquad N(x) - \frac{3}{2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2x} \leq 0.$$

所以 $N(I) \subseteq (1, 3/2] \subseteq I$，从 $x_1 = 2 \in I$ 出发，每一步都留在 I 内，有定义。

对任意 $x, y \in I$，$1 \leq xy \leq 4$，故 $1/2 \leq 2/(xy) \leq 2$，从而 $|1 - 2/(xy)| \leq 1$。于是

$$|N(x) - N(y)| = \frac{1}{2}|x - y| \left|1 - \frac{2}{xy}\right| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

N 是压缩常数为 $1/2$ 的映射。由压缩映射定理，迭代收敛于 I 内唯一的不动点 r；方程 $r = \frac{1}{2}(r + 2/r)$ 等价于 $r^2 = 2$，而 $r \geq 1$，所以 $r = \sqrt{2}$。

第一步为 $x_2 = 3/2$，步长 $|x_2 - x_1| = 1/2$。通用误差估计给出

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{(1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} \cdot \frac{1}{2} = 2^{1-n}.$$

因为 $2^{-20} < 10^{-6}$，所以 $n \geq 21$ 足够。这是保证可用的下标，未宣称实际需要这么多步。　♦

表 6.5 记录实际迭代。精确分数由递推式逐项计算，小数列只用于显示近似值；它们没有参与收敛证明。

n	精确值 x_n	小数近似
1	2	2.000000000000
2	3/2	1.500000000000
3	17/12	1.416666666667
4	577/408	1.414215686275
5	665857/470832	1.414213562375

表 6.5　Newton 迭代的实际精度远好于压缩常数 1/2 给出的统一估计。

实际精度为何提高得更快？令 $r=\sqrt{2}$，直接整理得到

$$N(x)-r=\frac{x^2+2-2rx}{2x}=\frac{(x-r)^2}{2x}\qquad(x>0).$$

因为 $x_1=2>r$，所以 $x_n\geq r$ 对所有 n 成立。记误差 $e_n=x_n-r\geq 0$，则

$$e_{n+1}=\frac{e_n^2}{2x_n}\leq\frac{e_n^2}{2}.$$

误差足够小时，下一步与误差的平方相关，而非只乘一个固定的 $1/2$。例如第 5 项的分子分母满足 $665857^2-2\cdot 470832^2=1$，故

$$0<x_5-r=\frac{x_5^2-2}{x_5+r}=\frac{1}{470832^2(x_5+r)}<\frac{5}{14\cdot 470832^2}<2\times 10^{-12}.$$

这里用了 $r>7/5$（因为 $(7/5)^2<2$），故 $x_5+r\geq 2r>14/5$。这一严格估计解释了表中的精度，也说明通用压缩估计可以相当保守。它只是在固定区间上统一保证收敛，并不要求达到实际最快的速度。

Newton 法需要可验证的区域　「初值离根很近」尚不能代替条件。必须检查分母不为零、迭代留在所选区域，以及有一个适用于整个区域的压缩常数。例如求 $x^2-2=0$ 时从 $x_1=0$ 出发，第一步就含 $2/x_1$，没有定义；本讲的 $I=[1,2]$ 同时避免了这个问题并保证后续步骤可继续。

前后联系　原 Lecture 6 后半利用 Bolzano–Weierstrass 定理证明柯西收敛，再讨论连续性与最值。按本书安排，第 7 讲补全 Bolzano–Weierstrass 和柯西准则的证明，第 10、11 讲处理连续性及最值。压缩映射在更一般完备空间上的版本，将用于第 23 讲的常微分方程存在唯一性；当前的实数区间版本先展示完整的迭代与误差论证。

本讲小结

- **单调收敛**：递增且有上界时 $a_n\to\sup_n a_n$；递减且有下界时 $a_n\to\inf_n a_n$。完备性保证候选极限存在，单调性控制整个尾部。
- **递推四步法**：猜单调与界，证明二者，确认极限存在，最后在递推关系中取极限并排除不合条件的根。
- **闭区间套**：非空有界闭区间依次包含时交集非空；若长度趋于 0，交集为单点。对 $a_n=(1+1/n)^n$、$b_n=(1+1/n)^{n+1}$，有 $a_n<e<b_n$ 且差趋于 0。
- **柯西条件**：每个 $\varepsilon>0$ 都有 N，使所有 $m,n\geq N$ 满足 $|a_m-a_n|<\varepsilon$。收敛推出柯西，柯西推出有界；在 $\mathbb{R}$ 中柯西也推出收敛，其证明见第 7 讲。
- **压缩迭代**：$T:I\to I$、$0\leq c<1$ 时，相邻步长满足 $|a_{n+1}-a_n|\leq c^{n-1}|a_2-a_1|$，任意尾部距离由几何和控制，故迭代为柯西列。
- **不动点与误差**：若 I 非空且为闭区间，压缩映射有唯一不动点 a，且 $|a_n-a|\leq c^{n-1}|a_2-a_1|/(1-c)$。映入自身、闭性与统一的 $c<1$ 各有作用。
- **Newton 的具体检验**：对 $N(x)=(x+2/x)/2$、$I=[1,2]$，有 $N(I)\subseteq I$ 且压缩常数可取 $1/2$，不动点为 $\sqrt{2}$；实际误差还满足 $e_{n+1}=e_n^2/(2x_n)$。

练习

6.1 ★ 判断真假，假的给反例：(a) 每个收敛实数列都单调；(b) 相邻两项之差趋于 0 的数列是柯西列；(c) 每个实数柯西列有界；(d) 对每对不同点均严格缩短距离的自映射一定有不动点。

6.2 ★ 设 $a_1 = 1$、$a_{n+1} = (a_n + 3)/2$。先证单调有界，再求极限；最后归纳验证通项 $a_n = 3 - 2^{2-n}$。写出前四项。

6.3 ★ 对 $I_n = [1 - 1/n, 1 + 2/n]$，证明它们构成闭区间套并求交集。再说明 $J_n = (0, 1/n]$ 为什么不能使用闭区间套定理，实际交集是什么。

6.4 ★ 用 Bernoulli 不等式比较 $(1 + x)^n$ 与 $1 + nx$：分别取 $(x, n) = (1, 3)$、$(-1/4, 2)$。给出两边差值，并说明为何一般情况下 $x \neq 0$、$n \geq 2$ 时可写严格不等号。

6.5 ★★ 令 $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/[k(k+1)]$。先通过部分和之差证明 (s_n) 为柯西列，再求它的极限。不得只从相邻项之差趋于 0 得出结论。

6.6 ★★ 对 $a_n = \sqrt{n}$，证明相邻项之差趋于 0，但 (a_n) 不是柯西列。请直接按柯西定义的否定，给出固定的 ε_0 与每个 N 所对应的 $m, n \geq N$。（习题集 4 第 1 题的一个例子。）

6.7 ★★ 设 $T(x) = (x + 3)/4$，定义在 $\mathbb{R}$ 上。证明它为压缩映射，求不动点；从 $a_1 = 0$ 开始迭代，给出通项与严格误差小于 10^{-6} 的一个下标。

6.8 ★★ 在压缩映射定理的条件下，证明对 $n \geq 2$ 有后验误差估计 $|a_n - a| \leq c|a_n - a_{n-1}|/(1 - c)$。解释它为何无需提前知道不动点 a 的值。$c = 0$ 时如何理解？

6.9 ★★★ 对 $T(x) = \sqrt{x^2 + 1}$、$I = \mathbb{R}$，证明每对不同点的距离都严格缩短，但不存在统一的压缩常数 $c < 1$，也没有不动点。这完成表 6.4 第二行的验证。提示：用 $x = n + 1, y = n$，将缩距比值与 $(2n + 1)/(2n + 3)$ 比较。

6.10 ★★★ 对 $N(x) = \frac{1}{2}(x + 3/x)$、$I = [3/2, 2]$，证明 $N(I) \subseteq I$，且压缩常数可取 $1/6$。从 $x_1 = 2$ 出发证明迭代收敛于 $\sqrt{3}$，计算前三项。映入性可比较 $N(x)$ 与 $3/2, 7/4$。

练习答案与提示

6.1 (a) 假，$(-1)^n/n \to 0$，但不单调。(b) 假，调和数列 H_n 满足 $H_{n+1} - H_n = 1/(n+1) \to 0$，却有 $H_{2n} - H_n \geq 1/2$，不是柯西列。(c) 真，命题 6.9 已给证明。(d) 假，取本讲习题 9 的 $T(x) = \sqrt{x^2 + 1}$，它对不同点严格缩短距离，却没有不动点；缺少统一的 $c < 1$。

6.2 先归纳证明 $a_n < 3$：初值满足，若 $a_n < 3$，则 $a_{n+1} = (a_n + 3)/2 < 3$。于是 $a_{n+1} - a_n = (3 - a_n)/2 > 0$，所以数列递增且有上界 3。由单调收敛定理，$a_n \to L$，取极限得 $L = (L + 3)/2$，所以 $L = 3$。通项奠基 $3 - 2^{2-1} = 1$；若成立，则 $(a_n + 3)/2 = (6 - 2^{2-n})/2 = 3 - 2^{1-n}$，正是下一项。前四项为 $1, 2, 5/2, 11/4$，与递推核对一致。

6.3 左端点递增、右端点递减，且 $1 - 1/n \leq 1 \leq 1 + 2/n$，故区间非空，$I_{n+1} \subseteq I_n$。长度为 $3/n \to 0$，由闭区间套定理交集仅含一个点；因为 1 属于每个区间，交集为 $\{1\}$。J_n 没有包含左端点 0，不闭；若 $x \leq 0$，不属于任何 J_n，若 $x > 0$，取 $n > 1/x$ 就有 $1/n < x$，也不属于这个 J_n。故其交集为空。

6.4 第一种情形左边 $2^3 = 8$、右边 $1 + 3 = 4$，差为 4。第二种左边 $(3/4)^2 = 9/16$、右边 $1 - 1/2 = 1/2$，差为 $1/16$。一般地，在从指数 n 到 $n + 1$ 的归纳步中，多出的项为 nx^2；当 $x \neq 0$ 时它严格大于

0，因此对指数至少为 2 的情形不等式严格。条件 $x \geq -1$ 保证乘 $1+x$ 不反转不等号。

6.5 因 $1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$，对 $m > n$ 有 $0 < s_m - s_n = 1/(n+1) - 1/(m+1) < 1/(n+1)$。任给 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/\varepsilon$，则 $m > n \geq N$ 时差小于 $1/N < \varepsilon$；$m = n$ 时为零，$m < n$ 时交换二者。因此是柯西列。再直接求和，$s_n = 1 - 1/(n+1)$，故 $s_n \to 1$。即使暂未使用柯西准则的反向证明，最后的误差式也已直接确认极限。

6.6 相邻差有理化为 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \leq 1/(2\sqrt{n})$。给定 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/(4\varepsilon^2)$，则 $n \geq N$ 时此差小于 ε，所以相邻差趋于零。要否定柯西条件，取固定 $\varepsilon_0 = 1$。对每个 $N \in \mathbb{N}$，选 $n = N, m = 4N$，则两者都不小于 N，但 $|a_m - a_n| = 2\sqrt{N} - \sqrt{N} = \sqrt{N} \geq 1$。这验证了定义的否定，未借助「无界」来替代所要求的直接论证。

6.7 对任意实数 x, y，$|T(x) - T(y)| = |x - y|/4$，故可取 $c = 1/4$。不动点方程 $x = (x+3)/4$ 给出 $x = 1$。归纳可得 $a_n = 1 - 4^{1-n}$：初值为 0，而 $(1 - 4^{1-n} + 3)/4 = 1 - 4^{-n}$。前三项 $0, 3/4, 15/16$ 与下一项 $63/64$ 均吻合。误差为 4^{1-n}，故 $n \geq 11$ 时误差不超过 $4^{-10} < 10^{-6}$。通用压缩估计用 $|a_2 - a_1| = 3/4$，也给出相同的上界。

6.8 固定 $n \geq 2$。对 $m > n$，从第 $n-1$ 项开始用压缩性逐项估计，有

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |a_{j+1} - a_j| \leq |a_n - a_{n-1}| \sum_{j=n}^{m-1} c^{j-n+1} \leq \frac{c}{1-c} |a_n - a_{n-1}|.$$

令 $m \to \infty$，由绝对值保持极限与极限保号得所求。右侧只需连续两次计算结果与压缩常数，可以在迭代过程中检查精度。若 $c = 0$，映射把所有点映到同一个值 p；又 $T(p) = p$，所以从第 2 项起误差为零，公式仍成立。

6.9 对 $x \neq y$，有

$$\frac{|T(x) - T(y)|}{|x - y|} = \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} < 1,$$

因分母严格大于 $|x| + |y| \geq |x + y|$。但取 $x = n+1, y = n$，该比值为

$$\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1} + \sqrt{n^2+1}} > \frac{2n+1}{2n+3} = 1 - \frac{2}{2n+3}.$$

这里对正数 u 使用 $\sqrt{u^2+1} < u+1$，其依据是两边为正且 $u^2+1 < (u+1)^2$。对任何固定 $c < 1$，选充分大的自然数 n 使 $2/(2n+3) < 1-c$，就得到比值大于 c，故不存在统一压缩常数。又 $T(x) > |x| \geq x$，所以没有 $T(x) = x$ 的解。逐对严格缩距无法替代统一缩距率。

6.10 对 $x \in [3/2, 2]$，分母为正，且

$$N(x) - \frac{3}{2} = \frac{(x - 3/2)^2 + 3/4}{2x} > 0, \qquad N(x) - \frac{7}{4} = \frac{(2x-3)(x-2)}{4x} \leq 0.$$

故 $N(I) \subseteq (3/2, 7/4] \subseteq I$。任意 $x, y \in I$ 满足 $9/4 \leq xy \leq 4$，于是 $3/4 \leq 3/(xy) \leq 4/3$，给出 $|1 - 3/(xy)| \leq 1/3$。因此 $|N(x) - N(y)| = \frac{1}{2}|x - y||1 - 3/(xy)| \leq |x - y|/6$。压缩映射定理保证从 $x_1 = 2$ 出发迭代收敛于 I 内不动点 r，其方程给出 $r^2 = 3$，由 $r > 0$ 得 $r = \sqrt{3}$。直接计算前三项为 $2, 7/4, 97/56$；每项为正并留在闭区间内，后续递推始终有定义。

第 7 讲

Bolzano–Weierstrass 定理与柯西准则

The Bolzano–Weierstrass Theorem and the Cauchy Criterion

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 7 讲义前半（Bolzano–Weierstrass 定理的二分法证明、Weierstrass 小传）与 Lecture 6 讲义中「Bolzano–Weierstrass 定理 $\Rightarrow$ 柯西收敛准则」的论证；习题集 2 第 3、4 题，习题集 4 第 5 题。Lecture 7 后半的级数部分放在第 8 讲。峰点证明、压缩数列与完备性的等价形式为本讲补充内容。

本讲目标

(1) 会用「无穷多项必落在两半之一」的抽屉论证，按二分法造出收敛子列，从而证明 Bolzano–Weierstrass 定理；知道有界性为什么不能去掉。

(2) 掌握第二个证明：任何数列都有单调子列（峰点论证），再用单调收敛定理。

(3) 会求简单数列的全部子列极限，知道闭区间中数列的子列极限仍在这个区间里。

(4) 补上第 6 讲留下的证明：柯西列必收敛。掌握关键引理「柯西列只要有一个收敛子列，整个数列就收敛」。

(5) 会用压缩数列定理证明递推数列收敛，并写出误差估计。

(6) 理解确界原理、单调收敛定理、闭区间套定理、Bolzano–Weierstrass 定理、柯西收敛准则是实数完备性的不同说法，能在 $\mathbb{Q}$ 中给出它们的反例。

7.1 子列：从发散数列里挑出收敛的部分

数列 $a_n = (-1)^n$ 不收敛，但它的偶数项 $1, 1, 1, \ldots$ 收敛，奇数项 $-1, -1, -1, \ldots$ 也收敛。数列 $\sin n$ 的项在 $[-1, 1]$ 里来回跳，看不出规律，它有没有收敛的部分？本讲回答这类问题。核心结论是：**有界数列总能挑出一个收敛子列**。这个结论叫 Bolzano–Weierstrass 定理，后面的最值定理、紧性等存在性结论都要用到它。

先回顾子列的定义（第 5 讲）。

定义 7.1（子列） 设 $(a_n)_{n\geq 1}$ 是数列，$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 是一列严格递增的正整数。称数列 $(a_{n_k})_{k\geq 1}$，即 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$，为 (a_n) 的一个**子列**（subsequence）。

子列就是「按原来的顺序，跳着取无穷多项」。下标 k 是子列自己的编号，n_k 是这一项在原数列中的位置。严格递增保证了两点：项的先后次序不变，每一项至多取一次。由 $n_1 \geq 1$ 和

$n_{k+1} \geq n_k + 1$，归纳得到

$$n_k \geq k \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

这个不等式很简单，却是「子列继承极限」的关键。

定理 7.2（子列继承极限）　若 $a_n \to L$，则 (a_n) 的每个子列都收敛到 L。

证明　任给 $\varepsilon > 0$，取 N 使 $n \geq N$ 时 $|a_n - L| < \varepsilon$。当 $k \geq N$ 时 $n_k \geq k \geq N$，所以 $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$。 ■

取逆否命题，就得到判断发散的常用方法。

推论 7.3（用子列判别发散）　若 (a_n) 有两个子列收敛到不同的极限，或者有一个子列发散，则 (a_n) 发散。

例如 $(-1)^n$ 的偶数项子列趋于 1，奇数项子列趋于 -1，所以它发散。

易错提醒　定理 7.2 不能倒过来用：**有一个子列收敛，推不出原数列收敛**。$(-1)^n$ 的偶数项子列收敛，原数列却发散。即使两个子列收敛到同一个数也不够：令 $a_n = 1$（$3 \mid n$），$a_n = 0$（$3 \nmid n$），则子列 (a_{3k+1}) 与 (a_{3k+2}) 都趋于 0，但 (a_{3k}) 趋于 1。若这几个子列的下标合起来覆盖了从某项起的所有正整数，就能推出全列也收敛到这个共同极限（练习 **7.1**）。

■ **例 7.1　只取有限个值的数列**　（习题集 2 第 4 题）对 $a_n = \sin \frac{n\pi}{8}$，找出一个收敛子列和一个单调子列。

解　$\sin$ 以 2π 为周期，所以 $a_{n+16} = a_n$，数列只取 $a_1, \dots, a_{16}$ 这有限个值。具体是

$$0, \quad \pm\sin\tfrac{\pi}{8} \approx \pm 0.3827, \quad \pm\sin\tfrac{\pi}{4} \approx \pm 0.7071, \quad \pm\sin\tfrac{3\pi}{8} \approx \pm 0.9239, \quad \pm 1,$$

共 9 个值。取 $n_k = 16k$，则 $a_{n_k} = \sin(2k\pi) = 0$ 对所有 k 成立。常数列既收敛，又单调（既单调递增也单调递减），所以它同时满足两个要求。取 $n_k = 16k + 4$ 得到另一个常数子列 $a_{n_k} = \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$。

一般地，**只取有限个值的数列一定有常数子列**。无穷多个下标分给有限个值，至少有一个值被无穷多个下标取到。把这些下标从小到大排好，就是所求的 $n_1 < n_2 < \cdots$。 ♦

最后一句话用到的「无穷版抽屉原理」是本讲的基本工具，单独写出来。

引理 7.4（无穷抽屉原理）　设 $S \subseteq \mathbb{N}$ 是无限集，$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$ 是有限个集合之并，则至少有一个 S_i 是无限集。特别地，若有无穷多个下标 n 使 $a_n \in A \cup B$，则有无穷多个 n 使 $a_n \in A$，或者有无穷多个 n 使 $a_n \in B$（也可能两者都成立）。

证明　若每个 S_i 都是有限集，元素个数为 s_i，则 S 的元素个数不超过 $s_1 + \cdots + s_m$，S 是有限集，矛盾。 ■

反过来，只要下标集 $S \subseteq \mathbb{N}$ 是无限集，就能从中取出子列：令 $n_1 = \min S$，$n_{k+1} = \min\{\, n \in S \mid n > n_k \,\}$。因为 S 无限，比 n_k 大的元素总存在，这个最小值总有定义。所以「有无穷多项落在集合 A 中」和「有一个子列整个落在 A 中」是同一件事。

7.2　Bolzano–Weierstrass 定理：二分法

定理 7.5（Bolzano–Weierstrass）　每个有界实数列都有收敛子列。

直观理解　往一条有限长的线段上放无穷多个点（允许重复），点不可能处处稀疏，总有某处堆积了无穷多个点。找这个堆积处的办法是二分：把线段对半分，至少有一半里仍有无穷多个点，留下这一半；再对半分，再留下有无穷多个点的一半……区间越缩越小，最后缩成一个点 x^*。每一步从当前区间里取一项，注意下标要越取越大，取出来的就是收敛到 x^* 的子列。

思路　分三步。(1) 造区间：反复二分，用引理 7.4 保证每个区间都含无穷多项，得到一串闭区间 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$，长度每次减半。(2) 选下标：在 I_k 中取一项 a_{n_k}，并且要求 $n_k > n_{k-1}$。(3) 证收敛：由闭区间套定理（第 6 讲），这些区间有唯一公共点 x^*；a_{n_k} 与 x^* 同在 I_k 中，距离不超过 I_k 的长度。

证明　设 $a \le a_n \le b$ 对所有 n 成立。

造区间。令 $I_1 = [\alpha_1, \beta_1] = [a, b]$，它含有全部项。设已有闭区间 $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$，并且有无穷多个 n 使 $a_n \in I_k$。取中点 $\mu_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$，把 I_k 分成左半 $[\alpha_k, \mu_k]$ 与右半 $[\mu_k, \beta_k]$。由引理 7.4，至少有一半含有无穷多项，把它记作 $I_{k+1} = [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$（若两半都可以，约定取左半）。这样得到

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots, \qquad \beta_k - \alpha_k = \frac{b-a}{2^{k-1}},$$

并且每个 I_k 都含有无穷多项。

选下标。令 $n_1 = 1$，则 $a_{n_1} \in I_1$。设已选好 $n_1 < \cdots < n_k$，且 $a_{n_k} \in I_k$。I_{k+1} 含有无穷多项，而不超过 n_k 的下标只有有限个，所以存在 $n > n_k$ 使 $a_n \in I_{k+1}$，取其中最小的作为 n_{k+1}。于是 $n_1 < n_2 < \cdots$，并且 $a_{n_k} \in I_k$ 对所有 k 成立。

证收敛。区间长度 $\frac{b-a}{2^{k-1}} \to 0$。由闭区间套定理，存在唯一的 x^* 属于所有 I_k。对每个 k，a_{n_k} 和 x^* 都在 I_k 中，所以

$$|a_{n_k} - x^*| \le \beta_k - \alpha_k = \frac{b-a}{2^{k-1}} \le \frac{b-a}{k}.$$

（最后一步用了 $2^{k-1} \ge k$，可归纳验证。）任给 $\varepsilon > 0$，由阿基米德性质取 $K > \frac{b-a}{\varepsilon}$，则 $k \ge K$ 时 $|a_{n_k} - x^*| < \varepsilon$。所以 $a_{n_k} \to x^*$。 ∎

证明里只有一处用到实数的完备性：闭区间套定理保证了 x^* 存在。在 $\mathbb{Q}$ 中，二分得到的区间可能没有有理数公共点，§7.6 会给出这样的例子。Colding 讲义先假定初始区间为 $[0, 1]$，写法略有不同：先说明 $i, j \ge k$ 时 a_{n_i}, a_{n_j} 同在区间 I_k 里，区间长度为 2^{1-k}。于是

$$|a_{n_i} - a_{n_j}| \le 2^{1-k},$$

所以子列是柯西列；再用左端点 α_k（递增）与右端点 β_k（递减）把子列夹住，用单调收敛定理求出极限。两种写法用的是同一组区间。

例 7.2　把二分法走一遍　对 $a_n=(-1)^n\bigl(1-\frac{1}{n}\bigr)$ 执行上面的证明（两半都含无穷多项时取左半），写出前几个区间 I_k、下标 n_k 和子列的极限。

解　前 12 项是

$$0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ -\frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ -\frac{8}{9},\ \frac{9}{10},\ -\frac{10}{11},\ \frac{11}{12}.$$

奇数项非正，从 0 往 -1 走；偶数项为正，往 1 走。所有项都在 $[-1,1]$ 中，取 $I_1=[-1,1]$。

*哪一半含无穷多项？*归纳可知 $I_k=[-1,\,-1+2^{2-k}]$，它的左半是 $[-1,\,-1+2^{1-k}]$。当 n 为奇数时 $a_n=-1+\frac{1}{n}$，它落在左半里当且仅当 $\frac{1}{n}\le 2^{1-k}$，即 $n\ge 2^{k-1}$。这样的奇数有无穷多个，所以每一步都取左半，得到 $I_{k+1}=[-1,\,-1+2^{1-k}]$，与归纳假设一致。

选下标。 n_{k+1} 是大于 n_k、且 $a_n\in I_{k+1}$ 的最小下标。偶数项都是正数，不在 I_2 以后的区间里，所以只能取奇数项。逐步计算得到表 7.1。例如 $I_6=[-1,-\frac{15}{16}]$ 要求奇数 $n\ge 16$ 且 $n>9$，所以 $n_6=17$。

k	1	2	3	4	5	6	7	8
I_k 的右端点	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{31}{32}$	$-\frac{63}{64}$
n_k	1	3	5	7	9	17	33	65
a_{n_k}	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{8}{9}$	$-\frac{16}{17}$	$-\frac{32}{33}$	$-\frac{64}{65}$

表 7.1　二分法作用于 $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$。所有 I_k 的左端点都是 -1。

极限。 $\bigcap_k I_k=\{-1\}$，所以 $x^*=-1$，$a_{n_k}\to -1$。误差界 $|a_{n_k}-x^*|\le 2^{2-k}$ 也可以核对：$k=8$ 时 $|-\frac{64}{65}+1|=\frac{1}{65}\approx 0.0154$，不超过 $2^{-6}=0.015625$。 ♦

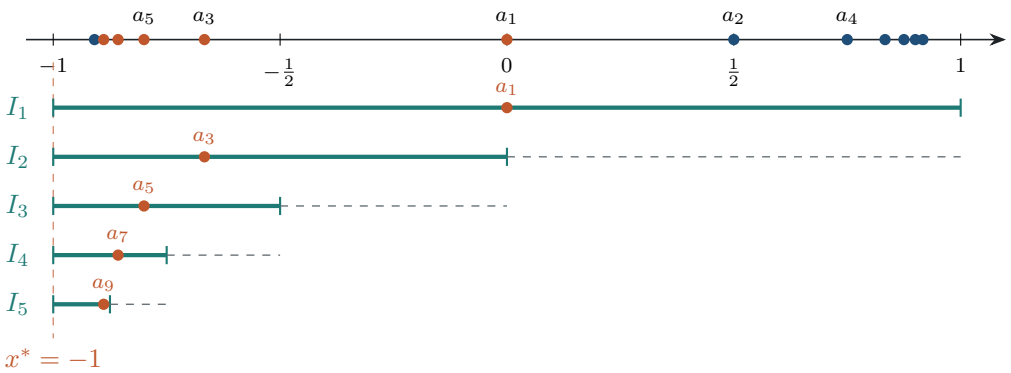


图 7.1　对 $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$ 做二分。上：数轴上的前 12 项，橙点是被选进子列的项。下：青色实线是区间 $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots\supseteq I_5$，灰色虚线是每一步舍弃的那一半；第 k 行的橙点是 $a_{n_k}\in I_k$。区间缩向 $x^*=-1$。

图 7.1 把抽取过程分成上下两部分：原数列仍在两端振荡，选出的橙点却逐步留在越来越短的左端区间。一个有界数列可以有不止一个子列极限；二分时的选择只需要找到其中一个。

想一想　「某个区间里有无穷多个点」能不能改成「这个区间里有很多不同的数值」?
答　不能。常数列 $a_n = 2$ 只取一个数值，却有无穷多个下标。抽取子列需要不断找到更大的下标，因此证明中始终数的是下标。即使某个数值反复出现，也必须保留它每一次出现的位置。

7.3　单调子列与全部子列极限

二分法需要有界区间。另一个证明先对任意实数列抽取单调子列，再在有界情形使用第 6 讲的单调收敛定理。这里的「单调」允许相等。

定义 7.6（峰点下标）　若 $a_n \geq a_m$ 对每个 $m > n$ 都成立，称 n 是数列的一个**峰点下标**（peak index）。比较的是这个位置与它后面的所有项。

例如 $a_n = 1/n$ 的每个下标都是峰点；$a_n = 1 - 1/n$ 没有峰点；常数列的每个下标也是峰点。「局部高于左右邻项」不够，因为更远处仍可能出现更大的项。

定理 7.7（单调子列定理）　每个实数列都存在一个单调子列。

证明　分两种情形。若峰点下标有无穷多个，把它们递增排列为 $n_1 < n_2 < \cdots$。因为 n_k 是峰点且 $n_{k+1} > n_k$，有 $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$，所得子列单调递减。

若峰点下标只有有限多个，取 N 大于所有峰点下标；没有峰点时取 $N = 1$。令 $n_1 = N$。因为 n_1 不是峰点，存在 $n_2 > n_1$ 使 $a_{n_2} > a_{n_1}$。已经选出 $n_k \geq N$ 后，n_k 也不是峰点，所以存在 $n_{k+1} > n_k$ 使 $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$。递归进行得到严格递增子列。两种情形覆盖了全部可能。 ■

若原列有界，子列仍有界；单调收敛定理于是保证这个单调子列收敛。这就给出了 Bolzano–Weierstrass 定理的第二个证明。峰点论证本身没有使用完备性，完备性用在最后的单调收敛一步。

■ **例 7.3　单调子列不一定收敛**　（习题集 2 第 4 题）对 $a_n = (-1)^n n$，找出单调子列，并判断是否有收敛子列。

解　偶数项为 $a_{2k} = 2k$，严格递增；奇数项为 $a_{2k-1} = -(2k-1)$，严格递减。两者都没有有限极限。更强地，对任意子列都有 $|a_{n_k}| = n_k \geq k$，故它无界，不能收敛。这说明有界性在 Bolzano–Weierstrass 定理中不可删除。它也解释了两个定理的区别：单调子列总能找到，有限极限需要额外保证。 ♦

定义 7.8（子列极限）　若存在子列 $a_{n_k} \to L$，称实数 L 为 (a_n) 的一个**子列极限**（subsequential limit）。全体子列极限组成的集合记为 $C(a)$。

例如常数列 $a_n = 2$ 的集合 $C(a) = \{2\}$；$(-1)^n$ 的集合是 $\{-1, 1\}$；上例的集合为空。无界数列也可能有子列极限，例如偶数项为 0、奇数项为其下标的数列，$C(a) = \{0\}$。存在一个子列极

限与全列有界是不同的条件。

求 $C(a)$ 要做两件事：对列出的每个数造出子列，并排除其他数。仅仅找到两条子列，还没有证明答案完整。

■ **例 7.4　扰动后的两条分支**　求 $a_n=(-1)^n+1/n$ 的全部子列极限。

解　偶数项 $a_{2k}=1+1/(2k)\to 1$；奇数项 $a_{2k-1}=-1+1/(2k-1)\to -1$，所以 $\{-1,1\}\subseteq C(a)$。

反过来，设 $a_{n_k}\to L$。下标 n_k 中至少有无穷多个偶数或无穷多个奇数。如果有无穷多个偶数，进一步抽出的子列同时趋于 L 和 1，由极限唯一性得 $L=1$。如果偶数只有有限多个，剩余下标全为奇数，于是 $L=-1$。因此 $C(a)=\{-1,1\}$。原列发散，但两条分支各自收敛。前六项为 $0,\frac{3}{2},-\frac{2}{3},\frac{5}{4},-\frac{4}{5},\frac{7}{6}$。 ♦

若 $a_n\in[u,v]$，任何子列极限也在 $[u,v]$ 中。证明可直接用极限保序；也可反证：若 $L>v$，取 $\varepsilon=(L-v)/2$，收敛子列最终大于 $L-\varepsilon=(L+v)/2>v$，矛盾；$L<u$ 时取 $\varepsilon=(u-L)/2$。闭端点不能换成开端点：$1/n\in(0,2)$，却趋于不在开区间里的 0。

定理 7.9（有界列的唯一子列极限）　有界实数列 a_n 收敛到 L，当且仅当 $C(a)=\{L\}$。

证明　若全列收敛到 L，每条子列都趋于 L，全列本身也是一条子列，所以 $C(a)=\{L\}$。

反过来，设 $C(a)=\{L\}$ 而全列不趋于 L。否定极限定义，存在固定的 $\varepsilon_0>0$，对每个 N 都有 $n\ge N$ 使 $|a_n-L|\ge\varepsilon_0$。逐次取 $N=n_{k-1}+1$，得到子列 (a_{n_k})，每项到 L 的距离都至少是 ε_0。这条子列有界，由 Bolzano–Weierstrass 再抽出收敛子列 $a_{n_{k_j}}\to M$。它也是原列的子列，所以 $M=L$，与距离始终至少为 ε_0 矛盾。 ■

易错提醒　「只有一个子列极限」若缺少有界条件，不能推出收敛。令 $a_{2k}=0$、$a_{2k-1}=k$。任何收敛子列只能含有限个奇数下标，否则再取这些奇数下标会得到趋向无穷大的子列；所以唯一子列极限是 0。但原列无界，当然不收敛。定理 7.9 中，有界性保证被排除在 L 附近之外的那条子列仍能抽出有限极限。

7.4　柯西充分性与可计算的误差

第 6 讲证明了收敛列必为柯西列，也证明了柯西列有界。还剩一个方向：如果不知道极限是什么，能否只凭尾部的项互相接近就保证极限存在？有界性先给出一个候选极限，柯西性再把全列带到同一个候选极限。

引理 7.10（一条收敛子列足够）　若 (a_n) 是柯西列，且有子列 $a_{n_k}\to L$，则 $a_n\to L$。

证明　任给 $\varepsilon>0$。由柯西性取 N，使 $m,n\ge N$ 时 $|a_n-a_m|<\varepsilon/2$。由子列收敛，取一个固定

的 K 足够大，同时满足 $K \geq N$ 和 $|a_{n_K} - L| < \varepsilon/2$。因为 $n_K \geq K \geq N$，任意 $n \geq N$ 都有

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_K}| + |a_{n_K} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这里先固定桥接项 a_{n_K}，再让 n 遍历整个尾部，故得到的是全列收敛。 ■

定理 7.11（实数列的柯西收敛准则）　实数列收敛，当且仅当它是柯西列，即

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N, \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

证明　必要性已在第 6 讲证明：用 $\varepsilon/2$ 分别控制两项到极限的距离。证明充分性时，柯西列先由第 6 讲的有界性结论得到有界，再由 Bolzano–Weierstrass 定理得到一条收敛子列，最后应用引理 7.10。所用的 Bolzano–Weierstrass 定理来自单调收敛或闭区间套，没有使用这里待证的充分性。 ■

核心思想　**有界性给候选极限，柯西性控制整个尾部。**「存在一条收敛子列」本身不能控制没选到的项；柯西条件补上了这种控制。

想一想　证明中既有 K，又有 n_K，为什么只要求 $K \geq N$ 就够了？

答　子列下标严格递增，所以 $n_K \geq K$。于是 $K \geq N$ 自动保证桥接项在原列的第 N 项以后。K 还必须足够大，以保证子列到 L 的误差小于 $\varepsilon/2$；这两个要求可以同时满足。若只写「取一条靠近 L 的项」，却没有检查它是否在柯西尾部，三角不等式中的第一项就没有依据。

■ **例 7.5　交错倒数的部分和**　令 $s_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}/j$。不预先知道极限值，证明 (s_n) 收敛。

解　固定 $m > n$。尾和从大小为 $1/(n+1)$ 的一项开始，随后符号交替且绝对值递减。将尾和乘以首项的符号，再把相邻两项配对，可以看出它不小于 0；把首项留出、余项按相反方式配对，又可看出它不超过 $1/(n+1)$。无论尾项个数为奇数还是偶数，未配对项的符号都符合这两个界。因此

$$|s_m - s_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/\varepsilon$。若 $m, n \geq N$，交换两者次序后可用上式，得到 $|s_m - s_n| < \varepsilon$；两者相等时距离为 0。于是 (s_n) 为柯西列，由准则收敛。前四项为 $1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$。本讲只证明有限尾和的估计；第 8 讲再系统讨论无穷级数。 ♦

易错提醒　相邻两项的距离趋于 0 还不够。取 $h_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$，则 $h_{n+1} - h_n = 1/(n+1) \to 0$，但

$$h_{2n} - h_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

任意尾部都有距离至少为 $1/2$ 的两项，故它不是柯西列。柯西条件同时控制任意两个足够大的下标，不能只检查相邻下标。

若相邻差有一个可累加的统一上界，情况就不同。几何衰减给出最直接的例子。

定理 7.12（压缩数列与误差界）　设 $0 < c < 1$，且对所有 $n \geq 2$ 有 $|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$。记 $d = |a_2 - a_1|$，则 (a_n) 收敛到某个 L，并且

$$|L - a_n| \leq \frac{dc^{n-1}}{1-c} \qquad (n \geq 1).$$

若 $c = 0$，则从 a_2 起数列恒定，同样收敛。

证明　归纳得 $|a_{j+1} - a_j| \leq dc^{j-1}$。若 $m > n$，三角不等式与有限等比和给出

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |a_{j+1} - a_j| \leq dc^{n-1} \frac{1 - c^{m-n}}{1-c} \leq \frac{dc^{n-1}}{1-c}.$$

右端随 n 趋于 0，与 m 无关，所以 (a_n) 是柯西列，存在极限 L。固定 n，令 $m \to \infty$，由极限保序及绝对值的极限法则得到误差界。若 $c = 0$，条件直接给出 $a_{n+1} = a_n$（$n \geq 2$），无须处理 0^0。 ■

■ **例 7.6　先有误差保证，再辨认极限**　令 $a_1 = 0$，$a_{n+1} = (a_n + 2)/3$。证明收敛，求极限，并给出误差不超过 $1/1000$ 所需的项数。

解　递推式相减得 $a_{n+1} - a_n = (a_n - a_{n-1})/3$，所以可取 $c = 1/3$、$d = 2/3$。压缩数列定理保证存在极限；此后才在递推式中取极限，得 $L = (L + 2)/3$，即 $L = 1$。误差界为

$$|a_n - 1| \leq \frac{(2/3)(1/3)^{n-1}}{1 - 1/3} = 3^{1-n}.$$

$3^6 = 729 < 1000 < 2187 = 3^7$，所以 $n = 8$ 已保证误差小于 $1/1000$。事实上 $a_n = 1 - 3^{1-n}$，可由归纳直接验证；故这里的误差界取到了等号。前五项为 $0, 2/3, 8/9, 26/27, 80/81$，见图 7.2。直接解方程只能找出可能的极限，收敛性的证明仍需上述估计。 ♦

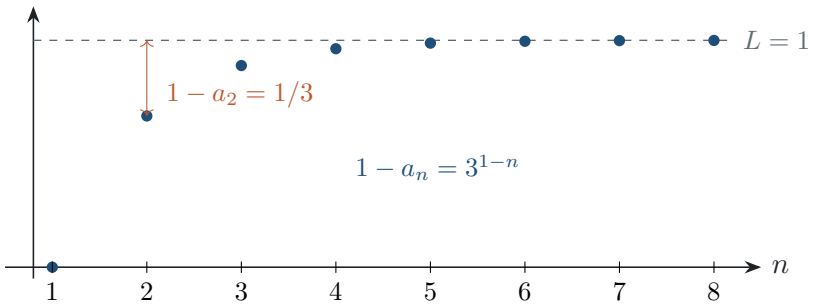


图 7.2　递推 $a_{n+1} = (a_n + 2)/3$ 的前八项。每次迭代把到 1 的距离缩小为原来的 $1/3$；第八项的误差为 $1/2187$。

图中后几项肉眼已经很难与 1 区分，误差公式仍能给出精确保证。压缩估计的用途正是把「看起来靠近」变成给定精度所需的明确项数。

7.5　无理数倍的小数部分：从值到子列

习题集 4 第 5 题把有界性、有限抽屉原理和子列下标结合在一起。记 $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ 为小数部分，研究

$$a_n=\{n\sqrt{2}\}=n\sqrt{2}-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor.$$

因为 $n\sqrt{2}$ 无理，$0<a_n<1$；不同下标取值不同，否则相减会使一个非零整数乘 $\sqrt{2}$ 成为整数。Bolzano–Weierstrass 立刻保证存在收敛子列。但它没有告诉我们极限是什么，接下来的目标是证明 1 确实是一个子列极限。

例 7.7　一个小值产生一个大值　设 $N\in\mathbb{N}$，已有 m 满足 $0<a_m<1/N$。证明存在 n 使 $a_n>1-1/N$，并在 $m=5$ 时演算。

解　记 $m\sqrt{2}=p+\delta$，其中 $p\in\mathbb{Z}$、$\delta=a_m$。令 $k=\lfloor 1/\delta\rfloor$。由于 δ 无理，$1/\delta$ 不是整数，故

$$\frac{1}{\delta}-1<k<\frac{1}{\delta},\qquad 1-\delta<k\delta<1.$$

于是 $km\sqrt{2}=kp+k\delta$ 的小数部分就是 $k\delta$，因为它还没有跨过 1。取 $n=km$ 得

$$a_n=k\delta>1-\delta>1-\frac{1}{N}.$$

例如 $a_5=5\sqrt{2}-7\approx 0.071068$，所以 $k=14$，$n=70$，并且 $a_{70}=70\sqrt{2}-98\approx 0.994949$。取 $N=10$，这给出了 $a_5<0.1$ 与 $a_{70}>0.9$。选择 k 的关键是尽量靠近 1，又始终保持 $k\delta<1$；若随意增加 k，小数部分可能越过 1 后重新接近 0。 ♦

现在需要先找到一个足够接近端点的值。有限抽屉原理能给出这个保证，却未必直接给出靠近 0 的值；取差时必须区分符号。

> **引理 7.13（靠近上端点的值总存在）**　对每个 $N\in\mathbb{N}$，存在正整数 n，使 $a_n>1-1/N$。

证明　将 $[0,1)$ 分成 N 个半开区间 $[r/N,(r+1)/N)$，$r=0,\dots,N-1$。把 $N+1$ 个数 $a_1,\dots,a_{N+1}$ 放进去，至少两个落在同一区间。记对应下标为 $i<j$，则 $0<|a_j-a_i|<1/N$。严格大于 0 来自不同下标取值不同。

写 $i\sqrt{2}=p_i+a_i$、$j\sqrt{2}=p_j+a_j$，相减可得 $(j-i)\sqrt{2}=(p_j-p_i)+(a_j-a_i)$。若 $a_j>a_i$，差值在 $(0,1/N)$ 内，故 $a_{j-i}=a_j-a_i$，由例 7.7 得到靠近 1 的值。若 $a_j<a_i$，差值为负且大于 $-1/N$，需要向下取整，故

$$a_{j-i}=1+a_j-a_i>1-1/N.$$

两种情形都给出结论。半开分割保证同一格中任意两点的距离严格小于格长，端点不会造成等号。 ■

例 7.8　近似值序列如何变成子列　证明 $(\{n\sqrt{2}\})$ 有一条子列趋于 1。

解　由引理，对每个 k 选一个值 b_k 属于值集合 $E=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$，并满足 $1-1/k<b_k<1$。夹逼定理给出 $b_k\to 1$。但这一步还没有构造原列的子列：选到的原下标可能重复，也可能不递增。下面直接修正下标。

置 $n_0=0$。已经选出 n_{k-1} 后，令

$$\eta_k=\min\bigl(\{1/k\}\cup\{1-a_j : 1\le j\le n_{k-1}\}\bigr)>0.$$

每个 $a_j<1$，所以有限个正数的最小值仍为正；$k=1$ 时第二个集合为空，得到 $\eta_1=1$。由 $b_\ell\to 1$，存在某个 $b_\ell=a_n$ 满足 $0<1-a_n<\eta_k$。若 $n\le n_{k-1}$，定义又给出 $\eta_k\le 1-a_n$，矛盾。因此这个下标必大于 n_{k-1}，把它记为 n_k。

这样 $n_1<n_2<\cdots$，且 $0<1-a_{n_k}<1/k$。所以真正的子列 $a_{n_k}\to 1$。这里 $1\notin E$ 是排除有限个旧下标的关键。 ♦

上述最后一步可以提炼成一般原则：若 E 是某数列的值集合，$b_k\in E$ 且 $b_k\to L$，同时 $L\notin E$，则原数列有子列趋于 L。证明把 $1-a_j$ 换成 $|L-a_j|$，其余步骤完全相同。条件 $L\notin E$ 是这个原则的充分条件；若删去，结论可能失败：$a_1=0$、$a_n=1$（$n\ge 2$）的值集合含 0，常数值序列 $b_k=0$ 趋于 0，原列却没有趋于 0 的子列。孤立的一次取值不能反复充当子列的不同项。

想一想　能否在 $|L-a_{n_k}|<1/k$ 中任意选择原下标，然后把这些下标重新排序？

答　不能只这样写。任意选择可能反复使用同一个下标；若极限属于值集合，甚至可能只使用这一项。即使所有下标不同，也要说明重新排序后误差仍趋于 0。上面的递归在每一步先排除所有旧下标，并直接保证误差小于 $1/k$，就同时处理了这两个问题。

7.6　实数完备性的几个等价形式

现在回看证明之间的依赖。域的四则运算和序关系不足以保证极限留在数系内部；还需要完备性。为准确说明「等价」，在以下讨论中固定一个阿基米德有序域 F：任意 $x\in F$ 都存在正整数 $n>x$。所有区间、数列和上确界都要求在 F 内取值。下面的五个性质等价：

(1) 确界原理：非空且有上界的集合有上确界。

(2) 单调收敛：每个单调有界数列都收敛。

(3) 闭区间套：嵌套非空闭区间且长度趋于 0，有唯一公共点。

(4) Bolzano–Weierstrass：每个有界数列有收敛子列。

(5) 柯西完备性：每个柯西列都收敛。

前三个蕴含方向已有完整证明：确界原理推出单调收敛见第 6 讲；单调收敛推出闭区间套也见第 6 讲（左右端点分别收敛）；闭区间套推出 Bolzano–Weierstrass 是本讲二分证明；Bolzano–Weierstrass 推出柯西完备性是本讲的柯西准则。要得到等价，还必须补上从最后一个性质回到第一个性质，不能只列这些单向箭头。

定理 7.14（由柯西完备性恢复确界原理）　阿基米德有序域 F 若满足柯西完备性，则其中每个非空有上界的集合都有上确界。

证明　设 $S \subseteq F$ 非空且有上界。取 $s_0 \in S$ 和一个上界 u。令 $l = s_0 - 1$，则 l 不是上界，$l < u$。构造区间 $[l_n, u_n]$，初值 $l_1 = l$、$u_1 = u$。保持 l_n 不是 S 的上界、u_n 是上界。取中点 $t = (l_n + u_n)/2$：若 t 是上界，取 $l_{n+1} = l_n, u_{n+1} = t$；否则取 $l_{n+1} = t, u_{n+1} = u_n$。每一步都保持所需性质，并使长度减半。

当 $m \geq n$，两端点都落在 $[l_n, u_n]$ 内，所以

$$|l_m - l_n| \leq \frac{u-l}{2^{n-1}}, \qquad |u_m - u_n| \leq \frac{u-l}{2^{n-1}}.$$

阿基米德性质保证这些上界趋于 0，因此两列都是柯西列。由假设，$l_n \to x$、$u_n \to y$，且 $u_n - l_n \to 0$，从而 $x = y$。

对任意 $s \in S$，始终 $s \leq u_n$，保序取极限得 $s \leq x$，所以 x 是上界。若 $z < x$，由 $l_n \to x$ 可取 n 使 $l_n > z$。因为 l_n 不是上界，存在 $s \in S$ 满足 $s > l_n > z$，所以 z 不是上界。这证明 x 是最小上界。 ■

这个证明没有假定 F 已嵌入实数并在实数中取极限。所需的极限由 F 自己的柯西完备性产生，因而没有借用待证的确界性质。

■ **例 7.9　有理数中同时失效的性质**　用逼近 $\sqrt{2}$ 的有理数说明：有序域 $\mathbb{Q}$ 虽有阿基米德性质，却不满足上述五个等价条件。

解　为了描述反例，允许在环境实数中记 $r = \sqrt{2}$。令

$$q_n = \frac{\lfloor 10^n r \rfloor}{10^n}, \qquad J_n = [q_n, q_n + 10^{-n}] \cap \mathbb{Q}.$$

前几项为 $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142$。每个端点都在 $\mathbb{Q}$ 中，且 $0 < r - q_n < 10^{-n}$。q_n 单调递增、上界可取 2；相应右端点单调递减，因此 $J_{n+1} \subseteq J_n$，长度趋于 0。

对 $m \geq n$ 有 $|q_m - q_n| < 10^{-n}$，所以它在 $\mathbb{Q}$ 中是柯西列。但若它收敛到某个 $q \in \mathbb{Q}$，同一列放在 $\mathbb{R}$ 中仍会趋于 q；它在 $\mathbb{R}$ 中已经趋于 r，由唯一性得 $q = r$，与 $\sqrt{2}$ 无理矛盾。这同时否定了有理数中的单调收敛与柯西完备性。

任何子列在 $\mathbb{R}$ 中也趋于 r，故不可能有有理极限。这否定了有理数中的 Bolzano–Weierstrass 性质。若有 $q \in \bigcap_n J_n$，则 $|q - r| \leq 10^{-n}$ 对每个 n 成立，阿基米德性质迫使 $q = r$，矛盾，所以这些非空有理闭区间的交集为空。

最后，令 $S = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$。它非空且有上界 2。若有有理上确界 s，则因所有 $q_n \in S$，有 $s \geq q_n$，在 $\mathbb{R}$ 中取极限得 $s \geq r$。若 $s > r$，由有理数稠密性可取有理数 t 满足 $r < t < s$；所有 $q \in S$ 都小于 r，故 t 也是上界，违背 s 最小。于是 $s = r \notin \mathbb{Q}$，矛盾。五个性质全部失效。 ♦

实数的完备性保证这些逼近过程的结果仍是一个实数。下一讲讨论级数时，部分和通常不知道极限的显式表达式；柯西准则允许直接估计有限尾和，这正是本讲结论的重要用途。

本讲小结

- **子列下标**严格递增，故 $n_k \ge k$；$a_n \to L$ 推出每条子列都趋于 L。
- **Bolzano–Weierstrass**：有界实数列必有收敛子列；二分区间给出误差 $|a_{n_k} - x^*| \le (b-a)/2^{k-1}$。
- **峰点法**证明任意数列有单调子列；有界时再用单调收敛得到有限极限。
- 有界列满足**唯一子列极限** $C(a) = \{L\}$，当且仅当 $a_n \to L$。
- **柯西准则**：$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \ge N,\ |a_m - a_n| < \varepsilon$，等价于实数列收敛。
- **几何差分界** $|a_{n+1} - a_n| \le c|a_n - a_{n-1}|$、$0 < c < 1$，给出 $|L - a_n| \le |a_2 - a_1| c^{n-1}/(1-c)$。
- 在**阿基米德有序域**中，确界、单调收敛、缩短闭区间套、Bolzano–Weierstrass 与柯西完备性等价。

练习

7.1 ★ 若 $a_{2k} \to L$ 且 $a_{2k-1} \to L$，证明 $a_n \to L$。若两个极限不同，结论如何？

7.2 ★ 求 $a_n = \cos(n\pi/2) + 1/n$ 的全部子列极限，并判断全列是否收敛。

7.3 ★ 证明数列 $a_n = 2 - 1/n$ 没有峰点下标，而 $b_n = 2 + 1/n$ 的每个下标都是峰点。

7.4 ★★ 若有界列的所有收敛子列极限都等于 0，证明它收敛到 0；再给出去掉有界条件的反例。

7.5 ★★ （习题集 2 第 3 题）证明 L 是子列极限，当且仅当每个 $\varepsilon > 0$ 的邻域 $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ 都含无穷多个原下标对应的项。

7.6 ★★ 令 $a_1 = 2$、$a_{n+1} = (a_n + 3)/4$。证明收敛、求极限，并求误差至多 $1/1000$ 所需的最小下标。

7.7 ★★ 若 $|a_{n+1} - a_n| \le 1/[n(n+1)]$ 对所有 $n \ge 1$ 成立，证明 (a_n) 收敛，并给出 $|L - a_n|$ 的上界。

7.8 ★★ （习题集 4 第 5 题的延伸）对 $a_n = \{n\sqrt{2}\}$，已知 $\delta = a_m > 1 - 1/N$，其中 $N \ge 2$。证明存在 n 使 $0 < a_n < 1/N$，进而构造趋于 0 的子列。

7.9 ★★★ 若 (a_n) 有界且没有任何一条子列趋于 0，证明存在 $\eta > 0$ 和 N，使 $n \ge N$ 时 $|a_n| \ge \eta$。这个结论是否需要有界？

7.10 ★★★ 若 $C(a) \ne \varnothing$，$L_j \in C(a)$ 且 $L_j \to L$，证明 $L \in C(a)$。不假定原数列有界。

练习答案与提示

7.1 任给 $\varepsilon > 0$，取 K_1, K_2，使偶数项在 $k \ge K_1$ 时、奇数项在 $k \ge K_2$ 时都距 L 小于 ε。令 $K = \max(K_1, K_2)$，$n \ge 2K$。若 $n = 2k$ 则 $k \ge K$；若 $n = 2k-1$ 则 $k \ge K+1$，两种情形都得到 $|a_n - L| < \varepsilon$。若两极限不同，子列继承极限与唯一性说明全列发散。

7.2 按下标模 4 分类：$a_{4k} \to 1$，$a_{4k+2} \to -1$，两类奇数下标都趋于 0，故 $\{-1, 0, 1\} \subseteq C(a)$。任意收

敛子列的下标中，模 4 的某一类出现无穷多次，再抽取该类就得到上述三个极限之一；唯一性排除了其余可能。所以 $C(a)=\{-1,0,1\}$，全列发散。

7.3 对任意 n，$a_{n+1}>a_n$，已有一个更靠后的项超过 a_n，所以 n 不是峰点。对任意 $m>n$，$1/m<1/n$，故 $b_m<b_n$，正好符合峰点定义。

7.4 Bolzano–Weierstrass 保证 $C(a)$ 非空，所以题设给出 $C(a)=\{0\}$。用定理 7.9 得全列趋于 0。也可反证：若有无穷多个下标满足 $|a_n|\ge\varepsilon_0$，由有界性从它们中抽出极限 M，保序得 $|M|\ge\varepsilon_0$，与题设矛盾。反例为 $a_{2k}=0$、$a_{2k-1}=k$，唯一子列极限为 0，但全列无界。

7.5 必要性：若 $a_{n_k}\to L$，每个邻域包含子列的全部充分靠后项，故含无穷多个原下标。充分性：置 $n_0=0$；第 k 步在满足 $|a_n-L|<1/k$ 的无穷多个下标中取一个 $n_k>n_{k-1}$。于是严格递增且误差趋于 0。这里必须强调下标数目；如果只有一个原位置取到 L，无穷次重用该值不能构成子列。

7.6 相减得差分比为 $1/4$，$d=|5/4-2|=3/4$，压缩定理给出收敛及误差 4^{1-n}。极限方程 $L=(L+3)/4$ 给出 $L=1$。归纳验证 $a_n=1+4^{1-n}$，所以误差正是 4^{1-n}。由于 $4^4=256<1000<1024=4^5$，最小下标为 $n=6$，误差为 $1/1024$。前四项为 $2,5/4,17/16,65/64$。

7.7 对 $m>n$，望远镜求和得

$$|a_m-a_n|\le\sum_{j=n}^{m-1}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}.$$

所以数列为柯西列，存在极限 L。固定 n 再令 $m\to\infty$ 得 $|L-a_n|\le 1/n$。这里只要求差分的上界，不要求数列单调。

7.8 令 $\varepsilon=1-\delta$，则 $0<\varepsilon<1/N$ 且 ε 无理。取 $k=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor$，得到 $1-\varepsilon<k\varepsilon<1$。因为 $m\sqrt{2}$ 的小数部分为 $1-\varepsilon$，$km\sqrt{2}$ 的小数部分为 $1-k\varepsilon\in(0,\varepsilon)$。取 $n=km$，即得到 $0<a_n<1/N$。对任意精度先用引理 7.13 找到靠近 1 的值，再用此结论找到靠近 0 的值。因 0 不属于值集合，按照例 7.8 中排除有限旧下标的办法，可取严格递增的 n_k 满足 $0<a_{n_k}<1/k$，从而趋于 0。

7.9 若结论不成立，则对每个 $\eta>0$ 和每个 N 都存在 $n\ge N$，使 $|a_n|<\eta$。取 $\eta=1/k$ 并递归要求 $n_k>n_{k-1}$，便得到趋于 0 的子列，与题设矛盾。这个证明没有使用有界性，因此结论不需要有界条件。它实际上是上一题邻域刻画的逆否命题。

7.10 置 $n_0=0$。因为每个 L_j 都是子列极限，它的半径为 $1/j$ 的邻域含无穷多个原下标对应的项；可取 $n_j>n_{j-1}$ 且 $|a_{n_j}-L_j|<1/j$。于是

$$|a_{n_j}-L|\le\frac{1}{j}+|L_j-L|\longrightarrow 0.$$

所以 $a_{n_j}\to L$，即 $L\in C(a)$。这称为对子列极限进行对角抽取：每个阶段只取一项，并明确要求它晚于之前的项。

第 8 讲

级数与收敛判别法

Series and Convergence Tests

对应材料：MIT 18.100B Lecture 8 讲义（级数的开头部分在 Lecture 7 讲义后半已出现）；习题集 4 第 2、3、4 题；习题集 5 第 1 题。

本讲目标

(1) 把「无穷多个数相加」严格地理解为**部分和数列的极限**，熟练处理几何级数、裂项（望远镜）级数，并证明调和级数发散。

(2) 掌握通项检验（只是必要条件）、级数的 Cauchy 准则，以及「非负项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和有上界」。

(3) 会用两种比较判别法和 p 级数判断非负项级数的敛散性。

(4) 区分绝对收敛与条件收敛，会证明并使用交错级数判别法。

(5) 理解比值判别法与根值判别法都是「和几何级数比较」，知道它们在极限等于 1 时为何失效。

(6) 掌握上极限 $\limsup$ 的定义与 ε 刻画，并用它写出幂级数收敛半径的 Cauchy–Hadamard 公式，会逐个检查端点。

8.1 从数列到级数：部分和

「把无穷多个数加起来」是什么意思？古希腊的 Zeno 说：要走完 1 米，先走一半，再走剩下的一半，再走剩下的一半……于是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

似乎应该等于 1。可是同样「直观」的做法也会出问题。考虑 $1-1+1-1+\cdots$：

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0,\qquad 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1.$$

加括号的方式不同，得到的「和」就不同。可见有限和的运算规则不能不加分辨地搬到无穷和上。解决办法是：**每次只做有限次加法，然后取极限**。这样一来，级数的问题就完全化成了第 4–7 讲研究过的数列极限问题。

定义 8.1（级数与部分和）　设 $(a_n)_{n\ge 1}$ 是实数列。称

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

为第 n 个**部分和**（partial sum）。若数列 (s_n) 收敛于 $s \in \mathbb{R}$，就称**级数**（series）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**（converges），并记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$，称 s 为级数的**和**（sum）；若 (s_n) 发散，就称级数**发散**（diverges）。

符号 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有两重含义：它既表示「级数」这个对象（一个形式上的无穷和），也在收敛时表示它的和。求和下标也可以从 0 或别的整数开始，定义完全相同。

回到开头的两个例子。Zeno 级数的部分和是 $s_n = 1 - 2^{-n} \to 1$，所以 $\sum_{n\ge 1} 2^{-n} = 1$。级数 $1 - 1 + 1 - \cdots$ 的部分和是 $1, 0, 1, 0, \ldots$，不收敛，所以这个级数发散。两种加括号的方式，其实分别取了部分和数列的偶数项子列和奇数项子列；子列收敛推不出原数列收敛（第 7 讲），矛盾就此消解。

8.1.1　几何级数

几何级数是整门课里最重要的一个级数：后面几乎所有判别法，归根到底都是在和它比较。

定理 8.2（几何级数）　设 $c \in \mathbb{R}$。级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c^n = 1 + c + c^2 + \cdots$ 收敛当且仅当 $|c| < 1$，并且此时

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}}$$

证明　关键是部分和有封闭表达式。记 $s_n = \sum_{i=0}^{n} c^i$，则

$$(1-c)s_n = (1 + c + \cdots + c^n) - (c + c^2 + \cdots + c^{n+1}) = 1 - c^{n+1},$$

中间的项两两相消。下面分情形讨论。

情形 $c = 1$。$s_n = n + 1 \to \infty$，级数发散。

情形 $c \ne 1$。此时 $s_n = \dfrac{1 - c^{n+1}}{1 - c}$，所以 (s_n) 收敛当且仅当 (c^n) 收敛。我们需要关于 c^n 的一个事实，它来自 Bernoulli 不等式：对 $h \ge 0$，

$$(1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2} h^2 + \cdots \ge 1 + nh.$$

- 若 $|c| < 1$ 且 $c \ne 0$，写 $1/|c| = 1 + h$，$h > 0$，则 $|c|^n = \dfrac{1}{(1+h)^n} \le \dfrac{1}{1+nh} \to 0$，于是 $c^{n+1} \to 0$，$s_n \to \dfrac{1}{1-c}$。$c = 0$ 时只有首项为 1，后续各项均为 0，所以和为 1。
- 若 $|c| > 1$，写 $|c| = 1 + h$，$h > 0$，则 $|c|^n \ge 1 + nh$ 无界，(c^n) 不收敛，级数发散。
- 若 $c = -1$，c^{n+1} 在 1 与 -1 之间来回跳，不收敛，级数发散（部分和就是开头的 $1, 0, 1, 0, \ldots$）。

三种情形合起来，正是「收敛 $\iff |c|<1$」。 ■

■ **例 8.1**　**循环小数与平移求和**　(1) 说明 $0.999\cdots=1$。　(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$。

解　(1) 十进制小数 $0.999\cdots$ 的定义就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}9\cdot10^{-n}$ 的和。提出公因子并用定理 8.2（$c=1/10$）：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\frac{9}{10}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{10^m}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1.$$

无限小数表示有限截断的极限。本例的截断依次为 0.9、0.99、0.999 等，它们的极限是 1，所以这个等式与小数的定义一致。

(2) 下标从 1 开始，先把首项提出来：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=2.$$

一般地，$|c|<1$ 时 $\sum_{n=k}^{\infty}c^n=\dfrac{c^k}{1-c}$，可以记成「首项除以 1 减公比」。 ♦

8.1.2　裂项级数

能算出部分和封闭形式的级数不多，几何级数是一类，下面的「裂项相消」是另一类。

■ **例 8.2**　**望远镜级数**　求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$。

解　用部分分式 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，部分和中相邻的项依次抵消：

$$s_N=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)=1-\frac{1}{N+1}.$$

例如 $s_{10}=10/11$。由于 $1/(N+1)\to0$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$。

一般地，若 $a_n=b_n-b_{n+1}$，则 $s_N=b_1-b_{N+1}$，像望远镜一样收拢。所以**级数 $\sum(b_n-b_{n+1})$ 收敛当且仅当数列 (b_n) 收敛**，且和为 $b_1-\lim b_n$。这个观察说明：每个数列的收敛问题都可以改写成一个级数的收敛问题，反之亦然。 ♦

8.1.3　通项检验与调和级数

> **命题 8.3（通项检验）**　若 $\sum a_n$ 收敛，则 $a_n\to0$。等价地：若 $a_n\not\to0$，则 $\sum a_n$ 发散。

证明　设 $s_n\to s$。则 $s_{n-1}\to s$ 也成立（它是同一个数列平移一位），于是 $a_n=s_n-s_{n-1}\to s-s=0$。 ■

例如 $\sum(-1)^n$ 与 $\sum\frac{n}{n+1}$ 都发散，因为通项分别不收敛、收敛到 1。很自然要问：反过来，$a_n\to0$ 能否保证 $\sum a_n$ 收敛？

定理 8.4（调和级数发散）　**调和级数**（harmonic series）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。更精确地，其部分和满足 $s_{2^k-1}\geq k/2$。

证明　把 $1,2,3,\dots$ 按 2 的幂分块：第 j 块是 $\{2^j,2^j+1,\dots,2^{j+1}-1\}$，含 2^j 项。块中每一项都不小于块中最后一项，所以

$$\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1}\frac{1}{n}\;\geq\;2^j\cdot\frac{1}{2^{j+1}-1}\;>\;2^j\cdot\frac{1}{2^{j+1}}=\frac{1}{2}.$$

（$j=0$ 时这一块就是 1。）前 k 块正好组成 s_{2^k-1}，于是 $s_{2^k-1}\geq k/2$（严格说 $k\geq 2$ 时是严格不等号）。因此 (s_n) 无界。收敛数列有界，所以 (s_n) 发散。 ■

图 8.1 用等宽柱形表示各项，并把每一块的统一下界画成阴影矩形。

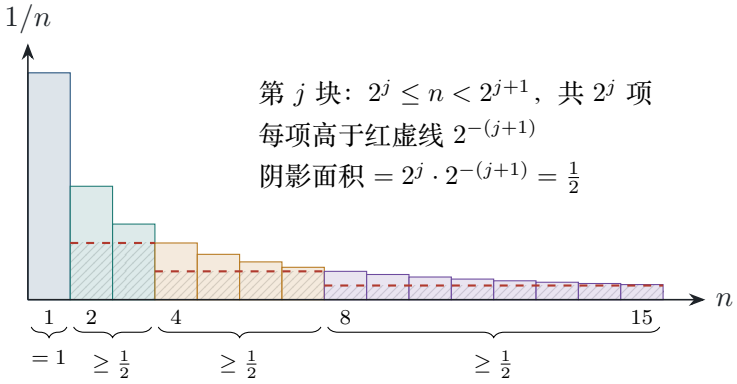


图 8.1　调和级数按 2 的幂分块。每根柱子宽 1、高 $1/n$，柱子面积之和就是部分和。第 j 块的柱子都高于红色虚线，所以这一块的和至少是阴影矩形的面积 $\frac{1}{2}$；有无穷多块，部分和就无界。

易错提醒　通项检验**只是必要条件**。$a_n\to 0$ 是级数收敛的「入场券」，不是保证：调和级数的通项 $1/n\to 0$，级数却发散。判断一个级数时，通项检验通常是第一步，用来快速排除明显发散的情形；它通过之后，还需要别的判别法。

调和级数的发散极其缓慢。数值上 $H_n=\sum_{k\leq n}1/k$ 满足

$$H_{10}\approx 2.929,\quad H_{100}\approx 5.187,\quad H_{1000}\approx 7.485,\quad H_{10^6}\approx 14.393.$$

从 10^3 项增加到 10^6 项，部分和仍只有上述有限大小。表中几个值不能决定极限：它们既不能排除后面继续增长，也不能证明最终有统一上界。真正的发散证据是前面的分块估计，它适用于任意块数。有限次计算不能替代敛散性的证明。

8.1.4　级数的基本性质与 Cauchy 准则

由于级数收敛就是部分和收敛，第 4–7 讲关于数列的结论可以直接翻译过来。

命题 8.5（基本性质）

(1)（线性）若 $\sum a_n = A$，$\sum b_n = B$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则 $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$。

(2)（有限项无关）改变、添加或删去有限多项，不改变级数的敛散性（但可能改变它的和）。特别地，对任意 N，$\sum_{n\ge 1} a_n$ 收敛 $\iff$ 尾级数（tail）$\sum_{n\ge N} a_n$ 收敛。

(3)（Cauchy 准则）$\sum a_n$ 收敛 $\iff$ 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得当 $n > m \ge N$ 时

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| = |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

证明　(1) 新级数的部分和是 $\alpha s_n + \beta t_n$，用极限的线性性。(2) 若两个级数只在有限项上不同，则当 n 足够大时它们的部分和相差一个固定常数，而「加上常数」不影响收敛。(3) 就是把第 7 讲的 Cauchy 准则（实数列收敛 $\iff$ 它是 Cauchy 列）用在 (s_n) 上。 ■

Cauchy 准则说的是：级数收敛当且仅当足够靠后的任意一段「块」都很小。取 $n = m+1$，它退化为 $|a_{m+1}| < \varepsilon$，这正是通项检验；调和级数的分块证明则说明它的块和不会变小（每块至少 $\frac{1}{2}$），所以 Cauchy 准则不成立。Cauchy 准则的价值在于：它不需要事先知道和是多少。下一节绝对收敛的定理就要靠它。

想一想　(1) 若 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都发散，$\sum(a_n + b_n)$ 一定发散吗？　(2) 若 $\sum a_n$ 收敛、$\sum b_n$ 发散，$\sum(a_n + b_n)$ 呢？　(3) 能否由 $\sum a_n = A$，$\sum b_n = B$ 推出 $\sum a_n b_n = AB$？

答　(1) 不一定：$a_n = 1$，$b_n = -1$ 时 $\sum(a_n + b_n) = 0$。(2) 一定发散：否则 $\sum b_n = \sum(a_n + b_n) - \sum a_n$ 由线性性收敛，矛盾。(3) 不能：取 $a_n = b_n = 2^{-n}$（$n \ge 1$），则 $A = B = 1$，但 $\sum 4^{-n} = \frac{1}{3} \ne 1$。乘积不能逐项进行，因为 $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$ 展开后还有交叉项。

8.2　非负项级数与比较判别法

当 $a_n \ge 0$ 时，部分和 $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n$ 单调递增。这让问题大大简化：由第 6 讲的单调收敛定理，单调数列收敛当且仅当它有界。

定理 8.6（非负项级数）　设 $a_n \ge 0$。则 $\sum a_n$ 收敛 $\iff$ 部分和数列 (s_n) 有上界。此时 $\sum a_n = \sup_n s_n$。

证明　(s_n) 单调递增。若它有上界，由单调收敛定理它收敛到 $\sup_n s_n$；若它收敛，则收敛数列有界。 ■

于是非负项级数只有两种命运：要么收敛，要么部分和趋于 $+\infty$。不会出现 $1 - 1 + 1 - \cdots$ 那样的振荡。因此对非负项级数，人们常把「收敛」写成 $\sum a_n < \infty$，把「发散」写成 $\sum a_n = \infty$。

■ **例 8.3　$\sum 1/n^2$ 收敛**　证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，且和不超过 2。

解　仿照调和级数的分块，但这次往上估计：第 j 块 $\{2^j, \ldots, 2^{j+1} - 1\}$ 有 2^j 项，每项不超过块

中第一项 $1/(2^j)^2$，所以

$$\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{n^2} \le 2^j \cdot \frac{1}{4^j} = \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

把前 k 块加起来，用几何级数：

$$s_{2^k-1} \le \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j < \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2.$$

对任意 n，取 k 使 $2^k - 1 \ge n$，由单调性 $s_n \le s_{2^k-1} < 2$。部分和有上界，由定理 8.6，级数收敛，且和 ≤ 2。

数值上，s_{2^k-1} 与上界 $\sum_{j<k} 2^{-j}$ 对比如下：

$$k=3:\ 1.5118 \le 1.75, \qquad k=5:\ 1.6132 \le 1.9375, \qquad k=7:\ 1.6371 \le 1.9844.$$

真正的和是 $\pi^2/6 \approx 1.6449$。 ♦

直观理解　同样是分块，调和级数每块的和都**不小于** $\frac{1}{2}$，块数无穷，所以发散；$\sum 1/n^2$ 每块的和不超过 $(\frac{1}{2})^j$，**按几何级数缩小**，所以收敛。判断一个非负项级数，常常就是在问：把它切成合适的块之后，块的大小是否像几何级数那样衰减。练习 8.9 的 Cauchy 凝聚判别法把这个想法做成了一般定理。

上述估计只回答是否收敛与和的上界，不负责求出精确的和。本讲暂不证明 $\pi^2/6$ 的求和公式；即使不知道这个公式，部分和有上界的证明也已经完整。

8.2.1　比较判别法

定理 8.7（比较判别法）　设当 $n \ge N_0$ 时 $0 \le a_n \le b_n$。则

(1) 若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum a_n$ 发散，则 $\sum b_n$ 发散。

证明　由命题 8.5(2)，只看 $n \ge N_0$ 的尾级数即可。(1) 对 $n \ge N_0$，$\sum_{i=N_0}^{n} a_i \le \sum_{i=N_0}^{n} b_i \le \sum_{i=N_0}^{\infty} b_i$，所以 $\sum a_n$ 的部分和有上界，由定理 8.6 收敛。(2) 是 (1) 的逆否命题。 ■

比较判别法的用法是：手里先有一批敛散性已知的「标尺」级数（几何级数、调和级数、下面的 p 级数），再把待判断的级数夹在标尺上面或下面。

■ **例 8.4　两个直接比较**　(1) 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n}$ 的敛散性。　(2) 用比较判别法重新证明 $\sum_{n\ge1} 1/n^2$ 收敛，并得到和 < 2。

解　(1) $0 \le \dfrac{1}{2^n n} \le \dfrac{1}{2^n}$，而 $\sum 2^{-n}$ 是公比 $\frac{1}{2}$ 的几何级数，收敛。由比较判别法，原级数收敛。（它的和是 $\ln 2 \approx 0.6931$，要等到幂级数的理论建立之后才能说明。）

(2) 对 $n \ge 2$，$\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$。右边是例 8.2 那样的望远镜级数，$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1$。于是 $\sum_{n\ge 2} 1/n^2$ 收敛且不超过 1，加上首项得 $\sum_{n\ge 1} 1/n^2 \le 2$。这里和是 < 2 而非 ≤ 2，因为 $n=3$ 时 $\frac{1}{9} < \frac{1}{6}$ 严格成立。 ♦

■ **例 8.5　p 级数，习题集 4 第 2 题**　设 $p > 0$。证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，当 $0 < p \le 1$ 时发散。

解　我们使用幂的常规性质 $n^p \le m^p$（$n \le m$）与 $(ab)^p = a^p b^p$。对有理数 p，它们可以由第 3 讲开 n 次方的方法严格得到；对一般实数 p，要等第 9–10 讲定义指数函数后才完全严格。

$0 < p \le 1$。因为 $n \ge 1$，有 $n^p \le n$，即 $\dfrac{1}{n^p} \ge \dfrac{1}{n}$。调和级数发散，由比较判别法，$\sum 1/n^p$ 发散。

$p > 1$。照搬例 8.3 的分块：第 j 块的 2^j 项都不超过 $1/(2^j)^p$，所以

$$\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{n^p} \le 2^j \cdot 2^{-jp} = q^j, \qquad q := 2^{1-p}.$$

因为 $p > 1$，$0 < q < 1$，所以 $s_{2^k-1} \le \sum_{j=0}^{k-1} q^j < \dfrac{1}{1-q}$。部分和有上界，级数收敛。例如 $p = \frac{3}{2}$ 时，上界是 $1/(1-2^{-1/2}) \approx 3.414$，而实际的和约为 2.612。 ♦

直接比较要求逐项的不等式，有时写起来很别扭。例如 $\frac{1}{n^2-1}$ 比 $\frac{1}{n^2}$ 大一点，不等号方向不对，可它们「几乎一样」。下面的极限形式只问两者的**比值**趋于什么。

> **定理 8.8（极限比较判别法）**　设 $a_n \ge 0$，$b_n > 0$，且 $\dfrac{a_n}{b_n} \to L$，其中 $0 < L < \infty$。则 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 同时收敛或同时发散。

证明　取 $\varepsilon = L/2$。存在 N，使 $n \ge N$ 时 $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2}$，即

$$\frac{L}{2}\, b_n < a_n < \frac{3L}{2}\, b_n \qquad (n \ge N).$$

若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum \frac{3L}{2} b_n$ 收敛，由右边的不等式与比较判别法，$\sum a_n$ 收敛。若 $\sum a_n$ 收敛，由左边的不等式，$\sum \frac{L}{2} b_n$ 收敛，再乘 $\frac{2}{L}$ 得 $\sum b_n$ 收敛。 ■

■ **例 8.6　极限比较的两个应用**　(1) 证明 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$ 收敛，并求它的和。　(2)（习题集 4 第 3 题）设 $r > 0$，判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+r} - \sqrt{n}\right)$ 的敛散性。

解　(1) 取 $b_n = 1/n^2$，则 $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{n^2-1} = \dfrac{1}{1-1/n^2} \to 1$，而 $\sum 1/n^2$ 收敛，所以原级数收敛。判别法不给出和，但这个级数恰好能裂项：

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right), \qquad \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right).$$

这次是隔一项相消，所以留下首尾各两项。令 $N\to\infty$，和为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$。核对：$N=10$ 时部分和是 $\frac{36}{55}\approx 0.6545$。

(2) 通项的形式是「两个大数之差」，先有理化：

$$a_n=\sqrt{n+r}-\sqrt{n}=\frac{(n+r)-n}{\sqrt{n+r}+\sqrt{n}}=\frac{r}{\sqrt{n+r}+\sqrt{n}}>0.$$

分母约为 $2\sqrt{n}$，所以取 $b_n=1/\sqrt{n}$：

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{r\sqrt{n}}{\sqrt{n+r}+\sqrt{n}}=\frac{r}{\sqrt{1+r/n}+1}\to\frac{r}{2}\in(0,\infty).$$

$\sum 1/\sqrt{n}$ 是 $p=\frac{1}{2}$ 的 p 级数，发散，所以原级数对每个 $r>0$ 都发散。$r=1$ 时可以直接验证：部分和裂项为 $\sqrt{N+1}-1\to\infty$。这又是一个「通项趋于 0 但级数发散」的例子。 ♦

注 8.1　当 $L=0$ 或 $L=\infty$ 时，只剩单向结论。$L=0$ 意味着 a_n 最终小于 b_n，所以「$\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum a_n$ 收敛」；$L=\infty$ 意味着 a_n 最终大于 b_n，所以「$\sum b_n$ 发散 $\Rightarrow\sum a_n$ 发散」。反方向都不成立：$a_n=1/n^2$，$b_n=1/n$ 时 $L=0$，前者收敛后者发散。

易错提醒　两种比较判别法都要求项非负。没有这个条件，结论可以完全失效。令 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$b_n=a_n+\dfrac{1}{n}$（$n\ge 2$）。则

$$\frac{b_n}{a_n}=1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\to 1,$$

但 $\sum a_n$ 收敛（下一节的交错级数判别法），而 $\sum b_n$ 发散（否则 $\sum\frac{1}{n}=\sum(b_n-a_n)$ 将收敛）。原因是 a_n 有正有负，「比值接近 1」不能转化成两个方向的不等式。

8.3　绝对收敛与条件收敛

项有正有负时，部分和不再单调，上一节的工具都不能直接用。最简单的办法是先取绝对值，化成非负项级数。

定义 8.9（绝对收敛）　若 $\sum|a_n|$ 收敛，称 $\sum a_n$ **绝对收敛**（absolutely convergent）。

定理 8.10（绝对收敛蕴含收敛）　若 $\sum|a_n|$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛，并且 $\left|\sum a_n\right|\le\sum|a_n|$。

思路　我们不知道 $\sum a_n$ 的和应该是多少，所以无法直接验证极限的定义。Cauchy 准则恰好不需要知道极限：只要证明尾部的块很小。三角不等式把 $\sum a_n$ 的块控制在 $\sum|a_n|$ 的对应块之下，而后者的块很小，因为它收敛。

证明　记 $s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$t_n=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$。对 $n>m$，由三角不等式

$$|s_n-s_m|=\left|\sum_{i=m+1}^{n}a_i\right|\le\sum_{i=m+1}^{n}|a_i|=t_n-t_m=|t_n-t_m|.$$

(t_n) 收敛，所以是 Cauchy 列：任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使 $n>m\ge N$ 时 $|t_n-t_m|<\varepsilon$。于是同样的 N 使 $|s_n-s_m|<\varepsilon$，(s_n) 是 Cauchy 列，由第 7 讲的 Cauchy 准则它收敛。最后，$|s_n|\le t_n$ 对每个 n 成立，令 $n\to\infty$，极限保持非严格不等号，得 $|\sum a_n|\le\sum|a_n|$。 ■

这个证明最后调用实数的 Cauchy 准则，使用了完备性。注意不要混淆「各项都是有理数」与「在有理数中收敛」。例如 $\sqrt{2}$ 的十进制展开由正有理数组成，在 $\mathbb{R}$ 中绝对收敛，和却不在 $\mathbb{Q}$ 中。若把「绝对收敛」解释为绝对值部分和在 $\mathbb{Q}$ 中收敛，这个例子并不满足前提，不能用它充当该命题在 $\mathbb{Q}$ 中失败的反例。

■ **例 8.7　Fourier 级数，习题集 5 第 1 题**　设实数列 $(a_n)_{n\ge0}$，$(b_n)_{n\ge1}$ 满足 $\sum_{n\ge1}(|a_n|+|b_n|)<\infty$。证明对每个 $x\in\mathbb{R}$，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

都收敛。

解　固定 x，令 $c_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$。$\cos nx$ 与 $\sin nx$ 的符号随 n 变化毫无规律，直接处理部分和很难。但 $|\cos nx|\le1$，$|\sin nx|\le1$，所以

$$0\le|c_n|\le|a_n|+|b_n|.$$

由比较判别法 $\sum|c_n|$ 收敛，即 $\sum c_n$ 绝对收敛，从而收敛（定理 8.10）。再加上常数 $a_0/2$ 不影响收敛。例如 $\sum_{n\ge1}\frac{\sin nx}{n^2}$ 对每个 x 都收敛。

这里的要点是：取绝对值之后，符号混乱的问题就消失了，代价是只能处理绝对收敛的情形。 ♦

8.3.1　交错级数

绝对值的方法对 $1-\frac12+\frac13-\frac14+\cdots$ 无能为力，因为 $\sum\frac1n$ 发散。下面的判别法利用的是正负号交替带来的抵消。

定理 8.11（交错级数判别法，Leibniz；习题集 4 第 4 题）　设 $b_1\ge b_2\ge b_3\ge\cdots\ge0$ 且 $b_n\to0$。则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=b_1-b_2+b_3-\cdots$ 收敛。若记其和为 S，则对所有 k，$s_{2k}\le S\le s_{2k-1}$，并且

$$\boxed{|S-s_n|\le b_{n+1}}$$

思路　部分和像锯齿一样来回摆动：加上 b_1 往右，减去 b_2 往左（但退得不如刚才进得多），再加 b_3 往右……于是奇数项部分和一路下降，偶数项部分和一路上升，并且两者夹住一个越来越窄的区间（图 8.2）。单调收敛定理分别处理两个子列，$b_n\to0$ 保证它们的极限相同。

证明　第一步：两个子列的单调性。由 b_n 递减，

$$s_{2k+1}=s_{2k-1}-(b_{2k}-b_{2k+1})\le s_{2k-1},\qquad s_{2k+2}=s_{2k}+(b_{2k+1}-b_{2k+2})\ge s_{2k},$$

并且 $s_{2k} = s_{2k-1} - b_{2k} \le s_{2k-1}$。合起来得到

$$s_2 \le s_4 \le \cdots \le s_{2k} \le s_{2k-1} \le \cdots \le s_3 \le s_1.$$

（要比较任意的 s_{2k} 与 s_{2j-1}：$k \ge j$ 时 $s_{2k} \le s_{2k-1} \le s_{2j-1}$；$k < j$ 时 $s_{2k} \le s_{2j} \le s_{2j-1}$。）

*第二步：两个极限相等。*偶数项子列递增且以 s_1 为上界，奇数项子列递减且以 s_2 为下界，由单调收敛定理分别收敛到某 S' 与 S''。又 $s_{2k-1} - s_{2k} = b_{2k} \to 0$，所以 $S'' = S' =: S$。

*第三步：整个数列收敛。*任给 $\varepsilon > 0$，存在 K_1 使 $k \ge K_1$ 时 $|s_{2k} - S| < \varepsilon$，存在 K_2 使 $k \ge K_2$ 时 $|s_{2k-1} - S| < \varepsilon$。取 $N = 2\max(K_1, K_2)$，则 $n \ge N$ 时不论 n 奇偶都有 $|s_n - S| < \varepsilon$。

第四步：误差估计。 S 是递增偶子列的上确界，也是递减奇子列的下确界，所以 $s_{2k} \le S \le s_{2k-1}$ 与 $s_{2k} \le S \le s_{2k+1}$ 都成立。若 $n = 2k-1$，则 $0 \le s_n - S \le s_{2k-1} - s_{2k} = b_{2k} = b_{n+1}$；若 $n = 2k$，则 $0 \le S - s_n \le s_{2k+1} - s_{2k} = b_{2k+1} = b_{n+1}$。 ■

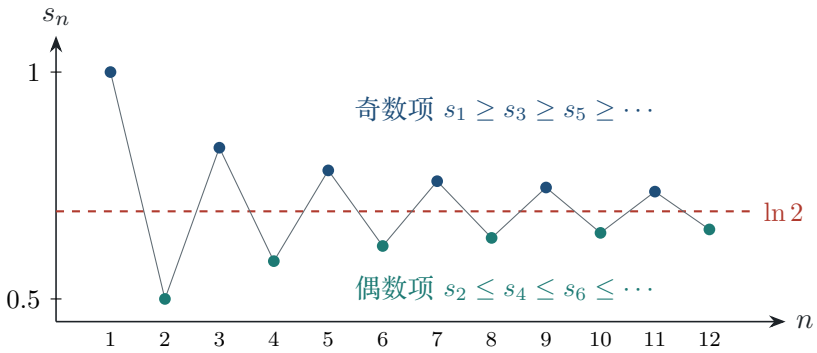


图 8.2　交错调和级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ 的部分和。奇数项部分和（蓝）递减，偶数项部分和（青）递增，二者从两侧夹住极限 $\ln 2 \approx 0.6931$（红虚线）。相邻两个部分和相差 $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$，这就是误差界 $|S - s_n| \le b_{n+1}$ 的来源。

例 8.8　交错调和级数　证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛但不绝对收敛，并估计 s_{10} 的误差。

解　$b_n = 1/n$ 递减且趋于 0，由定理 8.11，级数收敛。取绝对值后得到调和级数，发散，所以它不绝对收敛。误差估计给出 $|S - s_{10}| \le b_{11} = \frac{1}{11}$。数值上 $s_{10} \approx 0.6456$，$s_{11} \approx 0.7365$，精确地有 $s_{10} \le S \le s_{11}$；将下界向下、上界向上保留四位小数，得到 $0.6456 \le S \le 0.7366$；真实值 $S = \ln 2 \approx 0.6931$（要等 ln 有了严格定义之后才能证明）确实落在这个区间里。误差界是 $\frac{1}{11} \approx 0.091$，真实误差约 0.048，误差界偏保守，但量级正确。 ♦

定义 8.12（条件收敛）　若 $\sum a_n$ 收敛但 $\sum |a_n|$ 发散，称 $\sum a_n$ **条件收敛**（conditionally convergent）。

表 8.1 将本讲已判定的六种级数按收敛类型比较。

级数	收敛?	绝对收敛?	类型
$\sum(-1)^n/n^2$	是	是	绝对收敛
$\sum(-1)^{n-1}/n$	是	否	条件收敛
$\sum(-1)^n/\sqrt{n}$	是	否	条件收敛
$\sum \sin(nx)/n^2$	是	是	绝对收敛（对每个 x）
$\sum(-1)^n$	否	否	发散（通项不趋于 0）
$\sum 1/n$	否	否	发散（通项趋于 0）

表 8.1　收敛的几种类型。绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛，反之不成立；条件收敛的级数都依赖正负项之间的抵消。

想一想　交错级数判别法中「b_n 单调递减」能去掉吗？考虑 $b_{2k-1}=\frac{1}{k}$，$b_{2k}=\frac{1}{k^2}$，即级数 $1-1+\frac12-\frac14+\frac13-\frac19+\cdots$。它的项交错、$b_n\to 0$，它收敛吗？

答　不收敛。前 $2K$ 项两两配对，$s_{2K}=\sum_{k=1}^{K}\left(\frac1k-\frac{1}{k^2}\right)$。若级数收敛，则 $\sum_k(\frac1k-\frac{1}{k^2})$ 收敛，加上收敛的 $\sum\frac{1}{k^2}$ 得调和级数收敛，矛盾。所以单调性不能去掉：它保证了每次「退回」的距离不超过上一次「前进」的距离。

8.3.2　重排：条件收敛的脆弱性

有限和可以任意交换次序。无穷级数呢？把交错调和级数按「一个正项、两个负项」的顺序重新排列：

$$\left(1-\frac12\right)-\frac14+\left(\frac13-\frac16\right)-\frac18+\left(\frac15-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots=\frac12-\frac14+\frac16-\frac18+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots.$$

每一项都恰好出现一次，可右边是原级数的 $\frac12$ 倍，和变成了 $\frac12\ln 2\approx 0.3466$。（括号里 $\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}=\frac{1}{4k-2}$；严格地说，以上只说明了每三项一组的部分和收敛到 $\frac12\ln 2$，而组内各项趋于 0，所以整个部分和数列也收敛到它。）

这不是个别现象。下面两个事实这里不证：

- **绝对收敛的级数，任意重排之后仍收敛，且和不变**。所以绝对收敛级数可以像有限和一样随意交换次序。
- （Riemann 重排定理）条件收敛的级数，适当重排可以收敛到任意指定的实数，也可以发散到 $\pm\infty$。思路是：它的正项部分与负项部分各自都发散到 $\pm\infty$（否则级数会绝对收敛），而项本身趋于 0。于是可以先取正项直到超过目标，再取负项直到低于目标，如此往复；每次越过目标的距离不超过最近一项的大小，而这个大小趋于 0。

核心思想　条件收敛的级数依赖于项的**排列顺序**：它的和来自正负项之间精细的抵消，打乱顺序就会改变抵消的方式。绝对收敛则与顺序无关。这是后面处理幂级数时总要先证明绝对收敛的一个原因：在收敛半径之内，幂级数是绝对收敛的（定理 8.22），因此可以放心地重排、合并同类项。

8.4　比值判别法与根值判别法

几何级数 $\sum c^n$ 有两个特征：相邻两项之比恒为 c，第 n 项开 n 次方也恒为 $|c|$。比值判别法和根值判别法分别检查一般级数在这两种意义下是否「最终像一个公比小于 1 的几何级数」。

定理 8.13（比值判别法）　设 $a_n > 0$，且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to a$（$a$ 可以是 $+\infty$）。

(1) 若 $a < 1$，则 $\sum a_n$ 收敛；

(2) 若 $a > 1$，则 $\sum a_n$ 发散；

(3) 若 $a = 1$，判别法不给出任何结论。

证明　(1) 取 q 满足 $a < q < 1$（例如 $q = \frac{a+1}{2}$）。由极限的定义（取 $\varepsilon = q - a$），存在 N，使 $n \geq N$ 时 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$，即 $a_{n+1} < q a_n$。对 k 归纳得 $a_{N+k} \leq q^k a_N$，即对 $n \geq N$，

$$a_n \leq a_N q^{n-N} = \left(a_N q^{-N}\right) q^n.$$

右边是常数乘以公比 $q < 1$ 的几何级数，收敛；由比较判别法，$\sum a_n$ 收敛。

(2) 同理存在 N，使 $n \geq N$ 时 $a_{n+1} > a_n$。于是 $a_n \geq a_N > 0$ 对 $n \geq N$ 成立，$a_n \not\to 0$，由通项检验，级数发散。（$a = +\infty$ 时也如此。）

(3) 见下面的例 8.9。 ∎

定理 8.14（根值判别法）　设 $a_n \geq 0$，且 $a_n^{1/n} \to r$（r 可以是 $+\infty$）。若 $r < 1$，则 $\sum a_n$ 收敛；若 $r > 1$，则 $\sum a_n$ 发散；若 $r = 1$，不给出结论。

证明　若 $r < 1$，取 r_0 满足 $r < r_0 < 1$。存在 N，使 $n \geq N$ 时 $a_n^{1/n} < r_0$，即 $a_n < r_0^n$。$\sum r_0^n$ 收敛，由比较判别法 $\sum a_n$ 收敛。若 $r > 1$，则当 n 充分大时 $a_n^{1/n} > 1$，即 $a_n > 1$，通项不趋于 0，级数发散。 ∎

要用根值判别法，需要几个关于 n 次方根的基本极限。

引理 8.15　(1) 对任意 $c > 0$，$c^{1/n} \to 1$。　(2) $n^{1/n} \to 1$。

证明　两者都用二项式定理估计 $(1+h)^n$ 的下界。

(1) 设 $c \geq 1$，写 $c^{1/n} = 1 + h_n$，$h_n \geq 0$。则 $c = (1+h_n)^n \geq 1 + n h_n$，所以 $0 \leq h_n \leq \frac{c-1}{n} \to 0$。若 $0 < c < 1$，则 $c^{1/n} = 1/(1/c)^{1/n}$，分母趋于 1。

(2) 写 $n^{1/n} = 1 + h_n$，$h_n \geq 0$。这次 $1 + n h_n$ 不够用（只能得到 $h_n \leq 1$），要保留二次项：对 $n \geq 2$，

$$n = (1+h_n)^n \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2, \qquad \text{所以} \qquad 0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0.$$

∎

收敛相当慢：$10^{1/10}\approx 1.259$，$100^{1/100}\approx 1.047$，$1000^{1/1000}\approx 1.0069$。由引理，对任意固定的 k，$(n^k)^{1/n}=(n^{1/n})^k\to 1$：多项式因子在开 n 次方后「消失」。

■ **例 8.9　判别法失效的情形**　对 $\sum\frac{1}{n}$ 与 $\sum\frac{1}{n^2}$ 分别计算比值与根值极限。

解　比值：$\dfrac{1/(n+1)}{1/n}=\dfrac{n}{n+1}\to 1$，$\dfrac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\to 1$。根值：$(1/n)^{1/n}=1/n^{1/n}\to 1$，$(1/n^2)^{1/n}\to 1$。两个极限都是 1，可是前者发散、后者收敛。所以极限为 1 时，两个判别法都无法区分收敛与发散。

原因在于：这两个判别法本质上是和几何级数 $\sum q^n$ 比较，而任何 p 级数的项都比每个公比 $q<1$ 的几何级数衰减得慢，比值和根值都「看不出」多项式级的衰减。这时要回到比较判别法或分块的办法。 ♦

易错提醒　比值的极限小于 1，能推出比值最终被某个固定的 $q<1$ 控制；证明真正使用的是后一个统一界。统一界本身也足以保证级数收敛，即使比值没有极限。仅有「每个比值都小于 1」则不够：调和级数满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}<1$，级数却发散，因为找不到一个统一的 $q<1$。

■ **例 8.10　习题集 4 第 3 题**　设 $r>0$。判断 (1) $\sum_{n\ge 1}n^3r^n$ 与 (2) $\sum_{n\ge 0}\dfrac{r^n}{n!}$ 的敛散性。

解　(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)^3r^{n+1}}{n^3r^n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3 r\to r$。由比值判别法，$r<1$ 时收敛，$r>1$ 时发散。$r=1$ 时比值判别法失效，但此时通项 $n^3\to\infty$，由通项检验发散。结论：收敛 $\iff 0<r<1$。指数衰减 r^n 总能压倒多项式增长 n^3。（$r=\frac{1}{2}$ 时可以算出和恰好是 26。）

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!}=\dfrac{r}{n+1}\to 0<1$。所以对每个 $r>0$ 都收敛。由通项检验，顺便得到 $\dfrac{r^n}{n!}\to 0$：不论 r 多大，阶乘最终都压倒指数。 ♦

根值判别法和比值判别法相比，哪个更强？先看一个比值判别法用不上的例子。

■ **例 8.11　根值判别法胜出**　设 $a_n=2^{(-1)^n-n}$，$n\ge 0$，即 $2,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{64},\dots$。判断 $\sum a_n$ 的敛散性并求和。

解　*比值。* n 为偶数时 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{-1-(n+1)}}{2^{1-n}}=\dfrac{1}{8}$；$n$ 为奇数时 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{1-(n+1)}}{2^{-1-n}}=2$。比值在 $\frac{1}{8}$ 与 2 之间来回跳，没有极限，比值判别法无法使用。

根值。 $a_n^{1/n}=2^{(-1)^n/n-1}$。指数 $\dfrac{(-1)^n}{n}-1\to -1$，所以 $a_n^{1/n}\to\frac{1}{2}<1$（偶数 n 时 $a_n^{1/n}=2^{1/n}/2$，奇数 n 时为 $2^{-1/n}/2$，由引理 8.15(1) 都趋于 $\frac{1}{2}$）。级数收敛。

求和。 部分和 s_{2K+1} 恰好等于偶数项子级数与奇数项子级数各自前 $K+1$ 项之和，而这两个子级数都是几何级数：

$$\sum_{k\ge 0}a_{2k}=\sum_{k\ge 0}2\cdot 4^{-k}=\frac{8}{3},\qquad \sum_{k\ge 0}a_{2k+1}=\sum_{k\ge 0}\frac{1}{4}\cdot 4^{-k}=\frac{1}{3},\qquad \sum_{n\ge 0}a_n=3.$$

所以 $s_{2K+1} \to \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$。项非负，$(s_n)$ 单调，它的一个子列收敛到 3，整个数列也就收敛到 3（单调数列有一个子列收敛，则它有界，从而收敛到同一极限）。 ♦

反过来，比值判别法能判定的，根值判别法都能判定：可以证明（练习 8.10）若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$，则 $a_n^{1/n} \to L$。所以**根值判别法严格更强**，比值判别法的优点是好算，尤其当通项含阶乘时。不过例 8.11 也暴露了根值判别法的不足：$a_n^{1/n}$ 本身也可能没有极限。比如把 a_n 换成「偶数项 2^{-n}、奇数项 3^{-n}」，根值交替取 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{3}$，没有极限。下一节的上极限就是为此准备的。

表 8.2 汇总各判别法的条件，使用前须先检查其适用范围。

判别法	条件与结论	何时失效或不适用
通项检验	$a_n \not\to 0 \Rightarrow$ 发散	$a_n \to 0$ 时无结论
比较判别法	$0 \le a_n \le b_n$；$\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$	要求非负；需要找到合适的标尺
极限比较	$a_n \ge 0$，$b_n > 0$，$a_n/b_n \to L \in (0,\infty) \Rightarrow$ 同敛散	$L = 0$ 或 ∞ 只剩单向结论
比值判别法	$a_{n+1}/a_n \to a$：$a < 1$ 收敛，$a > 1$ 发散	$a = 1$；或比值无极限
根值判别法	$a_n^{1/n} \to r$：$r < 1$ 收敛，$r > 1$ 发散	$r = 1$；无极限时改用 $\limsup$
交错级数判别法	$b_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum(-1)^{n-1} b_n$ 收敛，误差 $\le b_{n+1}$	需要单调递减

表 8.2　本讲的判别法一览。通项检验对一般实数项均适用；比较、极限比较和根值判别法要求非负项，比值形式要求所用分母非零且项为正。对一般实数项可先用这些判别法检验绝对收敛；交错判别法还可以识别条件收敛。

8.5　上极限

很多重要的幂级数有大量为零的系数。例如余弦级数 $1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots$ 的奇次系数为 0，比值 a_{n+1}/a_n 在这些下标处无定义。不过它的根值仍趋于 0：由 $(2k)! \ge k^k$，偶次根值至多为 $1/\sqrt{k} \to 0$，奇次根值为零。不能把「时而为零」直接当作没有极限的理由。

根值确实没有极限的例子是 $\sum_{k \ge 0} 2^k x^{2k}$：偶次系数的根值恒为 $\sqrt{2}$，奇次系数的根值为 0。我们需要一个总是存在、又能取代普通极限的量，来描述尾部反复出现的较大数值。

定义 8.16（上极限与下极限）　设 (a_n) 是实数列。

- 若 (a_n) 无上界，规定 $\limsup a_n = +\infty$。
- 若 (a_n) 有上界，令 $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$，定义 $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$；当 $b_n \to -\infty$ 时规定 $\limsup a_n = -\infty$。

类似地，若 (a_n) 无下界，$\liminf a_n = -\infty$；否则令 $c_n = \inf\{a_k : k \ge n\}$，$\liminf a_n = \lim c_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$。

这个定义是合理的：

- 若 (a_n) 有上界，每个尾集合 $\{a_k : k \ge n\}$ 都非空有上界，由确界原理 b_n 存在。
- 尾集合随 n 增大而缩小，集合变小，上确界不会变大，所以 $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \cdots$。由单调收敛定理，$(b_n)$ 要么收敛，要么无下界而趋于 $-\infty$。

所以**每个实数列的上极限都存在**（取值于 $[-\infty, +\infty]$），这是它相对于普通极限的最大优点。数列有界时 $c_n \le a_n \le b_n$，取极限得 $\liminf a_n \le \limsup a_n$；无界时一端是 $\pm\infty$，这个不等式自动成立。

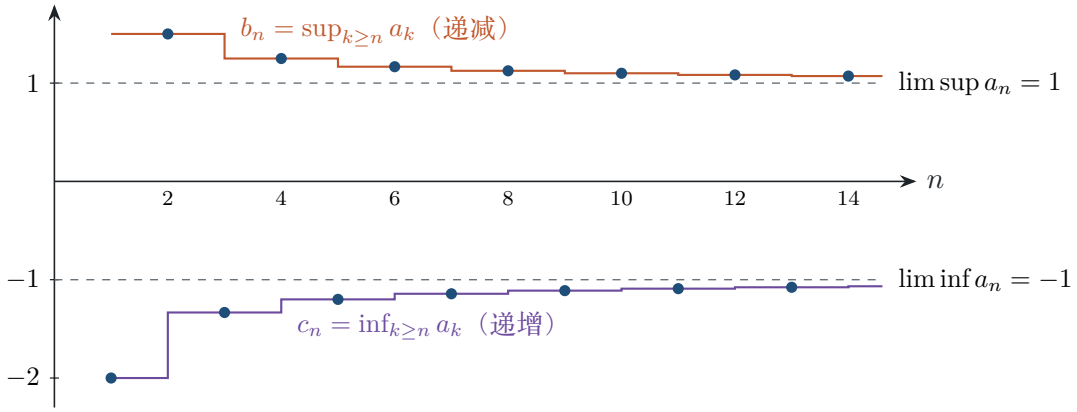


图 8.3　数列 $a_n = (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$（蓝点）没有极限。尾部上确界 b_n（橙色阶梯）从上方单调下降到 1，尾部下确界 c_n（紫色阶梯）从下方单调上升到 -1。上极限、下极限分别描述数列最终的「上边界」和「下边界」。

例 8.12　计算上极限与下极限　求下列数列的 $\limsup$ 与 $\liminf$：(1) $a_n = (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$；(2) $a_n = \frac{1}{n}$；(3) $a_n = n$；(4) $a_n = -n$；(5) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$。

解　(1) 偶数项 $1 + \frac{1}{n}$ 为正且随 n 递减，奇数项为负，所以尾部 $\{a_k : k \ge n\}$ 的上确界在其中第一个偶数下标处取到：$b_n = 1 + \frac{1}{m}$，m 是不小于 n 的最小偶数。$b_n \to 1$，故 $\limsup a_n = 1$。同理 $c_n = -(1 + \frac{1}{m'})$，$m'$ 是不小于 n 的最小奇数，$\liminf a_n = -1$。见图 8.3。

(2) $b_n = \sup_{k\ge n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \to 0$，$c_n = \inf_{k\ge n} \frac{1}{k} = 0$。上、下极限都是 0，等于普通极限。

(3) 无上界，$\limsup n = +\infty$；$c_n = n \to +\infty$，所以 $\liminf n = +\infty$。

(4) 有上界，$b_n = -n \to -\infty$，所以 $\limsup(-n) = -\infty$；无下界，$\liminf(-n) = -\infty$。

(5) 数列是 $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$。每个尾部都同时含有 1 和 -1，所以 $b_n = 1$，$c_n = -1$ 对所有 n 成立，$\limsup = 1$，$\liminf = -1$。 ♦

直接按定义求 b_n 有时很麻烦。下面的刻画更好用，它也说明了上极限的含义。

命题 8.17（上极限的 ε 刻画）　设 $L \in \mathbb{R}$。则 $L = \limsup a_n$ 当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$：

(1) 只有有限多个 n 使 $a_n \ge L + \varepsilon$（即：存在 N，当 $n \ge N$ 时 $a_n < L + \varepsilon$）；

(2) 有无穷多个 n 使 $a_n > L - \varepsilon$。

证明　($\Rightarrow$) 设 $L=\limsup a_n=\lim b_n$。(1) 由 $b_n\to L$，存在 N 使 $b_N<L+\varepsilon$；于是 $n\ge N$ 时 $a_n\le b_N<L+\varepsilon$。(2) (b_n) 递减趋于 L，所以每个 $b_m\ge L$。对任意 m，$L-\varepsilon<b_m=\sup_{k\ge m}a_k$，由上确界的定义存在 $k\ge m$ 使 $a_k>L-\varepsilon$。由于 m 任意，这样的 k 有无穷多个。

($\Leftarrow$) 设 (1)(2) 成立。由 (1)，数列最终有上界，从而有上界，b_n 有定义。由 (1)，$n\ge N$ 时 $b_n\le L+\varepsilon$；由 (2)，每个尾部都含有某个 $a_k>L-\varepsilon$，所以 $b_n>L-\varepsilon$ 对所有 n 成立。于是 $|b_n-L|\le\varepsilon$ 对 $n\ge N$ 成立，ε 任意，故 $b_n\to L$。 ■

直观理解　条件 (1) 说：$L+\varepsilon$ 这条线之上，数列最终不再出现；条件 (2) 说：$L-\varepsilon$ 这条线之上，数列反复出现。所以 $\limsup a_n$ 是数列「无穷多次靠近的最高位置」。结合第 7 讲的 Bolzano–Weierstrass 定理可以证明：有界数列的 $\limsup$ 正是它所有收敛子列的极限中最大的一个，$\liminf$ 是最小的一个。

命题 8.18　数列 (a_n) 收敛于 $a\in\mathbb{R}$，当且仅当 $\limsup a_n=\liminf a_n=a$。

证明　($\Rightarrow$) 任给 $\varepsilon>0$，存在 N 使 $n\ge N$ 时 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$。于是 $n\ge N$ 时 $a-\varepsilon\le c_n\le b_n\le a+\varepsilon$，所以 $b_n\to a$，$c_n\to a$。($\Leftarrow$) 两个上下极限都有限，数列有界，$c_n\le a_n\le b_n$ 且 $b_n,c_n\to a$，由夹逼定理 $a_n\to a$。 ■

因此上极限是极限的推广：极限存在时二者相同，极限不存在时上极限仍然存在。我们还要用到一个简单的性质：对常数 $t\ge 0$，$\limsup(ta_n)=t\limsup a_n$（约定 $0\cdot(\pm\infty)=0$）。这是因为 $\sup_{k\ge n}(ta_k)=t\sup_{k\ge n}a_k$。

易错提醒　上极限对加法一般不可加：只有 $\limsup(a_n+b_n)\le\limsup a_n+\limsup b_n$（右边有意义时）。取 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，则 $a_n+b_n=0$，左边是 0，右边是 $1+1=2$。另外，$t<0$ 时乘法会把 $\limsup$ 变成 $\liminf$：$\limsup(-a_n)=-\liminf a_n$。

有了上极限，根值判别法可以去掉「极限存在」这个假设。

定理 8.19（根值判别法，上极限形式）　设 $a_n\ge 0$，$r=\limsup a_n^{1/n}\in[0,+\infty]$。若 $r<1$，则 $\sum a_n$ 收敛；若 $r>1$，则 $\sum a_n$ 发散；$r=1$ 时无结论。

证明　若 $r<1$，取 q 满足 $r<q<1$。由命题 8.17(1)（取 $\varepsilon=q-r$），存在 N，使 $n\ge N$ 时 $a_n^{1/n}<q$，即 $a_n<q^n$。与几何级数比较，$\sum a_n$ 收敛。

若 $r>1$（包括 $r=+\infty$），则有无穷多个 n 使 $a_n^{1/n}>1$：当 r 有限时，这是命题 8.17(2) 取 $\varepsilon=r-1$；当 $r=+\infty$ 时，$(a_n^{1/n})$ 无上界，所以大于 1 的项有无穷多个。这些 n 处 $a_n>1$，所以 $a_n\not\to 0$，级数发散。 ■

回到上一节末尾的例子：偶数项 2^{-n}、奇数项 3^{-n}。此时 $a_n^{1/n}$ 交替取 $\frac12$ 与 $\frac13$，$\limsup a_n^{1/n}=\frac12<1$，级数收敛。上极限只关心最坏的那些项，最坏的项都被 $(\frac12+\varepsilon)^n$ 控制，整个级数就收敛。

8.6　幂级数与收敛半径

讲义列出了四个最重要的幂级数：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

第一个由几何级数已经证明（$|x|<1$ 时）。后三个在微积分里分别是 e^x、$\cos x$、$\sin x$ 的 Taylor 展开；在本课程中，我们反过来**用级数来定义这些函数**，第 9–10 讲会证明 $E(x)=\sum \frac{x^n}{n!}$ 满足 $E(x+y)=E(x)E(y)$ 等性质。在此之前，首先要知道这些级数对哪些 x 收敛。

定义 8.20（幂级数）　给定实数列 $(a_n)_{n\ge 0}$，形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的级数称为**幂级数**（power series），a_n 称为它的系数。对每个固定的 $x\in\mathbb{R}$，它是一个普通的数项级数。

每个幂级数在 $x=0$ 处都收敛（和为 a_0，约定 $0^0=1$）。问题是：使它收敛的 x 构成什么样的集合？

■ **例 8.13　处处收敛的三个级数**　证明 $\sum \frac{x^n}{n!}$，$\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$，$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 对每个 $x\in\mathbb{R}$ 都绝对收敛。

解　$x=0$ 时三个级数分别只有常数项或全部为零，均收敛。设 $x\neq 0$，对绝对值用比值判别法：

$$\frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!}=\frac{|x|}{n+1}\to 0,\qquad \frac{|x|^{2n+2}/(2n+2)!}{|x|^{2n}/(2n)!}=\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\to 0,$$

正弦级数的比值 $\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$ 同样趋于 0。三个极限都是 $0<1$，所以三个级数都绝对收敛，从而收敛。注意这里我们把余弦级数看成以 n 为下标、通项为 $\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的级数，跳过了那些为零的项；若坚持写成 $\sum a_m x^m$ 的形式，比值 a_{m+1}/a_m 根本没有定义。 ♦

8.6.1　Cauchy–Hadamard 公式

定义 8.21（收敛半径）　幂级数 $\sum a_n x^n$ 的**收敛半径**（radius of convergence）定义为

$$\boxed{R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}}$$

约定：若 $\limsup|a_n|^{1/n}=0$，则 $R=+\infty$；若 $\limsup|a_n|^{1/n}=+\infty$，则 $R=0$。

由于 $|a_n|^{1/n}\ge 0$，上极限在 $[0,+\infty]$ 中，所以 $R\in[0,+\infty]$ 总有定义。这正是需要上极限的地方：$|a_n|^{1/n}$ 未必有极限。

定理 8.22（Cauchy–Hadamard）　设 R 是 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径。则

(1) 当 $|x| < R$ 时，$\sum a_n x^n$ 绝对收敛；

(2) 当 $|x| > R$ 时，$\sum a_n x^n$ 发散。

当 $|x| = R$ 时，定理不给出结论，必须逐个检查。

思路　对 $\sum |a_n x^n|$ 用上极限形式的根值判别法。关键的计算是 $|a_n x^n|^{1/n} = |x| \cdot |a_n|^{1/n}$：变量 x 被「开方」成一个常数因子，于是上极限等于 $|x|/R$，它小于 1 恰好当 $|x| < R$。

证明　$x = 0$ 时级数收敛，而 $|0| > R$ 不可能成立，结论成立。设 $x \neq 0$，记 $M = \limsup |a_n|^{1/n}$。由 $\limsup(t a_n) = t \limsup a_n$ $(t = |x| > 0)$，

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \big(|x|\,|a_n|^{1/n}\big) = |x|\, M.$$

- 若 $M = 0$（$R = \infty$）：上式为 $0 < 1$，由定理 8.19，$\sum |a_n x^n|$ 对每个 x 收敛。
- 若 $M = +\infty$（$R = 0$）：上式为 $+\infty > 1$，对每个 $x \neq 0$，有无穷多个 n 使 $|a_n x^n| > 1$，通项不趋于 0，$\sum a_n x^n$ 发散。
- 若 $0 < M < \infty$：上式为 $|x|/R$。$|x| < R$ 时它小于 1，$\sum |a_n x^n|$ 收敛；$|x| > R$ 时它大于 1，同样得到无穷多个 n 使 $|a_n x^n| > 1$，$\sum a_n x^n$ 发散。

在发散的情形，我们证明的是 $a_n x^n \not\to 0$，这比 $\sum |a_n x^n|$ 发散更强，所以连 $\sum a_n x^n$ 本身也发散。 ■

在 $|x| < R$ 时绝对收敛、$|x| > R$ 时发散，这说明使级数收敛的 x 构成一个区间，称为**收敛区间**（interval of convergence）。当 $0 < R < \infty$ 时，它是 $(-R, R)$ 再加上可能的端点，两个端点不一定同时包含。$R = 0$ 时只有 $\{0\}$；$R = \infty$ 时则为整个实轴。半径描述内部收敛范围，不能单凭它判断端点。

推论 8.23（比值公式）　若 $a_n \neq 0$（n 充分大），且 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R' \in [0, +\infty]$，则收敛半径 $R = R'$。

证明　对 $x \neq 0$ 用比值判别法：$\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \dfrac{|x|}{R'}$（$R' = 0$ 时为 $+\infty$，$R' = \infty$ 时为 0）。所以 $|x| < R'$ 时绝对收敛，$|x| > R'$ 时通项不趋于 0 而发散。若 $R < R'$，取 $R < |x| < R'$，由定理 8.22 级数发散，却又绝对收敛，矛盾；$R > R'$ 同理。故 $R = R'$。 ■

■ **例 8.14　同一个半径，不同的端点**　求 $\sum_{n\ge 1} x^n$，$\sum_{n\ge 1} \dfrac{x^n}{n}$，$\sum_{n\ge 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛区间。

解　三个级数的系数分别是 $1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$。由引理 8.15，$1^{1/n} = 1$，$(1/n)^{1/n} = 1/n^{1/n} \to 1$，$(1/n^2)^{1/n} = 1/(n^{1/n})^2 \to 1$。三个上极限都等于 1，所以三个级数的收敛半径都是 $R = 1$：在 $(-1, 1)$ 内绝对收敛，在 $|x| > 1$ 时发散。剩下的只是端点 $x = \pm 1$。

$\sum x^n$。$x = \pm 1$ 时通项 $(\pm 1)^n$ 不趋于 0，都发散。收敛区间是 $(-1, 1)$。

$\sum x^n/n$。$x=1$ 时是调和级数，发散；$x=-1$ 时是 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$，由交错级数判别法收敛（条件收敛）。收敛区间是 $[-1,1)$。

$\sum x^n/n^2$。$x=\pm 1$ 时 $\left|\frac{(\pm 1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$，级数绝对收敛。收敛区间是 $[-1,1]$。

三个级数的收敛半径相同，端点的情况却三种各不相同（图 8.4）。这说明 Cauchy–Hadamard 定理在 $|x|=R$ 处无话可说是本质的，端点只能逐个用前面几节的判别法检查。 ♦

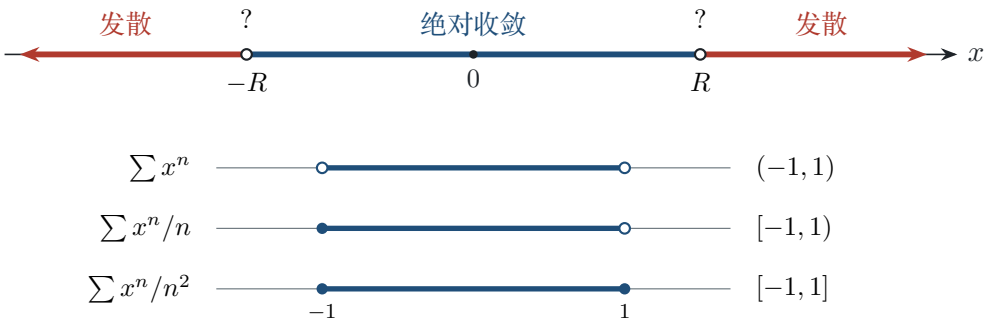


图 8.4　上：Cauchy–Hadamard 定理。$|x|<R$ 处绝对收敛，$|x|>R$ 处发散，端点 $\pm R$ 处定理不给结论。下：例 8.14 中三个 $R=1$ 的级数，实心点表示端点处收敛，空心点表示发散。

■ **例 8.15　零半径与缺项系数**　(1) 求 $\sum n!\,x^n$ 的收敛半径。　(2) 求下列级数的收敛半径与收敛区间：

$$\sum_{n\ge 0} 2^n x^{2n} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + \cdots .$$

解　(1) $a_n = n!$，$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$，由推论 8.23，$R=0$：这个级数**只在 $x=0$ 处收敛**。直接看也清楚：$x\neq 0$ 时 $\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$，通项最终单调增大，不趋于 0。对比 $\sum \frac{x^n}{n!}$：比值公式给出 $|a_n/a_{n+1}| = n+1 \to \infty$，$R=\infty$，与例 8.13 一致。两种公式给出同一个 R，由此还得到 $\limsup (1/n!)^{1/n} = 0$，即 $(n!)^{1/n} \to \infty$。

(2) 把它写成 $\sum_m a_m x^m$ 的标准形式：$a_m = 2^{m/2}$（m 偶），$a_m = 0$（m 奇）。比值 a_{m+1}/a_m 一半无定义，推论 8.23 用不上。用上极限：

$$|a_m|^{1/m} = \begin{cases} \left(2^{m/2}\right)^{1/m} = \sqrt{2}, & m \text{ 偶}, \\ 0, & m \text{ 奇}, \end{cases} \qquad \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} = \sqrt{2}, \qquad R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

端点 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处 $2^n x^{2n} = 1$，通项不趋于 0，发散。收敛区间是 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。

核对：令 $y = 2x^2$，级数就是几何级数 $\sum y^n$，收敛当且仅当 $2x^2<1$，即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$，且和为 $\frac{1}{1-2x^2}$。两种做法吻合。 ♦

想一想　已知某幂级数 $\sum a_n x^n$ 在 $x=2$ 处收敛。它在 $x=-1$、$x=-2$、$x=3$ 处是否一定收敛？

答　$x=-1$ 处一定收敛，而且绝对收敛：若 $R<2$，则 $|2|>R$，由定理 8.22 级数在 2 处发散，矛盾；所以 $R\geq 2>|-1|$。$x=-2$ 处不一定：$\sum \frac{(-1)^n x^n}{2^n n}$ 在 $x=2$ 处是交错调和级数，收敛，在 $x=-2$ 处是调和级数，发散。$x=3$ 处也不一定：同一个例子的 $R=2<3$，在 3 处发散。

前后联系　本讲是后面几讲的基础。第 9–10 讲用 $E(x)=\sum \frac{x^n}{n!}$ 定义指数函数，并通过两个级数相乘得到的「乘积级数」证明 $E(x+y)=E(x)E(y)$，证明会使用已建立的单调收敛与本讲的级数比较。在讲连续性和一致收敛之后，后续关于函数列的讲次将证明幂级数在收敛半径以内可以逐项求导，并且求导后收敛半径不变：$\sum n a_n x^{n-1}$ 的系数多了因子 n，而 $n^{1/n}\to 1$，所以上极限不变。

注 8.2　为什么叫「半径」？把 x 换成复数 z，同样的证明说明 $\sum a_n z^n$ 在圆盘 $|z|<R$ 内绝对收敛、在圆外发散。这还解释了一个实数范围内的谜：$\frac{1}{1+x^2}=\sum(-1)^n x^{2n}$ 在整个实轴上光滑，收敛半径却只有 1。原因是 $1+z^2$ 在复数 $z=\pm i$ 处为零，它们到原点的距离恰为 1。

本讲小结

- $\sum a_n$ 收敛的定义是部分和 s_n 收敛。几何级数 $\sum c^n$ 收敛 $\iff |c|<1$，和为 $\frac{1}{1-c}$；裂项级数可以直接算出部分和。
- 通项检验：收敛 $\Rightarrow a_n\to 0$，反之不成立（调和级数）。Cauchy 准则：收敛 $\iff$ 尾部的块任意小。
- 非负项级数收敛 $\iff$ 部分和有上界。比较判别法与极限比较判别法以几何级数和 p 级数（$p>1$ 收敛，$p\leq 1$ 发散）为标尺，都要求项非负。
- 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛（用 Cauchy 准则）。交错级数判别法处理条件收敛，误差 $|S-s_n|\leq b_{n+1}$。条件收敛的级数重排后和可以改变。
- 比值判别法与根值判别法都是和几何级数比较，极限为 1 时失效；根值判别法更强。
- $\limsup a_n=\lim_n \sup_{k\geq n} a_k$ 总是存在；它刻画数列「无穷多次靠近的最高位置」。
- 收敛半径 $R=1/\limsup|a_n|^{1/n}$：$|x|<R$ 绝对收敛，$|x|>R$ 发散，端点逐个检查。

练习

8.1 ★　求和：(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$；(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$。

8.2 ★　用通项检验说明下列级数发散：(a) $\sum\frac{n}{2n+1}$；(b) $\sum\frac{(-1)^n n}{n+1}$；(c) $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。（提示：(c) 用 Bernoulli 不等式。）

8.3 ★　判断敛散性：(a) $\sum\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$；(b) $\sum\frac{2n+1}{n^3+1}$；(c) $\sum\frac{|\sin n|}{n^2}$；(d) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n-n}$。

8.4 ★★ 用比值或根值判别法判断：(a) $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$；(b) $\sum \dfrac{n!}{n^n}$；(c) $\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$。

8.5 ★★ 求 lim sup 与 lim inf：(a) $a_n = n\big(1+(-1)^n\big)$；(b) $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}$；(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1} + \dfrac{1}{n}$。

8.6 ★★ 求收敛半径与收敛区间：(a) $\sum n^2 x^n$；(b) $\sum_{n\ge 1} \dfrac{x^n}{2^n n}$；(c) $\sum\big(2+(-1)^n\big)^n x^n$。并说明 (c) 中比值公式为什么用不上。

8.7 ★★ (a) 证明：若 $\sum a_n$ 绝对收敛，则 $\sum a_n^2$ 收敛。(b) 举例说明反过来不成立。(c) 若只假设 $\sum a_n$ 收敛（不一定绝对收敛），$\sum a_n^2$ 一定收敛吗？

8.8 ★★ (a) 交错调和级数至少要取多少项，才能保证由定理 8.11 的误差界知道误差小于 0.01？(b) 不计算 $\ln 2$，证明交错调和级数的和 S 满足 $\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}$。

8.9 ★★★ （Cauchy 凝聚判别法）设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge 0$。证明 $\sum_{n\ge 1} a_n$ 收敛 $\iff$ $\sum_{k\ge 0} 2^k a_{2^k}$ 收敛。并用它重新得到 p 级数的结论（p 为正有理数即可）。

8.10 ★★★ 设 $a_n > 0$ 且 $a_{n+1}/a_n \to L \in [0,+\infty]$。证明 $a_n^{1/n} \to L$。当 $0 < L < \infty$ 时，先用常数倍的 $(L-\varepsilon)^n$ 与 $(L+\varepsilon)^n$ 夹住 a_n；再分别处理 $L = 0$、$L = +\infty$。由此比较比值判别法与根值判别法，并解释例 8.11 的作用。

练习答案与提示

8.1 (a) 拆成两个几何级数：$\sum(\frac{1}{3})^n + \sum(\frac{1}{2})^n = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$。(b) $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\big)$，隔一项相消，$s_N = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\big) \to \frac{3}{4}$。

8.2 (a) 通项 $\to \frac{1}{2} \neq 0$。(b) 偶数项 $\to 1$，奇数项 $\to -1$，通项没有极限，当然不趋于 0。(c) 由 Bernoulli 不等式 $(1+\frac{1}{n})^n \ge 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2$，通项不趋于 0。

8.3 (a) 发散：与 $\frac{1}{n}$ 极限比较，$\dfrac{1/\sqrt{n(n+1)}}{1/n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1/n}} \to 1$。(b) 收敛：与 $\frac{1}{n^2}$ 比较，比值 $\frac{(2n+1)n^2}{n^3+1} \to 2$。(c) 收敛：$0 \le \frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$。(d) 收敛：对 $n \ge 1$ 有 $n \le 2^{n-1}$（归纳），所以 $2^n - n \ge 2^{n-1}$，$\frac{1}{2^n - n} \le \frac{2}{2^n}$，与几何级数比较。

8.4 (a) 收敛：比值 $\frac{(n+1)^2}{2n^2} \to \frac{1}{2}$。(b) 收敛：比值 $\dfrac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!} = \dfrac{1}{(1+1/n)^n} \le \frac{1}{2}$（Bernoulli 不等式），它被 $\frac{1}{2}$ 控制；也可以说这个比值有极限 $1/e < 1$，但 e 要到第 9–10 讲才定义。(c) 收敛：根值 $\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$。

8.5 (a) 奇数项为 0，偶数项为 $2n$ 并趋于 $+\infty$；所以 $\limsup = +\infty$，$\liminf = 0$。

(b) 数列以 6 为周期，每一周期依次为

$$\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad 1.$$

每个尾部都含 1 和 -1，且全部项介于两者之间，所以 $\limsup = 1$、$\liminf = -1$。

(c) 偶数项 $n/(n+1) + 1/n \to 1$，奇数项 $-n/(n+1) + 1/n \to -1$。对每个正误差，足够靠后的两类项分别接近 $1, -1$，且各有无穷多项，由命题 8.17 得 $\limsup = 1$、$\liminf = -1$。

8.6 (a) $(n^2)^{1/n} \to 1$，$R = 1$；$x = \pm 1$ 时通项不趋于 0；收敛区间 $(-1,1)$。(b) $\big(\frac{1}{2^n n}\big)^{1/n} = \frac{1}{2n^{1/n}} \to \frac{1}{2}$，$R = 2$；$x = 2$ 时为调和级数，发散；$x = -2$ 时为 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$，收敛；收敛区间 $[-2,2)$。(c) $|a_n|^{1/n} = 2 + (-1)^n$ 交替取 3 与 1，$\limsup = 3$，$R = \frac{1}{3}$；$x = \pm\frac{1}{3}$ 时偶数项 $|a_n x^n| = 1$，通项不趋于 0，收敛区间 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$。比值 $|a_n/a_{n+1}|$ 在 n 偶时为 3^n，在 n 奇时为 $3^{-(n+1)}$，没有极限，所以比值公式用不上。

8.7 (a) $\sum|a_n|$ 收敛，所以 $a_n \to 0$，存在 N 使 $n \ge N$ 时 $|a_n| \le 1$，此时 $0 \le a_n^2 \le |a_n|$，用比较判

别法。(b) $a_n=\frac{1}{n}$：$\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum\frac{1}{n}$ 发散。(c) 不一定：$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 由交错级数判别法收敛，但 $\sum a_n^2=\sum\frac{1}{n}$ 发散。

8.8 (a) 误差界为 $|S-s_n|\le\frac{1}{n+1}$。要 $\frac{1}{n+1}<0.01$，需 $n\ge100$；若允许「≤0.01」，$n\ge99$ 即可。(b) $s_2=\frac12$，$s_3=\frac56$。由定理 8.11 的证明，$s_2<s_4\le S\le s_5<s_3$，其中 $s_4=\frac{7}{12}$，$s_5=\frac{47}{60}$，所以 $\frac12<S<\frac56$。

8.9 记 $s_n=\sum_{i\le n}a_i$，$t_k=\sum_{j=0}^{k}2^ja_{2^j}$。块 $\{2^j,\dots,2^{j+1}-1\}$ 有 2^j 项，每项 $\le a_{2^j}$，所以 $s_{2^{k+1}-1}\le t_k$。块 $\{2^{j-1}+1,\dots,2^j\}$ 有 2^{j-1} 项，每项 $\ge a_{2^j}$，所以 $s_{2^k}\ge a_1+\sum_{j=1}^{k}2^{j-1}a_{2^j}\ge\frac12t_k$。两个不等式说明 (s_n) 与 (t_k) 同时有界或同时无界。对 $a_n=n^{-p}$，$2^ka_{2^k}=(2^{1-p})^k$ 是几何级数，收敛 $\iff 2^{1-p}<1\iff p>1$。

8.10 先设 $0<L<\infty$。取 $0<\varepsilon<L$，再取 N 使 $n\ge N$ 时 $L-\varepsilon<a_{n+1}/a_n<L+\varepsilon$。连乘得

$$a_N(L-\varepsilon)^{n-N}\le a_n\le a_N(L+\varepsilon)^{n-N}.$$

令 $C_1=a_N(L-\varepsilon)^{-N}$、$C_2=a_N(L+\varepsilon)^{-N}$，两常数均为正。开 n 次方，由引理 8.15(1)，$C_i^{1/n}\to1$，所以

$$L-\varepsilon\le\liminf a_n^{1/n}\le\limsup a_n^{1/n}\le L+\varepsilon.$$

任意缩小 ε，得到上下极限同为 L，因而根值收敛于 L。

若 $L=0$，任取 $q>0$，尾部比值小于 q，连乘给出 $a_n\le Cq^n$，其中 $C=a_Nq^{-N}>0$。故 $0\le\limsup a_n^{1/n}\le q$，$q$ 任意，根值趋于 0。

若 $L=+\infty$，任取 $M>0$，尾部比值大于 $2M$，故 $a_n\ge C(2M)^n$，其中 $C>0$。因 $C^{1/n}\to1$，从某项起 $a_n^{1/n}\ge M$。这对每个 M 成立，所以根值趋于 $+\infty$。因此比值法能够判定的情形，根值法也能判定；例 8.11 的比值无极限而根值小于 1，说明后者还能处理更多情况。

第 9 讲

幂级数定义的函数与连续性

Functions Defined by Power Series and Continuity

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 9 全文；习题集 5 第 5 题。第 8 讲已证明收敛半径公式，本讲使用该工具而不重复证明。原讲义预告在下一讲证明的指数加法公式，本书也放在第 10 讲；本讲给出指数级数的定义、截断误差、连续性定义与运算法则，并完整证明习题中的局部统一逼近。正数开方与有理幂的良定义论证为原讲义 Step 1 的展开。

本讲目标

(1) 会从 $E(x)=\sum_{n\ge 0}x^n/n!$ 定义一个实函数，区分每点收敛、有限和计算与统一误差保证。

(2) 会估计阶乘尾和，选择多项式截断阶数，并说明负数输入为什么也有定义。

(3) 理解正数的正整数次方根存在且唯一，知道有理幂的定义必须与分数表示无关。

(4) 掌握相对定义域上的 ε-δ 连续定义，会为常数、恒等函数和具体多项式选择 δ。

(5) 会证明和、积、倒数、复合的连续性，明确倒数的非零条件与复合的定义域条件。

(6) 会用同一个截断阶数控制整个有界区间，并以三段误差证明 E 连续；理解连续函数由有理点上的值唯一决定。

9.1 把一个级数变成一个函数

只使用加法、乘法和除法，怎样计算一个从未定义过的函数值？以输入 $x=1$ 为例，先算有限和

$$1,\quad 1+1=2,\quad 1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\quad 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}.$$

这些有理数有越来越小的增量。第 8 讲的比值判别法能保证继续相加得到有限极限，于是可以用这个极限定义新函数。计算不需要预先知道指数函数、对数函数或它们的导数。

定义 9.1（指数级数与截断多项式） 对 $x\in\mathbb{R}$，定义

$$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad P_k(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}\quad (k\ge 0).$$

约定 $0!=1$，零次项恒为 1。P_k 称为第 k 阶**截断多项式**（truncating polynomial）。

例如 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=1+x$，$P_2(x)=1+x+x^2/2$；在 $x=0$ 处，所有 $P_k(0)=1$，故

$E(0)=1$。在 $x=1$ 处，$P_k(1)$ 递增；在 $x=-1$ 处，项的符号交替，不能再用部分和递增作为收敛理由。定义中的无限和必须先证明存在。

命题 9.2（每个实数输入都有定义） 对每个 $x\in\mathbb{R}$，级数 $\sum x^n/n!$ 绝对收敛。因此 $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是良定义的函数。

证明 $x=0$ 时只有常数项为 1。固定 $x\neq 0$，对绝对值项 $u_n=|x|^n/n!>0$ 计算

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{|x|}{n+1}\longrightarrow 0<1.$$

第 8 讲的比值判别法保证 $\sum u_n$ 收敛，绝对收敛蕴含收敛，故原级数收敛。这里比值的分子是 $|x|$，输入为负时也不能省去绝对值。 ■

这个证明中的 x 是先固定的。比值何时小于 $1/2$，会随 $|x|$ 改变；例如 $|x|=1$ 和 $|x|=100$ 时，起作用的下标不同。因此「每个输入分别收敛」还没有给出整个实轴上的统一计算精度。

例 9.1　计算同一阶多项式的三个输入　求 $P_5(1/2)$、$P_5(-1)$、$P_5(2)$，并说明它们与 E 的值有什么区别。

解　先代入有限多项式，再做有理数加法：

$$P_5(1/2)=\frac{6331}{3840},\qquad P_5(-1)=\frac{11}{30},\qquad P_5(2)=\frac{109}{15}.$$

例如 $P_5(-1)=1-1+1/2-1/6+1/24-1/120=11/30$。这些都是有限和的精确值。$E(x)$ 还包括第 6 项起的尾和，不能把 $P_5(x)$ 直接写成 $E(x)$。下一节给出遗漏部分的可靠上界。 ♦

图 9.1 比较三个截断多项式。图中画的是它们本身，无须先调用尚未定义的 e^x 作参考。

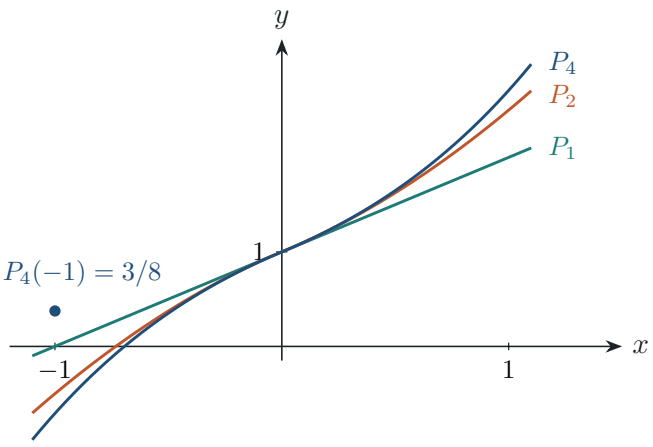


图 9.1　同一幂级数的 P_1（青）、P_2（橙）与 P_4（蓝）。它们在 0 处都取值 1，离开 0 后，高次项对近似结果产生不同影响。

图上高阶曲线逐渐接近彼此，只是有限图像提供的观察。要证明它们接近同一个函数，仍需估计任意更高阶的尾部，尤其要让估计对一整段输入同时成立。

9.2　阶乘尾和与精度保证

如果想把 $E(1)$ 算到小数点后六位，写出十几个部分和还不够：需要证明没写出的无穷多项加起来不会改变所需精度。比值判别法的证明恰好能给出这样的数量保证。

定理 9.3（统一尾和界）　设 $M \geq 0$，$k \geq 0$ 为整数，且 $q = M/(k+2) < 1$。则对每个 $|x| \leq M$，

$$\boxed{|E(x) - P_k(x)| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}\frac{1}{1 - M/(k+2)}.}$$

$M = 0$ 时右侧为零。

思路　把第一个遗漏项提出。以后的相邻项之比都不超过固定的 q，所以整个遗漏部分受一个几何级数控制。先对有限尾和做估计，再取极限，避免在证明收敛以前操作无穷和。

证明　$M = 0$ 时只有输入 $x = 0$，$E(0) = P_k(0) = 1$。设 $M > 0$。记 $v_n = M^n/n!$，则对 $n \geq k+1$，

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{M}{n+1} \leq \frac{M}{k+2} = q < 1.$$

归纳得 $v_{k+1+j} \leq v_{k+1}q^j$。对任意整数 $\ell > k$，由三角不等式，

$$|P_\ell(x) - P_k(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\ell} \frac{|x|^n}{n!} \leq v_{k+1} \sum_{j=0}^{\ell-k-1} q^j \leq \frac{v_{k+1}}{1-q}.$$

固定 x，令 $\ell \to \infty$，由 $P_\ell(x) \to E(x)$ 及极限保序，得到所述上界。右端完全不含 x，故同一个保证适用于全部 $[-M, M]$。 ■

■ **例 9.2　用有理数夹出 $E(1)$**　用 $P_8(1)$ 给出 $E(1)$ 的明确区间，并说明绝对误差是否小于 10^{-5}。

解　输入为正，所有遗漏项非负，因此先得到 $P_8(1) < E(1)$。有限加法给出

$$P_8(1) = \frac{109601}{40320} \approx 2.718279.$$

取 $M = 1, k = 8$，第一个遗漏项为 $1/9!$，后续比值不超过 $1/10$，由定理得

$$0 < E(1) - P_8(1) \leq \frac{1/9!}{1 - 1/10} = \frac{1}{326592} < 10^{-5}.$$

例如可写出向外取整的区间 $2.718278 < E(1) < 2.718283$。这些端点比精确有理上下界更宽，因而保留了包含保证；把近似小数直接当成严格端点可能破坏不等式。这里证明的是八阶近似的绝对误差，不意味着把显示的六位小数当作精确值后仍有同样的最优误差。 ♦

推论 9.4（一个阶数同时控制所有输入）　固定 $M \geq 0$。任给 $\varepsilon > 0$，存在整数 K，使对所有 $k \geq K$ 以及所有 $x \in [-M, M]$，都有 $|E(x) - P_k(x)| < \varepsilon$。

证明　$M=0$ 时任取 $K=0$。设 $M>0$。由 $\sum M^n/n!$ 收敛，通项 $M^{k+1}/(k+1)!\to 0$。取 K_1 使 $k\ge K_1$ 时 $k+2\ge 2M$，尾和界中的分母至少为 $1/2$，从而

$$|E(x)-P_k(x)|\le 2\frac{M^{k+1}}{(k+1)!}\quad(|x|\le M).$$

再取 K_2 使右侧在 $k\ge K_2$ 时小于 ε，令 $K=\max(K_1,K_2)$ 即可。这里先固定 M 和误差，再选 K，最后让输入 x 在区间中任意变化。 ■

想一想　能否要求同一个 K 对实轴上所有 x 都达到误差小于 1？

答　不能。对任意固定 K，取充分大的正数 x，正项尾和至少为第一个遗漏项 $x^{K+1}/(K+1)!$，它可以超过 1。因此一个固定阶数无法在整条实轴上给出这样的保证。固定有界区间是推论的重要条件，不应把「每个有界区间都可以」写成「全实轴都可以」。

易错提醒　「每个 P_k 连续，且 $P_k(x)$ 对每个 x 收敛」本身不能保证极限函数连续。例如在 $[0,1]$ 上，$f_k(x)=x^k$ 都是多项式，逐点极限在 $x<1$ 时为 0、在 $x=1$ 时为 1，在端点处不连续。后面证明 E 连续时，要用上推论 9.4 中同一个 K 同时控制邻近输入的性质。

9.3　有理幂：存在性与表示无关

原讲义先令 $e_*=E(1)$，再对整数定义 e_*^m，随后想把定义扩充到分数 m/n。先用不同符号 e_*，是为了与第 6 讲由 $(1+1/n)^n$ 得到的数暂时区分；二者相等需要证明，不能因为都叫 e 就省略这一步。

当 $x\ge 0$ 时，$E(x)\ge 1+x$，因为级数中其余项非负。特别地 $e_*=E(1)\ge 2>0$。所以可以定义 $e_*^{-k}=1/e_*^k$。若要定义 $e_*^{1/n}$，必须证明一个正数的正 n 次方根存在且唯一。第 3 讲的平方根构造可以推广，但需要把误差估计改成 n 次幂的估计。

定理 9.5（正整数次方根）　对任意实数 $b>0$ 和正整数 n，存在唯一实数 $r>0$ 使 $r^n=b$。

思路　用确界原理构造 r。如果 r^n 偏小，就把 r 增加一个很小的 h；如果偏大，就减去一个很小的 h。利用幂差分解，同时控制这两个改变量，无需先借用连续函数的介值定理。

证明　$n=1$ 时取 $r=b$。一般令 $S=\{t\ge 0:t^n\le b\}$。$0\in S$；$u=\min(1,b)>0$ 也属于 S：若 $b\ge 1$，则 $u^n=1\le b$；若 $b<1$，则 $u^n=b^n\le b$。取 $B=\max(1,b)$，当 $t>B$ 时 $t>1$ 且 $t>b$，所以 $t^n\ge t>b$。故 B 为上界，$r=\sup S$ 存在，且 $r\ge u>0$。

记 $C=n(r+1)^{n-1}>0$。若 $0<h<\min(1,r)$，幂差分解给出

$$(r+h)^n-r^n=h\sum_{j=0}^{n-1}(r+h)^{n-1-j}r^j\le Ch,$$

并且

$$r^n-(r-h)^n=h\sum_{j=0}^{n-1}r^{n-1-j}(r-h)^j\le Ch.$$

这里每个幂的底数非负且不超过 $r+1$，共有 n 项。

若 $r^n<b$，取 $0<h<\min(1,r,(b-r^n)/C)$，则 $(r+h)^n<b$，即 $r+h\in S$，与 r 是上界矛盾。若 $r^n>b$，取 $0<h<\min(1,r,(r^n-b)/C)$，则 $(r-h)^n>b$。正数的 n 次幂严格递增，所以每个 $t\in S$ 都小于 $r-h$，使 $r-h$ 成为比 r 小的上界，仍矛盾。因此 $r^n=b$。

唯一性也来自严格递增：若 $s>r>0$，则 $s^n-r^n=(s-r)\sum_{j=0}^{n-1}s^{n-1-j}r^j>0$，不能同时等于 b。 ■

定义 9.6（正底数的有理幂）　固定 $b>0$。整数幂按有限乘法定义，$b^0=1$，$b^{-m}=1/b^m$ $(m>0)$。对 $q=m/n\in\mathbb{Q}$，其中 $m\in\mathbb{Z}$、$n\geq 1$，定义 b^q 为满足 $r^n=b^m$ 的唯一正数 r。

例如 $16^{1/4}=2$，$16^{3/4}=8$，$16^{-1/2}=1/4$；$b=1$ 时所有有理幂都是 1。底数必须为正：底数为零时负整数幂无定义；底数为负时分母为偶数的有理幂一般没有实数值。定义域的限制不能在计算中省略。

命题 9.7（定义与分数表示无关）　若 $m/n=p/q$，其中 n,q 为正整数，则上述定义给出的正数相同。并且对任意有理数 s,t，有 $b^{s+t}=b^sb^t$。

证明　令 $u^n=b^m$、$v^q=b^p$，$u,v>0$。则 $u^{nq}=b^{mq}$、$v^{nq}=b^{pn}$，而 $mq=pn$，故由正 nq 次方根的唯一性得 $u=v$。整数幂中的指数法则只涉及有限乘法及非零数的倒数，已经成立，所以这一计算没有用到尚待证明的实指数法则。

若 $s=m/n,t=p/q$，则 $u=b^s,v=b^t$ 都为正，且 $(uv)^{nq}=b^{mq+pn}$。因此 uv 正好是定义 b^{s+t} 时所需的唯一正根，得到所述加法法则。 ■

■ **例 9.3　分数表示改变，数值保持不变**　分别用 $3/4$ 与 $6/8$ 计算 16 的相应有理幂，再求 $(8/27)^{2/3}$。

解　$8^4=4096=16^3$，且 $8>0$，故 $16^{3/4}=8$。又 $8^8=(8^4)^2=(16^3)^2=16^6$，正根唯一性给出 $16^{6/8}=8$。第二题中，$(4/9)^3=64/729=(8/27)^2$ 且 $4/9>0$，所以 $(8/27)^{2/3}=4/9$。验证时必须包含「正」的要求；若只写偶次方程，正负两个实根可能同时满足方程。 ♦

至此 e_*^q 对有理数已有严格定义。它是否等于 $E(q)$，还要依赖下一讲的加法公式 $E(x+y)=E(x)E(y)$。一旦公式成立，$E(x)E(-x)=E(0)=1$，便能由 $E(-x)\geq 1$（$x\leq 0$ 时）推出 $E(x)>0$；再由 $E(m/n)^n=E(m)=e_*^m$ 与正根唯一性得 $E(m/n)=e_*^{m/n}$。这些是将要完成的推论，不能反过来作为本讲级数收敛或连续性的前提。

9.4　连续性：输入精度如何控制输出精度

对 $f(x)=x^2+1$，输入从 1 改为 1.1，输出从 2 改为 2.21。若输出误差要小于 0.01，输入误差应限制到多少？回答这种问题的语言是连续性。数列极限用下标 n 控制误差，连续性用输入 x 到指定点的距离控制误差。

定义 9.8（相对定义域的连续性）　设 $A \subseteq \mathbb{R}$，$f : A \to \mathbb{R}$，$x_0 \in A$。若对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使所有满足 $x \in A$ 且 $|x - x_0| < \delta$ 的 x 都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，称 f 在 x_0 处**连续**（continuous）。若它在 A 的每一点连续，称 f 在 A 上连续。

ε 是预先要求的输出误差，δ 是随后选择的输入容许误差。δ 可以依赖 ε、x_0 和函数；不能在看到具体的 x 以后才重新为这一点选择。定义不要求 $x \neq x_0$，因为 $x = x_0$ 时输出误差为零，总满足要求。

定义域也属于条件的一部分。若 $A = [0, 1]$，在 0 处只检查 $x \geq 0$ 的输入；若 $A = \{0\} \cup [1, 2]$，则 0 是孤立点，取 $\delta = 1/2$ 后唯一可检查输入为 0，任何函数都在这个孤立点连续。这不是例外规定，直接来自同一个定义。

■ **例 9.4　原讲义的常数、恒等与平方例**　按定义证明常数函数 $f(x) = c$、恒等函数 $g(x) = x$ 与 $h(x) = x^2 + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，并给出 h 在 $x_0 = 1$ 处的具体控制。

解　常数函数的输出差恒为 0，任取 $\delta = 1$ 就有 $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$。恒等函数的输出差就是输入差，取 $\delta = \varepsilon$ 即可。

平方函数要先分解差，再控制一个局部因子：

$$|h(x) - h(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0|.$$

若先要求 $|x - x_0| < 1$，则 $|x| < |x_0| + 1$，故 $|x + x_0| < 2|x_0| + 1$。因此取

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right)$$

就能保证输出误差小于 ε。在 $x_0 = 1$ 处，可取 $\delta = \min(1, \varepsilon/3)$；例如 $\varepsilon = 0.01$ 时，$\delta = 1/300$ 是一个充分保证。它未必是最大的可用值，但定义只要求找到一个正值。 ♦

图 9.2 画出 $x_0 = 1, \varepsilon = 1/2$ 时这个选择产生的局部控制。

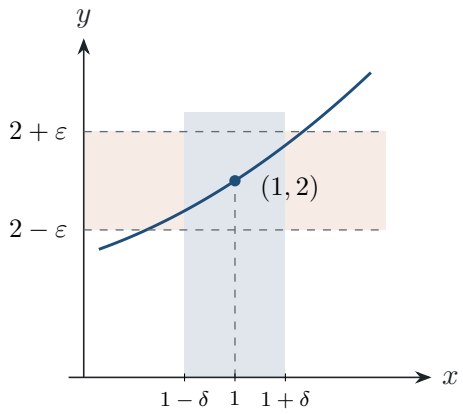


图 9.2　$h(x) = x^2 + 1$ 在 1 处的连续性。取 $\varepsilon = 1/2$、$\delta = 1/6$，蓝色竖带内的曲线落在橙色横带内；端点的函数值分别为 61/36 与 85/36，都介于 3/2 和 5/2 之间。

图中先给定横带，再寻找足够窄的竖带。能为某个大误差画出一张合适的图，还不足以证明连续；上例的公式能对任意 $\varepsilon > 0$ 作出选择，才完成了定义要求。

直观理解　连续性关注一个指定点附近的误差传播：输入只要靠这个点足够近，输出就能达到事先要求的精度。定义允许不同的点需要不同的输入精度，也允许定义域在端点处只从一侧靠近。判断连续时，应先检查函数在哪些点有定义，再比较这些点的函数值。

■ **例 9.5**　**一个跳跃点**　令 $f(x)=0$（$x\le 0$），$f(x)=1$（$x>0$）。证明它在 0 处不连续，在其他每一点连续。

解　在 0 处固定 $\varepsilon_0=1/2$。无论给出多小的 $\delta>0$，取 $x=\delta/2>0$ 就有 $|x|<\delta$，但 $|f(x)-f(0)|=1\ge\varepsilon_0$，故不连续。这里给出的是「存在一个误差要求，对所有输入半径都失败」的量词结构。

若 $x_0>0$，取 $\delta=x_0/2$，则 $|x-x_0|<\delta$ 时 $x>0$，函数在这个邻域内恒为 1。若 $x_0<0$，取 $\delta=|x_0|/2$，邻域内函数恒为 0。两种情形的输出差都为零，对任意 ε 成立。 ♦

想一想　连续函数能否把有理数输入变成无理数输出？

答　能。常数函数 $f(x)=\sqrt{2}$ 连续，在每个有理数输入处都输出无理数。连续性限制邻近输入之间的输出差，不限制函数值属于哪个数系。反过来，函数处处取有理数也不能保证连续，上例只取 $0,1$ 两个有理值，却在 0 跳跃。

9.5　连续函数的代数运算与复合

每次证明一个多项式连续，都从零开始找 δ 会很重复。例如 x^2+1 是先把恒等函数相乘，再加常数。若能证明这些操作保持连续，就能从少量基本例子得到一整类函数。原讲义将证明留作与数列极限类似的练习，这里逐项写清局部界及误差分配。

定理 9.9（连续性的运算法则）　设 $f,g:A\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in A$ 连续，$c\in\mathbb{R}$。则 $f+g$、cf、fg 在 x_0 连续。若 $g(x_0)\neq 0$，则 f/g 在其自然定义域 $\{x\in A:g(x)\neq 0\}$ 上的 x_0 处连续。

思路　和的误差分成两半；积的误差先拆成两个因子变化，再用连续性给其中一个因子取局部界；倒数先让分母远离零，再估计倒数之差。每一步都只需要把有限个正半径取最小值。

证明　*和与常数倍。*给定 $\varepsilon>0$，分别由 f,g 连续选 δ_f,δ_g，使输入距离小于对应半径时，输出差各小于 $\varepsilon/2$。取 $\delta=\min(\delta_f,\delta_g)$，三角不等式给出和的误差小于 ε。若 $c=0$，cf 为常数；若 $c\neq 0$，按精度 $\varepsilon/|c|$ 控制 f，即可使 $|cf(x)-cf(x_0)|<\varepsilon$。

*积。*记 $u=f(x_0),v=g(x_0)$。先选 δ_0 使 $|f(x)-u|<1$，故 $|f(x)|<|u|+1=:B$。再分别选半径使

$$|g(x)-v|<\frac{\varepsilon}{2B},\qquad |f(x)-u|<\frac{\varepsilon}{2(|v|+1)}.$$

取这三个半径的最小值。分解

$$f(x)g(x)-uv=f(x)(g(x)-v)+v(f(x)-u)$$

后，右侧绝对值小于 $\varepsilon/2+\varepsilon|v|/[2(|v|+1)]<\varepsilon$。即使 $u=0$ 或 $v=0$，分母仍严格为正。

倒数与商。设 $v=g(x_0)\neq 0$。先以精度 $|v|/2$ 控制 g，得 $|g(x)|>|v|/2$，所以该邻域内分母非零。再要求 $|g(x)-v|<\varepsilon|v|^2/2$，便有

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{v}\right|=\frac{|g(x)-v|}{|g(x)|\,|v|}<\varepsilon.$$

这证明倒数连续。最后把 f/g 看成 f 与 $1/g$ 的积，应用已经证明的乘法结论。 ■

推论 9.10（多项式与有理函数）　每个实系数多项式在 $\mathbb{R}$ 上连续；有理函数 p/q 在分母非零的每一点连续。

证明　常数与恒等函数连续，有限次相乘得到 x^n 连续，再做常数倍及有限次相加，得到任意多项式连续。对两个多项式使用商的结论，即得有理函数的陈述。 ■

■ **例 9.6　分母条件与补点**　比较 $r(x)=(x^2-1)/(x-1)$ 与 $s(x)=x+1$ 的连续性；若要给 r 在 1 处补定义，应补什么值?

解　r 的自然定义域是 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$，在这个域的每一点分母非零，故连续；s 在整个实轴连续。在 $x\neq 1$ 处，因式分解给出 $r(x)=x+1$，但这个等式没有给原函数在 1 处产生一个值。

定义 $\widetilde{r}(1)=2$，其他点保持 r 的值，则 $\widetilde{r}=s$，连续。如果补值 $c\neq 2$，取 $\varepsilon=|c-2|/3$。只要 $0<|x-1|<\varepsilon$，就有 $|\widetilde{r}(x)-2|<\varepsilon$，因而 $|\widetilde{r}(x)-c|>|c-2|-\varepsilon=2\varepsilon$。这样无论输入半径多小，总可在其中选一个非 1 的 x 使连续要求失败。因此唯一连续补值为 2。 ♦

定理 9.11（复合保持连续）　设 $g:A\to B$ 在 $x_0\in A$ 连续，$f:B\to\mathbb{R}$ 在 $g(x_0)$ 连续，则 $f\circ g$ 在 x_0 连续。

证明　任给 $\varepsilon>0$。先对外层函数 f 在 $g(x_0)$ 的连续性取半径 $\eta>0$，使 $y\in B$ 且 $|y-g(x_0)|<\eta$ 时 $|f(y)-f(g(x_0))|<\varepsilon$。再对内层函数 g 按输出精度 η 选 $\delta>0$，使 $x\in A$、$|x-x_0|<\delta$ 时 $|g(x)-g(x_0)|<\eta$。因为 $g(x)\in B$，把 $y=g(x)$ 代入外层控制即得结论。 ■

易错提醒　「两个公式都连续」不足以保证写出的复合在每个输入处有定义。例如 $f(y)=1/y$ 在 $y\neq 0$ 连续，$g(x)=x^2-1$ 在 $\mathbb{R}$ 连续，但 $f(g(x))$ 在 $x=\pm 1$ 无定义。使用复合定理时，须检查内层的值落在外层定义域内。

■ **例 9.7　一次选择控制两层运算**　证明 $F(x)=1/(1+(x^2+1)^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续，并在 $x_0=0$ 处直接给出一个 δ。

解　从结构判断，x^2+1 是多项式，平方后仍连续；分母至少为 1，取倒数也连续。因此 F 在所有实点连续。

若直接估计，$F(0)=1/2$，并且

$$\left|F(x)-\frac{1}{2}\right|=\frac{2x^2+x^4}{2(2+2x^2+x^4)}\le\frac{2x^2+x^4}{4}.$$

先限制 $|x|<1$，右侧不超过 $3x^2/4$。给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(1,\sqrt{\varepsilon})$，就有输出误差小于 $3\varepsilon/4<\varepsilon$。运算法则省去了重复估计；直接估计又展示了在某个具体点可以怎样选择半径。 ♦

9.6　从截断多项式证明指数级数连续

现在回到 $E(x)$。每个 P_k 连续已经由多项式推论得到；第 2 节又提供了整个有界区间上的同一个截断阶数。两者结合，正好能控制相邻两个输入处的无限尾部。这是习题集 5 第 5 题的完整思路。

定理 9.12（指数级数的连续性）　由级数定义的函数 $E(x)=\sum_{n\ge0}x^n/n!$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

思路　固定要考察的点 x_0，先用一个有界区间包住它的邻近输入。选同一个多项式，使两端的截断误差都小；再用这个固定多项式的连续性控制中间一段误差。最后把三段相加。

证明　固定 $x_0\in\mathbb{R}$，任给 $\varepsilon>0$，取 $M=|x_0|+1$。由推论 9.4，存在整数 K，使对全部 $t\in[-M,M]$ 有 $|E(t)-P_K(t)|<\varepsilon/3$。这里先把 K 固定下来。

由 P_K 在 x_0 连续，选 $\delta_1>0$，使 $|x-x_0|<\delta_1$ 时 $|P_K(x)-P_K(x_0)|<\varepsilon/3$。令 $\delta=\min(1,\delta_1)$。若 $|x-x_0|<\delta$，则 $|x|<M$，故 x 和 x_0 都可用同一个尾部估计。于是

$$\begin{aligned}|E(x)-E(x_0)|&\le|E(x)-P_K(x)|+|P_K(x)-P_K(x_0)|\\&\quad+|P_K(x_0)-E(x_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

这对任意误差成立，故 E 在任意实点连续。 ■

这个证明没有交换「取函数极限」和「取级数极限」两种操作。它只使用有限多项式的连续性和已经证明的统一尾界；每次出现无穷级数时，都先用一个明确的误差项替代。选择次序是 $x_0,\varepsilon\to M\to K\to\delta_1\to\delta$，其中 K 不能随最后的输入 x 改变。

核心思想　**先固定近似函数，再控制输入变化。**如果近似函数随输入变化而重新挑选，它自己的连续半径也可能改变，三段误差就无法共同受一个半径控制。

还可以从有限幂差分解得到更直接的数量估计。若 $|x|,|y|\le M$，其中 $M>0$，则

$$|x^n-y^n|\le nM^{n-1}|x-y|\quad(n\ge1).$$

将它应用于有限多项式，有

$$|P_k(x)-P_k(y)|\le|x-y|\sum_{n=1}^{k}\frac{nM^{n-1}}{n!}=|x-y|P_{k-1}(M)\le|x-y|E(M).$$

固定 x,y 再令 $k\to\infty$，就得到

$$|E(x)-E(y)|\le E(M)|x-y|\qquad(x,y\in[-M,M]).$$

这里不需要对 E 求导。$M=0$ 时只有 $x=y=0$，结论也成立。这个不等式称为在有界区间上的 Lipschitz 估计；它比「连续」多给出一个线性的误差界，但常数 $E(M)$ 随区间大小改变。

■ **例 9.8　不调用导数的输入误差保证**　输入 x,y 都在 $[-1,1]$ 时，要保证 $|E(x)-E(y)|<10^{-4}$，给出一个足够的输入误差条件。

解　由例 9.2 的有理尾界，$E(1)<3$。故 $|E(x)-E(y)|\le E(1)|x-y|<3|x-y|$。只要 $|x-y|<1/30000$，输出差就小于 10^{-4}。这个保证同时适用于区间内的所有点，计算中既未使用指数的加法公式，也未用到微分公式 $E'=E$。 ♦

9.7　有理点上的值能决定整个函数吗

目前 e_*^q 对有理数有定义，而 $E(x)$ 对所有实数有定义。若另有一个连续函数在每个有理点与 E 相同，它能在某个无理点取不同的值吗？有理数稠密性与连续性会排除这种可能。原 Lecture 9 预告了这个唯一性结论，这里把短证明补全，下一讲就能直接使用。

引理 9.13（连续函数保持数列极限）　设 $f:A\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in A$ 连续，$x_n\in A$ 且 $x_n\to x_0$，则 $f(x_n)\to f(x_0)$。

证明　任给 $\varepsilon>0$，连续性给出 $\delta>0$。再由 $x_n\to x_0$ 取 N，使 $n\ge N$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$。代入连续定义，得 $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$。 ■

定理 9.14（有理点决定连续函数）　若 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，且对所有 $q\in\mathbb{Q}$ 都有 $f(q)=g(q)$，则对所有实数 x 都有 $f(x)=g(x)$。

证明　固定任意 $x\in\mathbb{R}$。由第 4 讲的有理数稠密性，在每个 $(x-1/n,x+1/n)$ 中选取有理数 q_n。于是 $q_n\to x$。由引理，$f(q_n)\to f(x)$、$g(q_n)\to g(x)$；而两列逐项相等，由极限唯一性得 $f(x)=g(x)$。由于 x 任意，结论成立。 ■

■ **例 9.9　连续条件为何不可删**　令 $f(x)=0$ 对所有实数成立；令 $g(x)=0$（$x\in\mathbb{Q}$），$g(x)=1$（$x\notin\mathbb{Q}$）。两者在有理点一致，为什么不能用定理推出处处一致？

解　f 连续，但 g 在每个实点都不连续。若 x_0 有理，每个邻域都有无理输入，输出差为 1；若 x_0 无理，每个邻域都有有理输入，输出差也为 1。取固定 $\varepsilon_0=1/2$ 就验证了不连续的否定形式。它们在全部有理点一致，却在每个无理点不同，说明稠密点上的相等需要连续性才能推广到所有点。 ♦

前后联系　下一讲从绝对收敛出发证明 $E(x+y)=E(x)E(y)$，再得到严格正性、倒数与有理幂的一致性。加上本讲已经完成的连续性和有理点唯一性，就能把 $E(x)$ 认作由有理幂连续延拓得到的实指数函数。这个顺序把每个环节的依据分清：级数负责定义，误差界负责连续，加法公式负责指数运算规律。

本讲小结

- **级数定义** $E(x)=\sum_{n\ge 0}x^n/n!$ 对每个实数绝对收敛；$P_k(x)=\sum_{n=0}^{k}x^n/n!$ 是有限多项式。
- **尾和界**：若 $|x|\le M$ 且 $M<k+2$，则 $|E(x)-P_k(x)|\le M^{k+1}/[(k+1)!(1-M/(k+2))]$。
- 对每个固定 M 与误差 ε，存在**同一个截断阶数**，同时控制所有 $x\in[-M,M]$。
- **正根唯一**：$b>0$、$n\ge 1$ 时存在唯一正 r 满足 $r^n=b$；有理幂通过它定义，与分数表示无关。
- **连续定义**：给定输出误差 ε，可选输入半径 δ，使定义域内 $|x-x_0|<\delta$ 推出 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。
- **连续运算**：和、积、常数倍、复合保持连续；商还要求所考察点的分母非零。
- **指数级数连续**由固定多项式加三段误差证明；连续函数在 $\mathbb{Q}$ 上相等，就在 $\mathbb{R}$ 上相等。

练习

9.1 ★　写出 $P_3(x)$，求 $P_3(1)$、$P_3(-1)$。判断 $P_3(1)=E(1)$ 是否成立并给出理由。

9.2 ★　用尾和界证明 $|E(x)-P_5(x)|\le 1/630$ 对所有 $|x|\le 1$ 成立。这个保证能否直接用于 $x=2$?

9.3 ★　求 $81^{3/4}$、$16^{-3/4}$、$(27/8)^{2/3}$，用正整数次幂回代核对。

9.4 ★　按定义证明 $f(x)=3x-2$ 连续，并给出 δ 关于 ε 的选择。

9.5 ★★　按定义证明 $f(x)=x^3$ 在任意 x_0 连续；请先用 $|x-x_0|<1$ 给幂差分解中的因子取上界。

9.6 ★★　设 $A=[0,\infty)$，$f(x)=\sqrt{x}$。证明 f 在 A 上连续，并说明 0 处不能使用需要正下界的分母估计。提示：对 $x,y\ge 0$ 有 $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt{|x-y|}$。

9.7 ★★　令 $f(x)=0$（$x\in\mathbb{Q}$），$f(x)=x$（$x\notin\mathbb{Q}$）。证明它恰好在 0 处连续。

9.8 ★★　对 $x\in[-2,2]$，用尾和界给出 $P_8(x)$ 的统一误差上界。将结果写成有理数，并证明这个上界小于 $1/500$。

9.9 ★★★　设 $f:A\to\mathbb{R}$ 在 x_0 连续，且 $f(x_0)>0$。证明存在 $\delta>0$，使定义域内 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>f(x_0)/2$。用它解释倒数连续性证明中的局部非零保证。

9.10 ★★★　证明连续性的数列刻画的逆命题：如果每个满足 $x_n\in A$、$x_n\to x_0$ 的数列都满足 $f(x_n)\to f(x_0)$，则 f 在 x_0 连续。提示：否定连续定义，取半径 $1/n$。

练习答案与提示

9.1 $P_3(x)=1+x+x^2/2+x^3/6$，所以 $P_3(1)=8/3$、$P_3(-1)=1/3$。正输入处所有遗漏项为正，故 $E(1)>P_3(1)$，不是相等。

9.2 取 $M=1,k=5$，尾界为 $(1/6!)/(1-1/7)=1/630$。它只在 $|x|\le 1$ 得到保证，不能直接用于 $x=2$。事实上 $E(2)-P_5(2)$ 至少为第一个遗漏项 $2^6/6!=4/45>1/630$，所以同一数值上界在那里也不成立。

9.3 $81^{3/4}=27$，因为 $27^4=81^3$ 且 $27>0$；$16^{-3/4}=1/8$，因为 $(1/8)^4=16^{-3}$；$(27/8)^{2/3}=9/4$，因为 $(9/4)^3=(27/8)^2$。唯一正根保证这些回代值正是定义要求的值。

9.4 $|f(x)-f(x_0)|=3|x-x_0|$，给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/3$，即可得到严格的输出误差小于 ε。

9.5 令 $B=|x_0|+1>0$。当 $|x-x_0|<1$ 时，$|x|<B$ 且 $|x_0|<B$，所以 $|x^2+xx_0+x_0^2|\le 3B^2$。由 $x^3-x_0^3=(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)$，取 $\delta=\min(1,\varepsilon/(3B^2))$ 就得误差小于 ε。这个估计对负的 x_0 也适用。

9.6 不妨设 $x\ge y\ge 0$。因为 $\sqrt{x}\ge\sqrt{y}$，

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}\le x-y,$$

最后一步来自 $\sqrt{xy}\ge y$。交换两者得到所给不等式。取 $\delta=\varepsilon^2$，便有 $|x-x_0|<\delta$ 时输出差小于 ε。这在 $x_0=0$ 处也成立；此时若用有理化分母 $\sqrt{x}+\sqrt{x_0}$，分母随输入趋近 0 而趋零，不能给它固定正下界。

9.7 在 0 处 $f(0)=0$，不论输入有理还是无理，都有 $|f(x)|\le|x|$，取 $\delta=\varepsilon$ 得连续。若 $x_0\neq 0$ 有理，则任意邻域可选无理数 x 且 $|x-x_0|<|x_0|/2$，于是 $|f(x)-f(x_0)|=|x|>|x_0|/2$。若 x_0 无理，则任意邻域选有理数 x，输出差为 $|x_0|$。两种情形都可用固定 $\varepsilon_0=|x_0|/2$ 否定连续性。

9.8 取 $M=2,k=8$，则 $q=1/5$，尾界为

$$\frac{2^9}{9!}\frac{1}{1-1/5}=\frac{1}{567}<\frac{1}{500}.$$

注意第一个遗漏项从 $n=9$ 开始，几何比较的比值上界来自 $2/10$，不能把两处下标混在一起。

9.9 在连续定义中取 $\varepsilon=f(x_0)/2>0$，存在相应 δ。于是 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon=f(x_0)/2$。若考察值是负数，则对 $-f$ 使用同一论证，得到附近 $|f(x)|>|f(x_0)|/2$。所以非零点附近可以让倒数有定义并控制分母；只在该点非零并不要求函数在全域处处非零。

9.10 若不连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，对每个 $\delta>0$ 都有 $x\in A$ 满足 $|x-x_0|<\delta$，但 $|f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon_0$。逐个取 $\delta=1/n$，得到 $x_n\in A$ 且 $|x_n-x_0|<1/n$，故 $x_n\to x_0$；对应输出始终离 $f(x_0)$ 至少 ε_0，不可能趋于它，违背题设。因此 f 连续。孤立点时也无须另设例外，因为不连续的否定本身无法在那里成立。

第 10 讲

指数函数与连续性

The Exponential Function and Continuity

对应材料：MIT 18.100B Lecture 10。Lecture 9 的连续性定义、运算法则与有理点唯一性已整理在第 9 讲。

本讲目标

(1) 会写出两个级数的 Cauchy 乘积系数，并证明非负项情形下乘积级数的和等于两级数和的乘积。

(2) 理解绝对收敛为何允许按总次数分组，能据此推出指数级数的加法公式。

(3) 会证明 $E(x)>0$ 且 $E(q)=e^q$ 对每个有理数 q 成立。

(4) 会用有理数与无理数的稠密性证明 Dirichlet 函数在每一点不连续。

(5) 能区分逐点收敛、绝对收敛与可重排求和，避免把有限和的重排理由直接用于无穷级数。

10.1 两个非负级数怎样相乘

几何级数 $A=\sum_{i\ge 0}2^{-i}=2$、$B=\sum_{j\ge 0}3^{-j}=3/2$ 都收敛，所以乘积应为 $AB=3$。逐项把对应下标的项相乘却得到 $\sum_{n\ge 0}6^{-n}=6/5$，少了交叉项。有限和相乘时，必须先把所有指标对 (i,j) 收集起来。

定义 10.1（Cauchy 乘积） 设两列实数 $(a_n)_{n\ge 0}$、$(b_n)_{n\ge 0}$。它们的**Cauchy 乘积**（Cauchy product）是系数

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\quad(n\ge 0)$$

组成的级数 $\sum_{n\ge 0}c_n$。

例如 $c_0=a_0b_0$，$c_1=a_0b_1+a_1b_0$，$c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$。当 $a_n,b_n\ge 0$ 时，各个 c_n 也非负；若有负项，部分和就不一定递增。

定理 10.2（非负级数的乘积） 设 $a_n,b_n\ge 0$，且 $\sum a_n=A$、$\sum b_n=B$ 收敛。令 $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$，则 $\sum c_n$ 收敛且其和为 AB。

证明 记 $A_N=\sum_{i=0}^{N}a_i$、$B_N=\sum_{j=0}^{N}b_j$、$C_N=\sum_{n=0}^{N}c_n$。因所有项非负，三角形 $i+j\le N$ 包

含于正方形 $0 \le i, j \le N$，而该正方形包含于较大的三角形 $i + j \le 2N$，故

$$C_N \le A_N B_N \le C_{2N}.$$

因此 (C_N) 单调递增且被 AB 上界，依第 8 讲的非负级数判别法收敛到某个 C。令 $N \to \infty$，两侧分别趋于 C 与 AB，所以 $C = AB$。 ■

这里的有界性可以逐项读出：$C_N \le A_N B_N$，而非负性给出 $A_N \le A$、$B_N \le B$，所以 $C_N \le AB$。如果 $A = 0$，则所有 $a_i = 0$，卷积系数全为零；若 $B = 0$ 也相同。因此定理包括零和边界情形，证明没有除以 A 或 B。只有在确认每个部分和有界后，才能用单调收敛判别法得到 C_N 的极限。

对 $N = 1$，中间的矩形包含四个指标对，左侧三角形有三个，右侧大三角形有全部满足 $i+j \le 2$ 的六个格点。这个包含关系会控制无限级数里可能遗漏的交叉项。

在这个几何例子中还可以把每个卷积系数算成闭式：

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} 3^{-(n-i)} = 3 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n}.$$

这来自有限等比和：提出 3^{-n} 后，括号是 $\sum_{i=0}^{n} (3/2)^i$。例如 $c_0 = 1$、$c_1 = 5/6$、$c_2 = 19/36$。因此这组系数并非另一条几何级数；它是两条不同等比数列的卷积。把闭式再求和时，绝对收敛或非负乘积定理给出

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = 6 - 3 = 3,$$

与两级数的乘积相同。若把 B 误算成 3，会使最终乘积翻倍；这里 $j = 0$ 的首项 1 也必须计入几何级数求和公式。

■ **例 10.1　有限部分和的三角夹逼**　仍取 $a_i = 2^{-i}$、$b_j = 3^{-j}$。比较 $N = 1$ 时的三个部分和。

解　此时 $A_1 = 1 + 1/2 = 3/2$，$B_1 = 1 + 1/3 = 4/3$，所以矩形和 $A_1 B_1 = 2$。另一方面，$C_1 = c_0 + c_1 = 11/6$，而 $C_2 = C_1 + c_2 = 85/36$。于是

$$\frac{11}{6} < 2 < \frac{85}{36},$$

正好符合 $C_1 \le A_1 B_1 \le C_2$。随着 N 增大，夹住矩形和的两个三角部分和会趋向同一极限。 ♦

图 10.1 把系数 c_n 画成第一象限格点上的对角线：同一条 $i + j = n$ 的格点贡献到同一个系数。

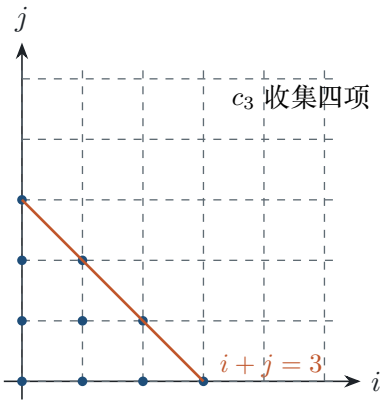


图 10.1　Cauchy 乘积的第 n 项收集所有满足 $i+j=n$ 的格点。

图中橙色对角线上的四个点正对应 $c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0$。这解释了为什么乘积系数不是 a_nb_n 的逐项乘积。

想一想　为什么卷积系数 c_n 只收集有限多个乘积?

答　若 $i,j \ge 0$ 且 $i+j=n$，则 $0 \le i,j \le n$，所以这样的指标对只有 $n+1$ 个。无限多个项只在总次数 n 上累积到无穷级数外层，不会进入单个系数。

例 10.2　有限多项式的乘积系数　令 $A(x) = 1 + x/2$、$B(x) = 1 + 2x$。按 Cauchy 乘积系数求 $A(x)B(x)$。

解　两个系数列分别是 $(1, 1/2)$、$(1, 2)$，故 $c_0 = 1$、$c_1 = 2 + 1/2 = 5/2$、$c_2 = 1$。所以 $A(x)B(x) = 1 + 5x/2 + x^2$，与直接展开一致。 ♦

10.2　绝对收敛与三角部分和

有限矩形 $0 \le i,j \le N$ 的和可以写成 $(\sum_{i=0}^{N} a_i)(\sum_{j=0}^{N} b_j)$。Cauchy 乘积的第 N 个部分和只保留三角形 $i+j \le N$，两者之间的差恰是矩形的两个角。若级数绝对收敛，角落的质量会随 N 增大而消失。

定理 10.3（绝对收敛的 Cauchy 乘积）　若 $\sum_{n\ge 0} |a_n|$ 与 $\sum_{n\ge 0} |b_n|$ 收敛，并令

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i},$$

则 $\sum_{n\ge 0} c_n$ 绝对收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right).$$

直观理解　把 a_ib_j 放在第一象限格点 (i,j) 上。部分和 $\sum_{n\le N} c_n$ 是直线 $i+j=N$ 左下方的三角形；完整乘积是整个象限。绝对收敛保证三角形外的两个角可以分别压到任意小。

思路　先用绝对值证明卷积级数收敛，再比较三角形和矩形。给定误差，取 N 使两个一维尾和都很小；若 $i+j>N$，则 $i>N/2$ 或 $j>N/2$，于是整个遗漏角被两个尾和控制。

证明　记 $A=\sum|a_i|$、$B=\sum|b_j|$。对所有 n，

$$|c_n|\le d_n:=\sum_{i=0}^{n}|a_i||b_{n-i}|.$$

对非负级数 $\sum d_n$，其第 N 个部分和不超过 AB，因为它只收集 $i+j\le N$ 的项。因此 $\sum d_n$ 收敛，$\sum|c_n|$ 也收敛。

设 $A_N=\sum_{i=0}^{N}a_i$、$B_N=\sum_{j=0}^{N}b_j$、$C_N=\sum_{n=0}^{N}c_n$。三角形展开给出 $C_N=\sum_{i+j\le N}a_ib_j$。完整矩形与三角形的差满足

$$|A_NB_N-C_N|\le\sum_{\substack{i+j>N\\ i,j\le N}}|a_i||b_j|\le A_{>N/2}B+B_{>N/2}A,$$

其中 $A_{>m}=\sum_{i>m}|a_i|$，$B_{>m}=\sum_{j>m}|b_j|$。两条尾和都趋于 0，所以右侧趋于 0。又 $A_NB_N\to(\sum a_i)(\sum b_j)$，故 $C_N\to(\sum a_i)(\sum b_j)$。∎

证明中最后一个估计值得拆开看。若 $i+j>N$ 且 $0\le i,j\le N$，则不可能同时有 $i\le N/2$ 和 $j\le N/2$；所以这些点落在「i 很大」或「j 很大」的两个角中。第一角的总绝对值不超过 $A_{>N/2}B$，第二角不超过 $B_{>N/2}A$。重复计数只会使上界变大，不影响结论。由于绝对收敛的尾和趋于零，这两个角的贡献同时消失。

这一步也说明为什么不能只说「把求和顺序换一下」。在无穷双重求和里，必须先给出一个有限区域，再证明区域外的绝对值总量可以任意小；绝对收敛正好提供了这个统一的误差控制。

注 10.1　[先截断，再取极限] 对固定的 N，A_NB_N 是有限矩形中的和，完全可以展开和重排。它与 C_N 的差只包含有限个角落项；定理的工作是证明当 N 变大时这些角落项的总绝对值趋于零。这个顺序很重要：不能先把两个无限和写成一个没有收敛依据的双重和，再凭形式上的换序得出结论。

对非负项还可以看到更精细的单调性。C_N 随 N 增大而增加，每次增加的量正是 c_{N+1}；而 A_NB_N 也是递增的。夹逼关系把两个递增过程锁在一起，说明它们最终只能有同一个极限。这也是第 8 讲「非负项级数有上界即收敛」在二维指标上的一次应用。

条件「绝对收敛」不能删去：条件收敛级数的重排可以改变和；绝对值尾和趋零正是上面遗漏角估计所需的保证。

易错提醒　「两级数收敛，所以 Cauchy 乘积一定收敛到两和的乘积」少了绝对收敛条件。取 $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$。交错级数判别法说明 $\sum a_n$ 收敛，但 $\sum |a_n|$ 是发散的 p 级数。它的 Cauchy 乘积系数为

$$c_n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}}.$$

因为 $(i+1)(n-i+1) \le ((n+2)/2)^2$，右侧和至少为 $2(n+1)/(n+2) \ge 1$，故 c_n 不趋于 0，乘积级数发散。正确的充分条件是两边绝对收敛。

■ **例 10.3**　**一个交错级数与一个几何级数**　令 $a_i = (-1/2)^i$、$b_j = (1/3)^j$。求 c_0, c_1, c_2, c_3，并说明卷积级数的和。

解　按总次数收集指标，注意不同项会相消：

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{7}{36}, \quad c_3 = -\frac{13}{216}.$$

两级数都绝对收敛，和分别是 $2/3$ 与 $3/2$。因此 $\sum c_n = (2/3)(3/2) = 1$。负的系数并不妨碍结论，关键是绝对值尾部确实趋于零。 ♦

这个例子还可以用来观察「有限计算离最终答案有多远」。前四个卷积系数的和为

$$C_3 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{7}{36} - \frac{13}{216} = \frac{209}{216},$$

而完整乘积的和为 1，所以这次截断恰好少了 $7/216$。这个差不能由某一个单独的遗漏项代表；它包含所有总次数至少为 4 的格点。绝对收敛定理保证这些格点的总和最终趋于零，但每一个固定截断都仍然会遗漏一整片无限尾部。

命题 10.4（几何衰减下的卷积估计）　若 $|a_i| \le Ar^i$、$|b_j| \le Bs^j$，其中 $A, B \ge 0$ 且 $0 \le r, s < 1$，令 $\rho = \max\{r, s\}$，则

$$|c_n| \le AB(n+1)\rho^n.$$

因而 $\sum c_n$ 绝对收敛。

证明　对每个 $0 \le i \le n$，有 $r^i s^{n-i} \le \rho^i \rho^{n-i} = \rho^n$。所以

$$|c_n| \le \sum_{i=0}^{n} |a_i||b_{n-i}| \le \sum_{i=0}^{n} ABr^i s^{n-i} \le AB(n+1)\rho^n.$$

当 $0 \le \rho < 1$ 时，级数 $\sum (n+1)\rho^n$ 是收敛的幂级数，比较判别法即得结论。这个估计不要求 r 与 s 相等，也不要求系数非负。 ■

■ **例 10.4**　**用粗估计判断卷积收敛**　对 $a_i = (-1/2)^i$、$b_j = (1/3)^j$，不用先求出卷积的闭式，证明卷积级数绝对收敛。

解　取 $A = B = 1$、$r = 1/2$、$s = 1/3$，于是 $\rho = 1/2$。上一个命题给出

$$|c_n| \le \frac{n+1}{2^n}.$$

右侧的和为 $\sum_{n\ge 0}(n+1)2^{-n}=4$，所以比较判别法说明 $\sum|c_n|$ 收敛。这个证明只使用每个因子的几何衰减，连 c_n 的正负号和精确公式都不需要知道。 ♦

方法：三角形夹逼　遇到两个绝对收敛级数的乘积，先按总指标 $i+j$ 收集卷积系数，再用「矩形减三角形」的尾和估计验证极限。

10.3　指数级数的加法公式

有限指数多项式相乘后，同次幂的系数由二项式定理决定。例如 $x=1/2$、$y=3/2$ 时，$E(x)E(y)$ 中 n 次项的系数应等于 $2^n/n!$。下面证明这个逐项规律确实传递到无穷和。

定理 10.5（指数级数的加法公式）　对任意实数 x,y，

$$\boxed{E(x+y)=E(x)E(y).}$$

思路　先把两列级数按 Cauchy 乘积相乘，再在第 n 个系数中提出 $1/n!$。剩下的有限和恰是 $(x+y)^n$ 的二项式展开。绝对收敛定理负责把这个有限系数恒等式提升为级数和的恒等式。

证明　由第 9 讲的比值判别法，$\sum x^n/n!$ 和 $\sum y^n/n!$ 都绝对收敛。由定理 10.3，其乘积等于 Cauchy 乘积级数的和。第 n 个系数为

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^{n-i}}{(n-i)!}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

因此 Cauchy 乘积的每个系数都等于 $E(x+y)$ 的对应项，求和便得结论。这里 x,y 可以为负数；二项式恒等式对所有实数都成立，绝对收敛保证有符号项的分组合法。 ■

■ **例 10.5　加法公式的两个输入**　写出 $E(1/2)E(3/2)$ 以及 $E(-2)E(1/3)$ 的合并结果。

解　把输入相加即可：$E(1/2)E(3/2)=E(2)$，而 $E(-2)E(1/3)=E(-5/3)$。第二个等式含负输入，说明定理的实数范围不能只靠非负项单调性处理；这里使用的是绝对收敛的 Cauchy 乘积定理。 ♦

■ **例 10.6　三次系数逐项核对**　在 $E(1/2)E(3/2)$ 的 Cauchy 乘积中，计算 $n=3$ 的系数。

解　依定义，

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{(1/2)^i}{i!}\frac{(3/2)^{3-i}}{(3-i)!}=\frac{(1/2+3/2)^3}{3!}=\frac{4}{3}.$$

这正是 $E(2)$ 中 $x^3/3!$ 的系数。 ♦

再把前几个次数全部列出，可以看到每一行都由有限个交叉项组成：

n	0	1	2	3	4
$\sum_{i=0}^{n} \dfrac{(1/2)^i (3/2)^{n-i}}{i!(n-i)!}$	1	2	2	4/3	2/3
$(1/2+3/2)^n/n!$	1	2	2	4/3	2/3

表中每一列对应一个固定总次数 n。指数加法公式并非把两个相同下标的项相乘，而是先把所有 $i+j=n$ 的贡献相加，再由二项式定理识别这个有限和。

如果只截断到二次，有限乘积仍然能显示同样的结构：

$$(1+x+x^2/2)(1+y+y^2/2) = 1+(x+y)+\left(\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}\right)+R,$$

其中 R 收集总次数至少为 3 的项。括号内的二次部分正是 $(x+y)^2/2$。无限级数的证明只是把这个有限的「按总次数收集」过程延伸到所有次数，并用绝对收敛控制 R 的极限。

■ **例 10.7　截断乘积中的高次余项**　取 $x=1/2$、$y=1/3$，把上面的二次截断乘积算到最后一项，并比较它的二次部分。

解　先分别计算

$$P_2(1/2) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \frac{13}{8}, \qquad P_2(1/3) = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{18} = \frac{25}{18}.$$

所以有限乘积为

$$P_2(1/2)P_2(1/3) = \frac{325}{144}.$$

按总次数只保留到二次时得到

$$1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2} = 1+\frac{5}{6}+\frac{25}{72} = \frac{157}{72} = \frac{314}{144}.$$

两者相差 $11/144$，正好由三次和四次的项组成。这个小计算说明有限截断中也不能把乘积误写成「先各自截断，再只相乘同次项」。 ♦

想一想　能否由 $E(x+y)=E(x)E(y)$ 直接断定 $E(x)>0$？
答　可以，但还要用 $E(0)=1$。加法公式给出 $E(x/2)E(-x/2)=1$，因此 $E(x/2)\neq 0$；再由 $E(x)=E(x/2)^2$ 得 $E(x)>0$。下一节也给出直接利用级数非负项的证明。

10.4　正性与有理指数

加法公式已经把指数的乘法关系建立起来。现在回到第 9 讲暂时使用的符号 $e_* = E(1)$，说明它确实与由正根定义的有理幂一致。

命题 10.6（指数级数的正性）　对所有 $x\in\mathbb{R}$，都有 $E(x)>0$，并且 $E(-x)=1/E(x)$。

证明　若 $x \geq 0$，级数的首项为 1，其余项非负，因此 $E(x) \geq 1 > 0$。若 $x < 0$，则 $-x > 0$，由加法公式

$$E(x)E(-x) = E(0) = 1.$$

由于 $E(-x) > 0$，可得 $E(x) = 1/E(-x) > 0$，并且同一等式给出倒数公式。 ■

图 10.2 把 x 与 $-x$ 的关系画成一条闭合的乘法链；正性保证链上的每个量都能取倒数。

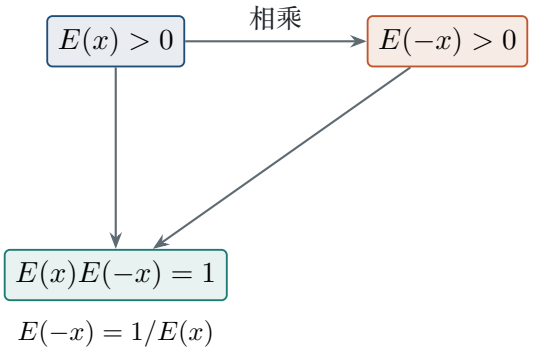


图 10.2　加法公式把正输入的级数值与负输入配成倒数。

这张图的关键不是把两个正数「相乘后变正」，而是先用非负项证明其中一个值为正，再由乘积等于 1 得到另一个值也为正。

命题 10.7（有理指数的一致性）　令 $e = E(1)$。对任意整数 m，$E(m) = e^m$；若 $q = m/n \in \mathbb{Q}$、$n \geq 1$，则 $E(q)$ 等于第 9 讲中以正根定义的 e^q。

证明　由加法公式归纳得 $E(m) = E(1)^m = e^m$（负整数用 $E(m)E(-m) = 1$）。令 $q = m/n$。反复使用加法公式，

$$E(q)^n = E(nq) = E(m) = e^m.$$

又由前一个命题 $E(q) > 0$，所以 $E(q)$ 是方程 $r^n = e^m$ 的唯一正根，正好等于有理幂定义中的 $e^{m/n}$。 ■

■ **例 10.8　指数的整数与分数输入**　把 $E(3)$、$E(-2)$、$E(3/2)^2$ 写成 e 的幂，并说明 $E(3/2) > 0$。

解　$E(3) = e^3$。由倒数公式 $E(-2) = 1/E(2) = e^{-2}$。此外

$$E(3/2)^2 = E(3) = e^3.$$

正性命题说明 $E(3/2)$ 是正平方根，所以 $E(3/2) = e^{3/2}$，不能选择负平方根。 ♦

易错提醒　从 $u^n = e^m$ 只能先得到 u 是一个 n 次方根；若 n 为偶数，正根和负根都可能满足方程。这里必须使用 $E(q) > 0$，才能把 $E(q)$ 识别为有理幂定义中的唯一正根。

由加法公式还可以得到几个常用的运算规则。对正整数 k，反复取 $y=x$ 得

$$E(kx)=E(x)^k,$$

而取 $y=-x$ 得 $E(0)=E(x)E(-x)$。若 $y\neq 0$，再把 x 写成 $(x-y)+y$，便有

$$E(x-y)=\frac{E(x)}{E(y)}.$$

这些式子都来自同一个加法公式；不能把它们当作独立的指数公理。

■ 例 10.9　**单调性与平移**　证明 E 在实轴上严格递增，并求 $E(5/2)/E(1/2)$。

解　若 $y>x$，则 $y-x>0$，级数的非负项给出 $E(y-x)\geq 1+(y-x)>1$。于是

$$E(y)=E(x)E(y-x)>E(x),$$

所以 E 严格递增。商用差值公式：

$$\frac{E(5/2)}{E(1/2)}=E(2)=e^2.$$

严格递增性只用了正输入时的首项和一次项，不需要微分。　♦

注 10.2　在本讲中 E 是由级数定义的实函数，而 e^q 先只对有理数 q 定义。写 $E(x)=e^x$ 对任意实数 x 需要把「实指数」的定义约定为这个级数，或者先做连续延拓；这里只在有理数处使用已证明的一致性。

有理数上的指数法则现在都可以从加法公式得到。若 $q,r\in\mathbb{Q}$，则

$$E(q+r)=E(q)E(r),\qquad E(q-r)=\frac{E(q)}{E(r)},\qquad E(kq)=E(q)^k\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

第二个式子的分母不为零来自正性；第三个式子对负整数 k 仍成立，因为 $E(q)^{-1}=E(-q)$。因此有理幂的运算规则并非额外假设，而是级数恒等式和正根选择共同推出的结果。

■ 例 10.10　**半指数的平方**　不计算任何无穷和，证明 $E(1/2)^2=e$ 且 $E(1/2)^4=e^2$。

解　由加法公式，$E(1/2)^2=E(1/2+1/2)=E(1)=e$。再平方一次，$E(1/2)^4=e^2$。这里的正性保证 $E(1/2)$ 取正平方根；如果只从方程 $u^2=e$ 出发，符号仍有歧义。　♦

想一想　若把有理幂定义中的「正数」删掉，$16^{1/2}$ 会有几个候选值？
答　方程 $r^2=16$ 有 $r=4$ 与 $r=-4$ 两个实根，定义就不再唯一。要求正根正是为了使分数表示和指数运算得到单值函数。

命题 10.8（指数的序性质）　若 $x<y$，则 $E(x)<E(y)$。特别地，$x>0$ 时 $E(x)>1$，$x<0$ 时 $0<E(x)<1$。

证明　令 $t = y - x > 0$。正输入时级数的前两项给出 $E(t) = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} t^n/n! > 1$。由加法公式，$E(y) = E(x)E(t)$；正性命题说明 $E(x) > 0$，所以乘以 $E(t) > 1$ 会严格增大数值。取 $x = 0$ 得 $E(y) > 1$（$y > 0$）。若 $x < 0$，则 $-x > 0$ 且 $E(x) = 1/E(-x)$，因而 $0 < E(x) < 1$。 ■

这个论证也给出一个方便的比较方法：先把较大的输入写成较小输入加上正数，再使用加法公式。比如 $E(-3) < E(-2) < E(0) = 1$；直接逐项比较两个交错级数并不方便。

在 $x = 0$ 附近，$E(x) - 1$ 的符号也由输入符号决定：$x > 0$ 时 $E(x) > 1$，$x < 0$ 时由倒数关系得到 $E(x) < 1$。因此 $E(x) = 1$ 只有解 $x = 0$。这个结论可独立于任何图像得到，并为之后把指数函数作为严格单调的坐标变换提供基础；本讲还不引入对数函数，所以这里只记录单射性，不讨论它的反函数如何构造。例如，若 $E(u) = E(v)$，严格递增性立即推出 $u = v$；若 $E(u) = 1$，则 $u = 0$。这两条结论不要求先知道 E 是否取遍正数。

■ **例 10.11　加法与倒数**　不计算 $E(-1)$ 的小数近似，证明 $0 < E(-1) < 1$、$E(-1)E(2) = E(1)$，并化简 $E(2)/E(5)$。

解　第一条来自序性质。第二条由 $-1 + 2 = 1$ 及加法公式得到。最后用差值公式：

$$\frac{E(2)}{E(5)} = E(2 - 5) = E(-3).$$

分母非零由正性保证；这些运算不需要逐项求和。 ♦

10.5　稠密集上的跳跃：处处不连续的函数

第 9 讲证明了：两个连续函数只要在所有有理点相同，就处处相同。连续性是这个结论的关键；去掉它，可以构造在每一点都失败的函数。

定义 10.9（有理数指示函数（Dirichlet 函数））　定义 $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

这个函数只记录输入是有理数还是无理数，称为**Dirichlet 函数**（Dirichlet function）。

有理数与无理数都在实轴上稠密：任意区间都含有有理数，也含有无理数。前一个事实来自第 4 讲的有理数稠密性；后一个事实可由「有理数加上一个足够小的 $\sqrt{2}/n$」得到。具体地，给定区间 (a, b)，先取正整数 n 使 $\sqrt{2}/n < b - a$，再由有理数稠密性在 $(a, b - \sqrt{2}/n)$ 中选 $r \in \mathbb{Q}$。则 $r + \sqrt{2}/n \in (a, b)$ 且为无理数。这个构造还说明：无理点可以任意靠近指定的有理点。

定理 10.10（Dirichlet 函数处处不连续）　函数 D 在每个 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处都不连续。

证明　固定 x_0，取 $\varepsilon_0 = 1/2$。给定任意 $\delta > 0$，在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中选一个数 y，使 y 与 x_0 的有理性相反：若 x_0 有理，取无理 y；若 x_0 无理，取有理 y。于是 $|y - x_0| < \delta$，但

$|D(y)-D(x_0)|=1\geq\varepsilon_0$。这正是否定连续性的量词结构，因此 D 在 x_0 不连续。由于 x_0 任意，D 处处不连续。 ■

图 10.3 在一个小区间内交替标出有理点与无理点；点越密，越不能找到只包含同一类点的邻域。

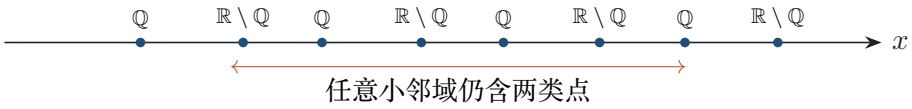


图 10.3　有理数与无理数在任意区间内都出现，所以 D 无法在任何点保持局部常值。

图中的点只是有限个标记，不能代表全部实数；它表达的是密度性质，而非一张精确的函数图像。连续性要求同一邻域内所有输入的输出都接近，任意两类点的交替出现正好破坏了这一要求。

■ **例 10.12　两条逼近序列**　给出趋于 0 的有理数列和无理数列，并比较它们代入 D 后的极限。

解　取 $q_n=1/n\in\mathbb{Q}$，以及 $u_n=\sqrt{2}/n\notin\mathbb{Q}$。二者都趋于 0，但 $D(q_n)=1$ 对所有 n，而 $D(u_n)=0$ 对所有 n。因此两条输入序列趋向同一点，输出却分别恒为 1 与 0；这与连续函数的数列刻画矛盾，也给出了定理的直观版本。 ♦

■ **例 10.13　改变一个点的值**　令 $F(x)=D(x)$ $(x\neq0)$，而 $F(0)=2$。判断 F 在 0 处是否连续。

解　取无理数序列 $x_n\to0$，则 $F(x_n)=0$，而 $F(0)=2$，输出差恒为 2；因此取 $\varepsilon=1$ 就能否定连续性。把一个点的值改成 2 不会修复原来由两类稠密点造成的跳跃。 ♦

■ **例 10.14　乘上趋零因子**　令 $H(x)=xD(x)$。证明 H 在 0 处连续，并解释它为什么不与 D 的处处不连续矛盾。

解　$H(0)=0$，且对任意 x 都有 $|H(x)-H(0)|=|xD(x)|\leq|x|$。给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则 $|x|<\delta$ 推出输出差小于 ε，所以 H 在 0 处连续。D 的跳跃大小恒为 1；乘上 $|x|$ 后，靠近 0 时跳跃幅度也趋于 0，因而局部振幅被压平。进一步看 $x_0\neq0$ 的情形。若 x_0 有理，取趋于 x_0 的无理数列 u_n，则 $H(u_n)=0$，而 $H(x_0)=x_0\neq0$。若 x_0 无理，取有理数列 $q_n\to x_0$，则 $H(q_n)=q_n\to x_0$，而 $H(x_0)=0$。两种情形都违反连续函数的数列刻画。因此 H 恰好只在 0 处连续；乘上趋零因子可以修复一个指定点，却不能消除远离该点的稠密跳跃。 ♦

命题 10.11（区间上的振幅）　对任意非空开区间 I，函数 D 在 I 上同时取 0 和 1。更精确地，若 $a\in I$ 且 $(a-\delta,a+\delta)\subset I$，则

$$\sup_{|x-a|<\delta}D(x)=1,\qquad\inf_{|x-a|<\delta}D(x)=0.$$

证明　有理数稠密性给出区间中的有理点，所以最大值至少为 1；无理数稠密性给出无理点，所以最小值至多为 0。由于 D 只取 $0,1$，两者正好分别为 1 和 0。 ■

这个命题把「处处不连续」写成了局部振幅的语言：无论把观察窗口缩小多少，输出的上下差仍为 1。相比之下，$H(x)=xD(x)$ 在 0 附近的绝对振幅不超过窗口半径，正是它能在 0 连续的原因。

■ **例 10.15　代数消去可以恢复连续性**　令 $K(x)=D(x)^2-D(x)$。求 K 的值域，并判断它在任意点是否连续。

解　因为 $D(x)$ 只有 0 和 1 两种值，逐点都有 $D(x)^2=D(x)$，所以 $K(x)=0$，值域为 $\{0\}$。因此 K 是常函数，在每一点连续。对不连续函数做代数运算时可能发生精确消去；仅凭组成它的函数不连续，不能判断结果。 ♦

> **命题 10.12（加上连续函数仍保留跳跃）**　若 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续、$c\neq 0$，则 $g+cD$ 在每一点都不连续。

证明　固定 x_0。由有理数与无理数的稠密性，可取有理数列 $q_n\to x_0$ 和无理数列 $u_n\to x_0$。连续性给出 $g(q_n),g(u_n)\to g(x_0)$，但

$$(g+cD)(q_n)\longrightarrow g(x_0)+c,\qquad (g+cD)(u_n)\longrightarrow g(x_0).$$

因为 $c\neq 0$，两列函数值的极限不同。若 $g+cD$ 在 x_0 连续，两列输出都必须趋于它在 x_0 的同一个函数值，矛盾。点 x_0 任意，故处处不连续。 ■

因此，D^2-D 的连续性来自两个相同跳跃的精确抵消；加入任意连续背景函数则无法抵消跳跃。判断复合或代数组合的连续性时，计算实际取值和极限比只看组成对象的名称更可靠。

这里的序列证明也可以改写成 ε-δ 语言。固定 x_0 后，先取 g 的一个连续半径，使邻域内 $|g(x)-g(x_0)|<|c|/3$。任给 $\delta>0$，取同时落在这个连续邻域与 δ 邻域内的点 x，并让它与 x_0 的有理性相反。于是 $|D(x)-D(x_0)|=1$，由反三角不等式，

$$|(g+cD)(x)-(g+cD)(x_0)|>\frac{2|c|}{3}.$$

固定 $\varepsilon_0=|c|/3$ 就否定了连续性。序列证明则将同一事实表达为两条趋于同一点的序列对应两个不同极限。

易错提醒　有限张示意图上有理点与无理点交替出现，不能代替密度证明。严格论证要对任意 $\delta>0$ 选出相反类型的输入，再固定一个失败误差 ε_0。

前后联系　本讲的 Cauchy 乘积给出 $E(x+y)=E(x)E(y)$，第 9 讲的统一尾界给出 E 的连续性，二者合起来把级数定义的 E 与有理幂定义的指数统一起来。处处不连续的 D 则提醒我们：逐点给出函数值，不能替代连续性证明。

本讲小结

- **Cauchy 乘积**：$c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$；两级数绝对收敛时，$\sum c_n=(\sum a_n)(\sum b_n)$。
- 非负项乘积可用 $C_N\le A_NB_N\le C_{2N}$ 夹逼；绝对值尾和控制一般有符号项的遗漏角。
- **指数加法公式**：$E(x+y)=E(x)E(y)$，其中二项式恒等式计算每个卷积系数。
- **正性与倒数**：$E(x)>0$，且 $E(-x)=1/E(x)$。
- 对 $q=m/n\in\mathbb{Q}$，$E(q)^n=e^m$ 且 $E(q)>0$，所以 $E(q)=e^q$（正根定义）。
- 有理数与无理数都稠密；有理数指示函数 D 在每一点都不连续。

练习

10.1 ★ 对 $a=(1,2)$、$b=(3,4)$（其余项为 0）求 Cauchy 乘积的 c_0,c_1,c_2。

10.2 ★ 计算 $a_i=2^{-i}$、$b_j=3^{-j}$ 时的 c_3，并说明为什么不能只算 a_3b_3。

10.3 ★ 用二项式定理证明

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^{n-i}}{(n-i)!}=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

10.4 ★★ 证明：若 $\sum|a_n|$、$\sum|b_n|$ 收敛，则 $\sum|c_n|$ 收敛，其中 c_n 是 Cauchy 乘积系数。

10.5 ★★ 用加法公式化简 $E(2)E(-5)$、$E(1/3)E(-1/3)$ 和 $E(7/4)^4$。

10.6 ★★ 证明 $E(x)>0$ 的负数情形，并明确指出使用了哪一个已经证明的等式。

10.7 ★★ 设 $q=m/n$，证明 $E(q)^n=e^m$，并解释为什么正性是选取唯一根所必需的。

10.8 ★★ 证明任意区间都含有无理数：给定 $a<b$，先取 n 使 $\sqrt{2}/n<b-a$，再从区间中选有理数 r，令 $r+\sqrt{2}/n$ 或 $r-\sqrt{2}/n$ 落在 (a,b)。

10.9 ★★★ 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $f(q)=1$ 对所有 $q\in\mathbb{Q}$。证明 $f(x)=1$ 对所有实数成立，并说明它为何不能等于 D。

10.10 ★★★ 判断函数 $G(x)=xD(x)$ 是否在 0 处连续；若连续，给出 δ，若不连续，给出固定的 ε 和反例输入。

练习答案与提示

10.1 $c_0=3$、$c_1=10$、$c_2=8$。

10.2 $c_3=65/216$，因为四个指标对 $(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$ 都贡献，逐项 a_3b_3 只保留一个错误的项。

10.3 把 $1/(i!(n-i)!)$ 写成 $\binom{n}{i}/n!$，再用 $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$。

10.4 令 $d_n=\sum_{i=0}^{n}|a_i||b_{n-i}|$。非负乘积定理说明 $\sum d_n=(\sum|a_n|)(\sum|b_n|)<\infty$，且 $|c_n|\le d_n$，所以 $\sum|c_n|$ 收敛。

10.5 $E(2)E(-5)=E(-3)$；$E(1/3)E(-1/3)=E(0)=1$；$E(7/4)^4=E(7)=e^7$。

10.6 若 $x<0$，则 $-x>0$ 且 $E(-x)\ge1$；由 $E(x)E(-x)=E(0)=1$ 得 $E(x)=1/E(-x)>0$。

10.7 加法公式反复使用给 $E(q)^n=E(nq)=E(m)=e^m$；偶数 n 时方程可能有正负两个根，$E(q)>0$

才能选唯一正根。

10.8 取 $n > \sqrt{2}/(b-a)$，由有理数稠密性选 $r \in (a, b - \sqrt{2}/n)$；则 $r + \sqrt{2}/n \in (a,b)$ 且为无理数。

10.9 固定 x，取有理数列 $q_n \to x$。连续性给出 $f(x) = \lim f(q_n) = 1$。所以 $f \equiv 1$；但 D 在无理数点取 0，两者不可能相等。

10.10 连续。因为 $|G(x) - G(0)| = |xD(x)| \le |x|$，给定 $\varepsilon > 0$ 取 $\delta = \varepsilon$ 即可；稠密跳跃乘上趋零因子后被压平。

第 11 讲

介值定理与最值定理

Intermediate and Extreme Value Theorems

对应材料：MIT 18.100B Lecture 11 前两页。原讲义后半部的度量空间依既定编排放在第 12 讲。本讲展开最值定理、介值定理及其计算应用；连续性的数列刻画承接第 9 讲。

本讲目标

(1) 会从连续函数与收敛数列的关系出发，说明闭区间上的有界性和最值取得性。

(2) 掌握最值定理的两个步骤，区分上确界与最大值，并能逐项核对闭、有界、连续三个条件。

(3) 会用确界法和二分法证明介值定理，明确介值定理只保证存在性。

(4) 能给非线性方程构造异号区间，并利用严格单调性另证唯一性。

(5) 会从区间长度给二分近似指定误差，区分输入误差和函数值误差。

(6) 会用最值与介值定理确定连续函数的像集，证明正函数的统一正下界。

11.1 从局部连续到数列极限

取 $f(x)=x^2$，让输入 $x_n=1+1/n$ 靠近 1，则输出 $f(x_n)=1+2/n+1/n^2$ 靠近 1。连续性的数列刻画把这个熟悉现象推广到任意连续函数。它将把前面数列一章的 Bolzano–Weierstrass 定理带进函数问题。

> **引理 11.1（连续函数保持数列极限）** 设 $f:A\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in A$ 连续。若 $x_n\in A$ 且 $x_n\to x_0$，则 $f(x_n)\to f(x_0)$。

证明 给定 $\varepsilon>0$，先由连续性选 $\delta>0$，使定义域内 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。再由数列收敛选 N，使 $n\geq N$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$。将 $x=x_n$ 代入便得输出误差小于 ε。选择顺序为 $\varepsilon\to\delta\to N$，最终的 N 同时适用于所有 $n\geq N$。 ■

这里要求极限点属于定义域。例如 $f(x)=1/x$ 在 $(0,1]$ 连续，而 $x_n=1/n$ 的极限 0 不在定义域；不能写 $f(x_n)\to f(0)$。事实上函数值为 n，趋向无穷。这个例子会在最值定理的条件检查中再次出现。

■ **例 11.1 端点处也能使用数列引理** 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，$x_n=1-1/n$。若已知 $f(x_n)=$

$2-1/n$，求 $f(1)$。

解　先检查 $x_n \in [0,1]$ 且 $x_n \to 1 \in [0,1]$。数列引理给出 $f(x_n) \to f(1)$，而题设给出的值趋于 2，由极限唯一性得到 $f(1)=2$。端点的连续性只考察定义域内的输入，并不需要把 f 延伸到 1 的右边。 ♦

> **引理 11.2（局部保持符号）**　若 $f: A \to \mathbb{R}$ 在 x_0 连续且 $f(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使 $x \in A$、$|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>f(x_0)/2>0$。若 $f(x_0)<0$，则某个邻域内 $f(x)<f(x_0)/2<0$。

证明　正值情形取 $\varepsilon = f(x_0)/2$。连续性保证 $|f(x)-f(x_0)|<f(x_0)/2$，所以 $f(x)>f(x_0)-f(x_0)/2$。负值情形对 $-f$ 使用同一论证。 ■

这个结论依赖 $f(x_0)$ 严格非零。若 $f(x_0)=0$，附近可以有两种符号：$f(x)=x$ 在 0 处连续，左右两边分别为负和正。也可以附近全为非负，例如 $f(x)=x^2$。所以「连续」并不等同于「局部恒号」，还需要所考察点的函数值非零。

■ **例 11.2　给出具体的正值邻域**　对 $f(x)=3-2x$，在 $x_0=1$ 附近找一个半径，使 $f(x)>1/2$。

解　因为 $f(1)=1$ 且 $|f(x)-1|=2|x-1|$，取 $\delta=1/4$ 即可。若 $|x-1|<1/4$，则 $|f(x)-1|<1/2$，从而 $f(x)>1/2$。这里半径同时控制邻域内所有输入，不能在输入选好之后再改变半径。 ♦

> **想一想**　若 $f(x_n)>0$ 对所有 n，且 $x_n \to x_0$、f 在 x_0 连续，能否推出 $f(x_0)>0$？
> **答**　只能推出 $f(x_0)\geq 0$。取 $f(x)=x$ 和 $x_n=1/n$，每个函数值都为正，但 $f(0)=0$。极限保序一般保留非严格不等式；要得到严格正值，需要额外的统一正下界。

11.2　闭区间上的最值为什么能取得

函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $[-1,3]$ 上有最小值 0，在 $x=1$ 取得；最大值为 4，在两端点取得。配方使这个例子很容易，但对于只有连续性信息的函数，不能先求导或猜极值点。最值定理保证即使没有显式公式，也确实存在最优输入。

> **定义 11.3（最大值与上确界）**　设 $f: A \to \mathbb{R}$，$A \neq \varnothing$。若存在 $x_M \in A$ 使每个 $x \in A$ 都满足 $f(x) \leq f(x_M)$，则 $f(x_M)$ 称为 f 的**最大值**（maximum）。值集 $f(A)$ 的上确界称为 f 的上确界。最小值与下确界类似定义。

最大值必须属于值集；上确界只要求是最小上界。例如 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 上的上确界为 1，但没有最大值，因为 1 不是函数值。常函数在任意非空集合上都有最大值和最小值，且两者相等；最值定理给的是足够条件，不能把条件当作必要条件。

定理 11.4（最值定理）　设 $a \le b$，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续。则 f 有界，并存在 $x_m, x_M \in [a,b]$，使

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \qquad (x \in [a,b]).$$

直观理解　如果函数值向某个最优值逼近，就选择相应的输入。输入困在一个闭有界区间中，因而存在收敛子列；闭性使极限仍留在定义域，连续性再把输入极限送到那个最优函数值。

思路　先排除函数无界的可能，才能使用值集的上确界。随后选一列越来越接近上确界的函数值，用 Bolzano–Weierstrass 定理抽取相应输入的收敛子列。最后由连续性把上确界变成某个点上的函数值。最小值通过 $-f$ 处理。

证明　$a = b$ 时定义域只有一个点，结论直接成立。以下设 $a < b$。

第一步：有界性。若 f 无界，则对每个 $n \ge 1$ 可选 $x_n \in [a,b]$ 使 $|f(x_n)| > n$。输入数列有界，由第 7 讲的 Bolzano–Weierstrass 定理，存在子列 $x_{n_k} \to x_*$。由于 $a \le x_{n_k} \le b$，极限保序给出 $a \le x_* \le b$，所以 $f(x_*)$ 有定义。连续性推出 $f(x_{n_k}) \to f(x_*)$，因此这列函数值有界。但 $|f(x_{n_k})| > n_k \ge k$，不可能有界，矛盾。

第二步：取得最大值。值集 $E = f([a,b])$ 非空且有界，令 $M = \sup E \in \mathbb{R}$。上确界的逼近性质保证对每个 n 可选 $y_n \in [a,b]$ 使

$$M - \frac{1}{n} < f(y_n) \le M.$$

再由 Bolzano–Weierstrass 定理取 $y_{n_k} \to y_* \in [a,b]$。夹逼定理说明 $f(y_{n_k}) \to M$，连续性说明同一列趋于 $f(y_*)$，极限唯一性给出 $f(y_*) = M$。取 $x_M = y_*$。

第三步：取得最小值。$-f$ 也连续，前两步说明它取得最大值。若最大值在 x_m 取得，则 $-f(x) \le -f(x_m)$ 对每个 x 成立，等价于 $f(x_m) \le f(x)$。 ∎

这个证明用了两次抽子列，任务不同。第一次把「值越来越大」与连续性矛盾起来，目的是证明上确界为有限实数；第二次把「值越来越接近有限上确界」变成取到它。不能在没有证明有界之前就令 $M = \sup E$ 并按实数操作。

图 11.1 画出最开始的二次函数，显示最大值可以在多个点取得，最小值可以在内部取得。

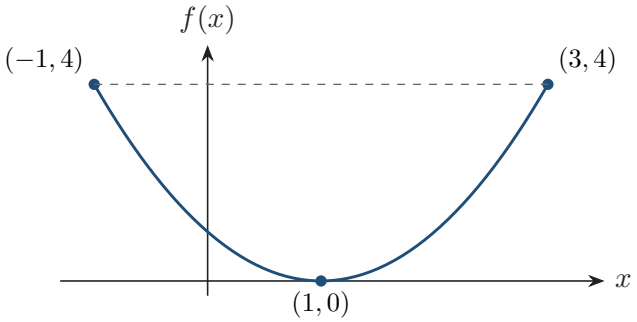


图 11.1　$f(x) = (x-1)^2$ 在 $[-1,3]$ 上的最小值为 0，最大值为 4，最大值点不唯一。

图上的三个点分别代入原式就得到对应数值。一般连续函数的最值点不一定像配方例子这样容易定位；定理保证存在，并未提供总能直接写出的公式。

■ **例 11.3　不用微分求最值**　求 $h(x)=x(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值，以及所有取得点。

解　先配方：$h(x)=1/4-(x-1/2)^2\le 1/4$，且等号当且仅当 $x=1/2$。所以最大值为 $1/4$，唯一取得点为 $1/2$。另一方面，区间内 $x\ge 0$ 且 $1-x\ge 0$，故 $h(x)\ge 0$，等号恰在 $x=0,1$ 成立。因此最小值为 0，全部取得点为 $0,1$。最值定理先保证最优值存在，配方进一步找到了它们。 ♦

想一想　能否从一列 $f(y_n)\to M$ 推出整个输入数列 y_n 收敛?
答　不能。例如上图中取 $y_{2n}=3$、$y_{2n-1}=-1$，函数值恒为最大值 4，输入却在两端间交替。证明只需要抽出一个收敛子列，不需要整列输入收敛。

方法：选择近似最优点　要证明上确界能够取到，先为每个 n 选择误差小于 $1/n$ 的近似最优点，再抽取收敛子列。连续性将输入的极限转化为输出的最优值。

11.3　逐个检查最值定理的条件

把 $f(x)=x$ 的定义域从 $[0,1]$ 改成 $(0,1)$，函数公式完全相同，最大值却消失了。最值定理依赖函数和定义域两个方面的信息。证明里每个条件都有明确用途：有界性让输入能抽取收敛子列，闭性让子列极限留在定义域，连续性让函数值保持极限。

■ **例 11.4　去掉闭性**　分别判断 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$、$[0,1)$ 与 $(0,1]$ 上是否取得最大值和最小值。

解　先写出值集，它们分别就是 $(0,1)$、$[0,1)$、$(0,1]$。第一种情形上下确界为 $1,0$，均不取得。第二种情形最小值 0 在 $x=0$ 取得，上确界 1 不取得。第三种情形最大值 1 在 $x=1$ 取得，下确界 0 不取得。对于未取得的一端，任何候选输入都可以向那一端再移动一点，得到更优的函数值。 ♦

去掉闭性还可能使函数无界。例如 $g(x)=1/x$ 在 $(0,1]$ 连续，但 $g(1/n)=n$。这里输入收敛到 0，极限点却被定义域排除，所以数列引理无处使用。证明中的闭性不能仅凭「区间长度有限」替代。

■ **例 11.5　去掉有界性**　函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=1/(1+x^2)$ 都在整个实轴连续，前者无界，后者有界。它们是否都有最大值和最小值?

解　f 向左右分别无界，既没有最大值也没有最小值。对 g，分母至少为 1，所以 $g(x)\le 1$，等号恰在 $x=0$ 成立；它取得最大值 1。但 $g(x)>0$ 对所有实数成立，且 $g(n)=1/(1+n^2)\to 0$，所以它的下确界为 0，没有最小值。定义域闭并不能替代有界条件。 ♦

■ **例 11.6　去掉连续性**　在 $[0,1]$ 上定义 $h(x)=x$（$x<1$），并规定 $h(1)=0$。证明 h 有界但不取得最大值。

解　值集为 $[0,1)$，所以 $0 \le h(x) < 1$，上确界为 1。若 $x < 1$，取 $y = (x+1)/2$，则 $x < y < 1$ 且 $h(y) > h(x)$；若候选点为 1，其函数值为 0，也不是最大值。输入数列 $x_n = 1 - 1/n$ 趋于 1，函数值却趋于 $1 \neq h(1)$，准确指出了连续性失败的位置。 ♦

易错提醒　「连续有界函数一定取得最值」缺少定义域条件。$f(x) = x$ 在 $(0,1)$ 连续且有界，却没有最大值和最小值。闭有界区间上的连续函数才由最值定理保证取得二者。

这些反例说明定理的条件不能任意删除，同时也要避免逆向误用：有些定义域不闭或无界的函数仍然取得最值。例如整个实轴上的常函数取得同一个最大值和最小值。条件失效意味着不能直接套用定理，具体函数仍须另行分析。

11.4　介值定理：中间高度一定能够达到

多项式 $p(x) = x^3 + x - 1$ 在 0 处为 -1，在 1 处为 1。能否保证中间某个输入使它等于零？只算若干个点不能排除函数从负值直接跳到正值；连续性正是排除跳跃的条件。

定理 11.5（介值定理）　设 $a < b$，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续。若 c 位于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，则存在 $x_c \in [a,b]$ 使 $f(x_c) = c$。若 c 严格位于两个端点值之间，可取 $x_c \in (a,b)$。

端点高度相等时，陈述仍包含 $c = f(a) = f(b)$，直接取端点即可。一般情形通过考虑 $g(x) = f(x) - c$，化为两端异号时存在零点；若符号顺序相反，再用 $-g$。因此只需证明 $g(a) < 0 < g(b)$ 的情形。

直观理解　从负值端向正值端移动，把所有非正函数值的输入收集起来。它们有一个最右边的界。若界上的函数值仍为负，连续性允许再向右移动；若为正，连续性又会排除从左侧逼近的非正点。唯一剩下的可能就是零。

思路　取 $S = \{x \in [a,b] : g(x) \le 0\}$ 的上确界 s。先用上确界逼近点与连续性证明 $g(s) \le 0$，再假设 $g(s) < 0$，利用局部保持负号在 s 的右边找到更大的集合元素，得到矛盾。

证明　S 非空，因为 $a \in S$，且被 b 上界，故实数 $s = \sup S$ 存在并位于 $[a,b]$。由上确界逼近性质，对每个 n 可选 $s_n \in S$ 使 $s - 1/n < s_n \le s$。于是 $s_n \to s$，且 $g(s_n) \le 0$。连续性与极限保序给出 $g(s) \le 0$。

因为 $g(b) > 0$，所以 $s \neq b$，从而 $s < b$。若 $g(s) < 0$，局部保持符号引理给出 $\eta > 0$，使定义域内 $|x - s| < \eta$ 时 $g(x) < 0$。取

$$t = s + \frac{1}{2}\min\{\eta, b - s\}.$$

则 $s < t < b$ 且 $g(t) < 0$，即 $t \in S$，与 s 是 S 的上界矛盾。因此 $g(s) = 0$。又 $g(a) < 0$，所以 $s \neq a$；已知 $s < b$，故 $s \in (a,b)$。恢复 $g = f - c$ 即得结论。 ■

证明没有要求 S 本身是区间。即使函数来回变号，集合 S 有许多分开的部分，确界仍然存

在，逼近点仍能选取。把 S 误认为一定等于 $[a,s]$ 会暗中加入单调性，而介值定理并不需要函数单调。

图 11.2 给出多项式 p 与水平轴的相交情形。

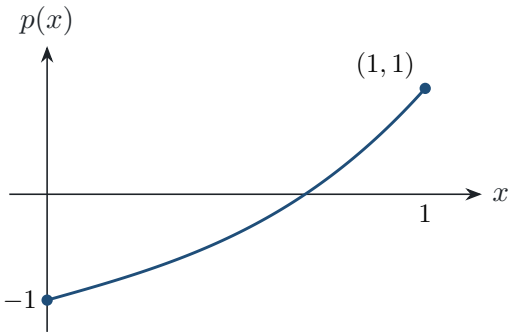


图 11.2　$p(x)=x^3+x-1$ 在端点取异号值，连续性保证某个内部输入使它等于零。

图像显示一个交点，只能作为观察；存在性来自介值定理，唯一性还要另证。下面的代数比较完成后一个任务。

■ 例 11.7　**存在且唯一的根**　证明 $x^3+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 有且仅有一个实根，并说明全实轴上没有别的根。

解　先证存在：多项式连续，$p(0)=-1<0<p(1)=1$，故有根 $r\in(0,1)$。再证唯一：若 $y>x$，则

$$p(y)-p(x)=(y-x)(y^2+xy+x^2+1)>0.$$

这里 $y^2+xy+x^2=(y+x/2)^2+3x^2/4\geq 0$，故第二个因子严格为正。于是 p 在整个实轴上严格递增，不可能在两个不同点都取零。因此该根也是全实轴唯一的根。 ♦

■ 例 11.8　**有根不等于端点异号**　考察 $f(x)=(x-1/2)^2$ 在 $[0,1]$ 上的零点与端点符号。

解　配方已经给出唯一零点 $x=1/2$，但 $f(0)=f(1)=1/4>0$。因此端点异号是连续函数有内部零点的一个充分条件，并非必要条件。根在此处与水平轴相切，符号没有改变；不能仅凭同号端点就断言无根。 ♦

易错提醒　介值定理不保证根唯一。函数 x^3-x 在 $[-2,2]$ 两端异号，却在 $-1,0,1$ 都等于零。要得到唯一性，需要严格单调性或其他排除第二个根的论证。

去掉连续性，结论也会失败：令 $f(x)=-1$（$x<0$）、$f(x)=1$（$x\geq 0$），在 $[-1,1]$ 两端异号，却没有零点。去掉区间条件同样会失败：在 $A=[-2,-1]\cup[1,2]$ 上令 $f(x)=x$，它在相对定义域上连续，有正值和负值，但 $0\notin A$。函数无需跨过定义域中不存在的输入。

11.5　二分法：从存在性得到误差保证

已知 $p(x)=x^3+x-1$ 在 $(0,1)$ 有唯一根，仍未给出可使用的近似数。先算中点 $1/2$，得到 $p(1/2)=-3/8<0$；因此根在 $(1/2,1)$。再算中点 $3/4$，得到 $p(3/4)=11/64>0$，根落在 $(1/2,3/4)$。每次只需一次符号判断，区间长度便减半。

> **命题 11.6（二分区间与根）**　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，$f(a)<0<f(b)$。若每次中点均非零，按中点的符号保留异号的半个闭区间 $[a_n,b_n]$，初始为 $[a_0,b_0]=[a,b]$。则这些区间嵌套，长度为 $(b-a)2^{-n}$，有唯一公共点 r，且 $f(r)=0$。

思路　先证明每一步保留异号条件与嵌套性质，再用闭区间套得到公共点。左右端点都趋向这个点，连续性将两端相反的弱符号传递到极限，迫使极限函数值为零。

证明　若当前区间为 $[a_n,b_n]$，令 $m_n=(a_n+b_n)/2$。当 $f(m_n)<0$ 时令 $a_{n+1}=m_n,b_{n+1}=b_n$；当 $f(m_n)>0$ 时令 $a_{n+1}=a_n,b_{n+1}=m_n$。两种情形都保留 $f(a_{n+1})<0<f(b_{n+1})$，新区间包含于旧区间，长度为旧长度的一半。归纳得长度公式。

第 6 讲的闭区间套定理给出唯一公共点 r。因 $a_n\le r\le b_n$，有 $|a_n-r|,|b_n-r|\le(b-a)2^{-n}\to0$，所以两列端点都趋向 r。由连续性，$f(a_n),f(b_n)\to f(r)$。极限保序给出 $f(r)\le0$ 与 $f(r)\ge0$，因此 $f(r)=0$。 ■

若某次中点值恰为零，已经找到精确根，可以直接结束。无需强行继续选边，也不应把零误判为正或负。若原函数有多个根，每次保留下来的区间至少含一个根，但可能排除其余根；二分法的极限根取决于初始区间和选边结果。

■ **例 11.9　五次二分的精确计算**　对 $p(x)=x^3+x-1$ 从 $[0,1]$ 开始，列出前五个中点及其函数值，并写出五次选边后的区间。

解　使用精确分数，符号判断不会受小数舍入影响。各步中点和代入值为

k	1	2	3	4	5
m	$1/2$	$3/4$	$5/8$	$11/16$	$21/32$
$p(m)$	$-3/8$	$11/64$	$-67/512$	$51/4096$	$-2003/32768$

第一步取右半，第二步取左半，第三步取右半，第四步取左半，第五步取右半。因此最终区间为 $[21/32,11/16]$，其长度为 $1/32$。根严格位于其中；最后一次中点 $21/32$ 是新区间左端点，而非新区间中点。 ♦

图 11.3 将前几次保留区间放在同一条数轴上，长度每次减半。

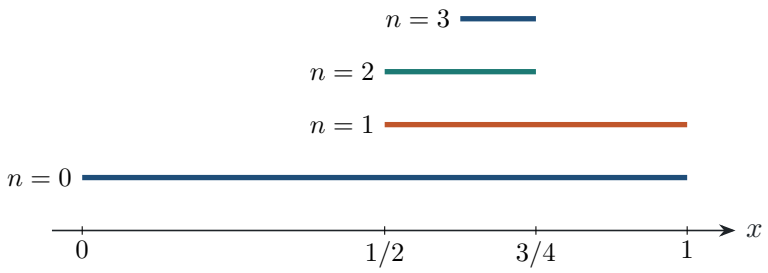


图 11.3　二分区间逐次嵌套，前四个长度依次为 $1, 1/2, 1/4, 1/8$。

图中线段所在高度只用来区分步数，横坐标才代表输入。各区间共有根，但图本身无法告诉根的无限位小数；严格精度来自区间长度公式。

命题 11.7（中点误差界）　在第 n 次选边后，若以新区间中点 $c_n = (a_n + b_n)/2$ 近似其中的根 r，则

$$|c_n - r| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

证明　r 位于闭区间中，到中点的最远距离为半个区间长度。代入长度 $(b-a)2^{-n}$ 得结论。这个估计只使用区间包含关系，不需要 f 的导数或单调性。 ■

■ **例 11.10　预先决定迭代次数**　初始区间为 $[0,1]$，要使新区间中点与根的误差小于 10^{-3}，十次选边是否足够？

解　十次选边后的宽度为 $1/1024$，中点误差至多 $1/2048 < 1/1000$，所以足够。若使用某个端点作近似，只能直接保证误差不超过整个区间长度 $1/1024$；这里它也小于 $1/1000$，但保证较弱。报告近似数时应说明使用中点还是端点，以及对应的误差界。 ♦

易错提醒　「函数值很小，所以离根很近」需要额外依据。例如 $f(x) = 10^{-6}(x-1)$ 在 $x = 0$ 的绝对函数值仅为 10^{-6}，但到唯一根 1 的距离为 1。二分法直接用输入区间长度控制根误差，避免将两种误差混为一谈。

11.6　像集、正下界与连续方程

函数 $x(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上最小值为 0、最大值为 $1/4$。能否因此就写出值集为 $[0, 1/4]$？只知道最小和最大，尚不能排除中间缺少某些值；还须使用介值定理。这一节把两个定理合在一起。

定理 11.8（闭区间的连续像）　设 $a \le b$，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续，最小值与最大值分别为 m, M。则 $f([a,b]) = [m, M]$。

证明　最值定义直接给出 $f([a,b]) \subseteq [m,M]$。反过来，由最值定理选 $x_m, x_M \in [a,b]$ 使 $f(x_m) = m$、$f(x_M) = M$。若 $m = M$，值集只有一个值，结论成立。若 $m < M$，在端点为 x_m, x_M 的闭区间

上应用介值定理：对每个 $c \in [m, M]$，存在其中的点 x_c 使 $f(x_c) = c$。该小区间包含于原定义域，故 $c \in f([a, b])$，得到反向包含。 ■

这里不需要 $x_m < x_M$；若它们顺序相反，交换作为定义域端点的顺序即可。也不能只在原区间两端点 a, b 之间插值，因为全局最小和最大可能出现在内部，$f(a), f(b)$ 可能完全相同。上节二次函数正是端点值相同而内部值更小的例子。

■ **例 11.11　确定整个值集**　求 $f(x) = (x-1)^2$ 在 $[-1, 3]$ 上的值集，并比较端点值决定的介值范围。

解　已知最小值为 0、最大值为 4，函数连续，所以值集为 $[0, 4]$。但原区间两端都取 4，只看端点高度只能得到 $c = 4$ 一种保证。要得到其他值，可以在 $[1, 3]$ 上对端点值 $0, 4$ 使用介值定理。全局最值为介值定理提供了合适的两个输入。 ♦

> **命题 11.9（严格正函数有统一正下界）**　若 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续且每点 $f(x) > 0$，则存在 $m > 0$ 使每点 $f(x) \geq m$。从而 $1/f$ 连续且有界。

证明　最值定理给出 x_m 使 $m = f(x_m)$ 为最小值。逐点正性作用在这个实际取得点上，得到 $m > 0$，因此 $f(x) \geq m$。倒数连续性来自第 9 讲的运算法则，而 $0 < 1/f(x) \leq 1/m$ 给出有界性。 ■

证明的关键是最小值取得性。如果只知道下确界存在，逐点为正仍可能有下确界零。例如 $f(x) = x$ 在 $(0, 1]$ 每点严格为正，却没有统一正下界。给定任意候选 $m > 0$，取足够大的 n 就有 $f(1/n) = 1/n < m$。闭区间上的连续性让逐点结论成为一个对全部输入都有效的常数界。

■ **例 11.12　用最小值控制分母**　设 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 连续且无零点。证明存在 $c > 0$ 使 $|f(x)| \geq c$，并解释为什么 f 在整个区间上恒正或恒负。

解　先对连续正函数 $|f|$ 应用前一命题，得到统一正下界 c。再看符号：若有 u, v 使 $f(u) > 0$、$f(v) < 0$，介值定理就在二者之间给出零点，违反假设。因此符号恒定。正下界控制距离零有多远，恒号控制位于零的哪一侧；它们是两个不同结论，分别使用最值和介值。 ♦

> **命题 11.10（连续自映射有不动点）**　若 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ 连续，则存在 $r \in [0, 1]$ 使 $f(r) = r$。

证明　令 $g(x) = f(x) - x$，它连续。由值域限制，$g(0) = f(0) \geq 0$，$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$。若某个端点值为零，该端点就是不动点；否则两端严格异号，介值定理给出内部零点 r，也就是 $f(r) = r$。 ■

■ **例 11.13　一个具体不动点**　设 $f(x) = (1 + x)/3$，$x \in [0, 1]$。验证不动点定理的条件，并求全部不动点。

解　f 连续，且 $1/3 \leq f(x) \leq 2/3$，所以确实把 $[0, 1]$ 映到自身。不动点方程为 $(1 + r)/3 = r$，等

价于 $2r=1$，唯一候选为 $r=1/2$。代入得 $f(1/2)=1/2$，且属于定义域，故它是唯一不动点。一般不动点定理只给存在性；这里的线性方程才给出了唯一性。 ♦

前后联系 第 6 讲的压缩迭代既给不动点存在唯一性，也给收敛算法；本讲仅凭连续性和区间自映射就能保证存在，但不自动保证唯一或迭代收敛。例如 $f(x)=1-x$ 唯一不动点为 $1/2$，从 0 开始迭代却在 $0,1$ 之间交替。不同定理的条件决定了可以得到多强的结论。

命题 11.11（连续严格单调函数的反函数） 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且严格递增，则它将 $[a,b]$ 双射到 $[f(a),f(b)]$，反函数连续且严格递增。

思路　严格递增负责单射，介值定理负责满射。证明反函数连续时，从给定的输入误差出发，在原函数图上选出两个正的高度差；它们将成为反函数的连续半径。端点处只保留存在的那一侧。

证明　若 $x<y$，则 $f(x)<f(y)$，所以不同输入有不同输出，f 为单射。介值定理说明每个 $u\in[f(a),f(b)]$ 都能取到，故反函数有定义且唯一。若 $u<v$，它们的原像不能满足 $f^{-1}(u)\geq f^{-1}(v)$，否则原函数递增性推出 $u\geq v$，矛盾。因此反函数严格递增。

固定 $u_0=f(x_0)$ 与 $\varepsilon>0$。若 $x_0-\varepsilon\geq a$，定义 $d_-=f(x_0)-f(x_0-\varepsilon)>0$。若 $x_0+\varepsilon\leq b$，定义 $d_+=f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)>0$。取所有已定义的 d_-,d_+ 的最小值为 δ；若两个都没有定义，任取 $\delta=1$。

设 $u\in[f(a),f(b)]$ 且 $|u-u_0|<\delta$，令 $x=f^{-1}(u)$。当 d_- 存在时，若 $x\leq x_0-\varepsilon$，则 $u=f(x)\leq f(x_0-\varepsilon)=u_0-d_-$，与 $|u-u_0|<\delta\leq d_-$ 矛盾。若 d_- 不存在，则 $x\geq a>x_0-\varepsilon$ 自动成立。右侧以相同的单调比较得到 $x<x_0+\varepsilon$。所以 $|f^{-1}(u)-f^{-1}(u_0)|<\varepsilon$，反函数连续。 ■

证明没有要求原函数的导数存在，也没有把导数放到分母里。它只依赖严格次序和介值性质。严格递减函数也有相应结论：可以先对 $-f$ 使用递增情形。这里的反函数并非倒数 $1/f$；倒数在每个输入上把函数值取倒数，反函数则交换输入与输出的角色。

■ **例 11.14　正平方根的连续性**　在 $[0,4]$ 上考虑 $f(x)=x^2$。用前一命题证明 $[0,16]$ 上的正平方根函数连续，并解释 0 端点的处理。

解　多项式 f 连续。若 $0\leq x<y\leq 4$，则 $y^2-x^2=(y-x)(y+x)>0$，所以它严格递增，并由介值定理将 $[0,4]$ 映满 $[0,16]$。反函数正是取唯一非负平方根的函数，因此连续。对于输出 $u_0=0$，反函数的输入只能从右侧靠近，证明中只需要右侧的高度差；无需寻找负数的实平方根。这个结论与第 9 讲用 $|\sqrt{u}-\sqrt{v}|\leq\sqrt{|u-v|}$ 得到的直接证明相互印证。 ♦

同一个结论不能直接用于整个实轴上的 x^2，因为 $f(1)=f(-1)$，它在该定义域不单射。选择非负半轴正是为了使反函数成为单值函数。定义域的限制会决定结论是否成立，不能只看代数表达式。

最值定理与介值定理依赖实数完备性的方式不同。前者通过有界数列的收敛子列把近似最优值落实到一个输入上；后者通过确界将负值区域的边界落实为零点。两种证明都需要极限点仍在

定义域中，但介值结论还要求定义域包含所连接的全部中间输入。因而一个闭有界但分成两段的集合上，连续函数仍可取得最值，却可能跳过两个函数值之间的某些高度。

例如在 $A=[-2,-1]\cup[1,2]$ 上，恒等函数的最小值为 -2，最大值为 2，二者都取得；其值集仍为 A，并不包含 0。这里最值结论没有失效，介值结论则不能推广。这个例子说明两个定理回答不同问题：一个问最外侧的函数值能否取得，另一个问已经取到的两个高度之间是否有空缺。

在实际证明中，可以先列出问题要求，再选择工具。如果要求某个连续量有最优值，先查定义域是否闭且有界；如果要求某个方程有解，先把它写成连续函数等于零，再找异号点；如果要求唯一解，还要另找严格单调性。把这三个任务分开，可以防止用一张图同时替代存在性、唯一性和误差保证。

对二分算法还应说明哪些操作需要精确执行。区间嵌套与误差公式只要求每次确实保留含根的一半；但选边依赖函数值符号。若计算机返回的近似值与零的差小于舍入误差，就不能可靠判号。这时可以提高计算精度，或用严格的上下界夹住函数值，直到它们同号。本文多项式算例采用有理数运算，所有中点和代入值均为精确分数，因而没有这一判号歧义。

最后，二分法的唯一公共点是由区间宽度趋零得到的，并不意味着原函数只有一个零点。若原函数有多个根，算法在最初几步可能已经排除了其中一些；剩下的区间仍含至少一个根。算法收敛到一个确定输入，与方程在整个定义域内只有一个解，是两个层次的陈述。

最值定理中，选择近似最优点时不要求已经知道最优点的位置。上确界的定义只保证每个误差容许量内存在一个候选输入，这些输入可能散布在整个区间。抽子列的作用正是从这种分散的候选中找出一个有极限的部分，而连续性保证它没有丢失最优函数值。相比之下，二分法主动限制输入区间，直接构造一列嵌套范围。两种方法都利用完备性，但前者适合证明最优值存在，后者还提供了明确的计算步骤与误差界。

本讲小结

- **数列引理**：$x_n\to x_0$ 且 f 在定义域内的 x_0 连续，则 $f(x_n)\to f(x_0)$。
- **最值定理**：闭有界区间上的连续实函数有界，并实际取得最大值与最小值。
- 最值证明先证有界，再选 $M-1/n<f(x_n)\le M$，抽收敛子列并用连续性得到 $f(x_*)=M$。
- **介值定理**：连续函数在区间内取遍两个函数值之间的每个高度；端点异号保证内部零点。
- 介值定理给存在性；严格单调性可另证唯一性；同号端点不能排除零点。
- **二分误差**：n 次选边后区间宽度为 $(b-a)2^{-n}$，中点误差至多 $(b-a)2^{-n-1}$。
- 闭区间连续像为 $[m,M]$；每点严格为正的连续函数有统一下界 $m>0$。

练习

11.1 ★ 判断真假并说明理由：(a) 上确界总属于值集；(b) 连续函数在任意有界区间都取得最值；(c) 闭区间连续函数的最大值点唯一。

11.2 ★ 求 $f(x)=(x-2)^2$ 在 $[0,3]$ 上的最大值、最小值、全部取得点及值集。

11.3 ★ 证明 $x^3+2x-2=0$ 在 $(0,1)$ 恰有一个实根，并说明全实轴上没有其他根。

11.4 ★ 对 x^3+x-1 从 $[0,1]$ 开始做前三次二分，写出每次新区间及第三次新区间中点的误差上界。

11.5 ★★ 若连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 每点满足 $f(x)<1$，证明存在 $\eta>0$ 使每点 $f(x)\le 1-\eta$。

11.6 ★★ 给出在 $[0,1]$ 上有界但不取得最大值的函数，并指出它的不连续点。

11.7 ★★ 设 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，$f(a)<g(a)$ 且 $f(b)>g(b)$。证明二者至少有一个交点。再给一个交点不唯一的例子。

11.8 ★★ 设连续函数 $f:[0,1]\to[0,1]$。证明存在不动点，并给出具有无穷多个不动点的例子。

11.9 ★★★ 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且严格递增，证明它把区间双射到 $[f(a),f(b)]$，并证明反函数连续。提示：用 $f(x_0-\varepsilon)$ 与 $f(x_0+\varepsilon)$ 在有定义时构造输出间隔。

11.10 ★★★ 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，存在 $x_n\in[a,b]$ 使 $f(x_n)\to 0$。证明 f 有零点。若将定义域改成 (a,b)，结论是否仍成立？

练习答案与提示

11.1 三个说法都假。(a) 值集 $(0,1)$ 的上确界 1 不属于它。(b) $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 连续但不取得最值。(c) 常函数在每个点取得最大值；$f(x)=(x-1)^2$ 在 $[-1,3]$ 也有两个最大值点。

11.2 因为 $f(x)\ge 0$，且等号恰在 $x=2$ 取得，最小值为 0。在 $[0,3]$ 上 $|x-2|\le 2$，等号仅在 $x=0$ 取得，最大值为 4，唯一最大值点为 0。连续性与介值定理给值集 $[0,4]$。

11.3 令 $p(x)=x^3+2x-2$，则 $p(0)=-2$、$p(1)=1$，介值定理给内部根。若 $y>x$，则 $p(y)-p(x)=(y-x)(y^2+xy+x^2+2)>0$，故全实轴严格递增，根唯一。二次因子的正性来自 $y^2+xy+x^2\ge 0$。

11.4 三次新区间依次为 $[1/2,1]$、$[1/2,3/4]$、$[5/8,3/4]$。第三个中点为 $11/16$，到其中根的距离至多 $1/16$。表中已经算出的 $p(11/16)>0$ 是第四次选边所需的额外信息，不能混入前三次区间的定义。

11.5 由最值定理，f 在某个 x_M 取得最大值 $M=f(x_M)<1$。令 $\eta=1-M>0$，则 $f(x)\le M=1-\eta$。关键是最大值实际取得，才能把逐点严格不等式作用在最大值点上。

11.6 取 $f(x)=x$（$x<1$），$f(1)=0$。值集为 $[0,1)$，上确界 1 不取得。它在每个 $x<1$ 连续，在 1 不连续：$x_n=1-1/n$ 的函数值趋于 1，而 $f(1)=0$。

11.7 令 $h=f-g$，连续且两端异号，介值定理给 $h(c)=0$。交点可不唯一：在 $[-2,2]$ 取 $f(x)=x^3-x$、$g(x)=0$，则有三个交点 $-1,0,1$；若要与题目端点符号顺序完全一致，可交换 f,g。

11.8 令 $h(x)=f(x)-x$，则 $h(0)\ge 0$、$h(1)\le 0$。端点值零时已有不动点，否则介值定理给内部零点。恒等函数 $f(x)=x$ 在整个 $[0,1]$ 上每个点都是不动点。

11.9 严格递增给单射，介值定理给满射。固定 $y_0=f(x_0)$ 与 $\varepsilon>0$。若 $x_0-\varepsilon\ge a$，取正数 $d_-=y_0-f(x_0-\varepsilon)$；否则左侧约束自动满足。若 $x_0+\varepsilon\le b$，取 $d_+=f(x_0+\varepsilon)-y_0$；否则右侧约束自动满足。取现有正数中的最小值为 δ，若两侧都不存在则任取 $\delta>0$。当定义域内 $|y-y_0|<\delta$ 时，单调性排除 $f^{-1}(y)\le x_0-\varepsilon$ 与 $f^{-1}(y)\ge x_0+\varepsilon$，故反函数连续。

11.10 由 Bolzano–Weierstrass 定理取子列 $x_{n_k}\to x_*\in[a,b]$，连续性给 $f(x_{n_k})\to f(x_*)$，而子列仍趋于 0，故 $f(x_*)=0$。开区间上不成立：$f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 无零点，但 $x_n=1/(n+1)$ 的函数值趋于 0。

复习课 1

实分析阶段复习：完备性、极限与连续性

Review: Completeness, Sequences, Series, and Continuity

对应材料：参考 MIT 18.100B Review for Midterm（期中复习单）与习题集 1–5，按本书第 1–11 讲组织。原课期中复习还包括度量空间、其中的收敛与柯西列，以及 Box distance；本书将这些内容后移到第 12 讲，故本复习课不覆盖原课完整期中范围。

本讲目标

(1) 能按「实数完备性—数列—级数—连续函数」画出知识地图，并指出关键连接。

(2) 面对数列或级数，能先核对条件，再选用极限、单调、有界、柯西、比较或比值/根值判别。

(3) 能从指数级数的定义回顾连续性与加法公式，并区分最值定理、介值定理的结论。

(4) 能识别「上确界等于最大值」「通项趋零就收敛」「存在根就唯一」等错误推断。

R1.1 知识地图

实数完备性先把「逼近」变成极限，再支持单调收敛、柯西收敛和级数判别；连续性把数列极限传到函数值，最后与闭区间上的子列性质一起推出最值和介值结论。复习时可沿图 R1.1 从左向右检查依赖，再用表 R1.1 遮住中间列默写定义。

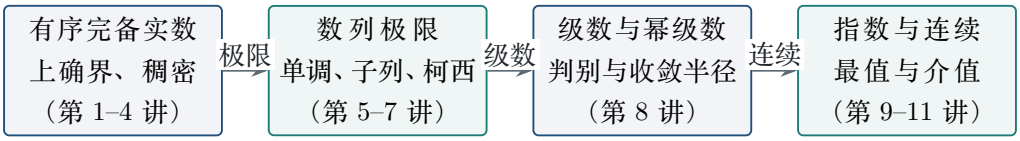


图 **R1.1**　完备性支撑极限论；连续性结合闭区间上的子列性质推出最值与介值结论。

概念	定义或条件要点	典型用法
上确界	最小上界；且每个 $\varepsilon>0$ 都能在 $s-\varepsilon$ 上方找到集合元素	证明极限候选值或区间端点
数列极限	$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N,\ \lvert a_n-L\rvert<\varepsilon$	从定义证明，或使用极限运算法则
柯西列	尾部任意两项距离都可任意小	未知极限时直接证明收敛
单调收敛	单调且有界；极限为相应上确界或下确界	递推数列先猜单调与界
级数收敛	部分和数列收敛	先检验通项，再比较或用比值/根值判别
收敛半径	$R=1/\limsup \lvert a_n\rvert^{1/n}$；端点另查	先定开区间，再逐个检查端点
连续性	给定输出误差 ε，选输入半径 δ	函数运算、数列极限、介值与最值

表 R1.1　前 11 讲的概念、检查条件与常见用途。

R1.2　核心结论回顾

R1.2.1　实数的代数、完备与稠密（第 1–4 讲）

定理（第 1 讲：良定义与有序域）

(1) 有理数 m/n 的相等由 $m_1n_2=m_2n_1$ 判定；运算和大小关系必须不依赖所选分数表示。

(2) 在有序域中，$x<y$ 且 $z>0$ 推出 $xz<yz$；若 $z<0$，不等号反向。非零 x 满足 $x^2>0$。

关键　良定义要把输入相等、输出相等都改写成整数等式；不等式乘数的符号必须先确定，约分必须确认除数非零。

用法　证明平方正或消去公因子时，先排除零元；若乘以负数，必须反转不等号。

定理（第 2 讲：上确界与最大值）　若 $A\subseteq\mathbb{R}$ 非空且有上界，则 $s=\sup A$ 当且仅当：$a\leq s$ 对所有 $a\in A$ 成立，且对每个 $\varepsilon>0$ 存在 $a\in A$ 使 $s-\varepsilon<a$。此外，$s\in A$ 当且仅当 $s=\max A$。

关键　第一项说明候选数确是上界；第二项排除任何更小的上界。完整证明见第 2 讲。

用法　先查「非空、有上界」，再分别证明上界与任意精度逼近。$\{q\in\mathbb{Q}:q^2<2\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界，不能把实数完备性直接用于有理数集。

定理（第 3 讲：完备性、阿基米德性质与极限定义）

(1) 实数中每个非空有上界集合有上确界；有下界集合有下确界，且 $\inf A = -\sup(-A)$。

(2) $\sqrt{2}$ 可由 $\sup\{x > 0 : x^2 < 2\}$ 构造；阿基米德性质保证对每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $1/n < \varepsilon$。

(3) $a_n \to L$ 的量词顺序是 $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$，使 $|a_n - L| < \varepsilon$。

关键　平方根证明先用确界性质得到候选数，再分别排除平方大于 2 与小于 2；极限定义中 N 可依赖 ε，不能依赖之后任取的 n。完整证明见第 3 讲。

用法　遇到「有界集合有最小上界」先确认背景是 $\mathbb{R}$；需要选足够大的整数或足够小的 $1/n$ 时引用阿基米德性质。

定理（第 4 讲：整数部分、稠密与小数）

(1) 对每个 $x \in \mathbb{R}$，唯一整数 $m = \lfloor x \rfloor$ 满足 $m \leq x < m + 1$，负数也按此向下取整。

(2) 若 $x < y$，区间 (x, y) 内同时有有理数和无理数；十进制截断 $q_k = 10^{-k}\lfloor 10^k x \rfloor$ 满足 $0 \leq x - q_k < 10^{-k}$。

(3) $0.999\ldots$ 是截断数列 $1 - 10^{-n}$ 的极限，故等于 1。

关键　稠密性先把网格间距选得小于 $y - x$，再取 $m = \lfloor nx \rfloor + 1$；无理数可由区间内的有理数平移一个固定无理数得到。完整证明见第 4 讲。

用法　负数取整检查 $\lfloor x \rfloor \leq x$；证明无限小数等式时估计有限截断误差，不寻找不存在的「最后一位」。

R1.2.2　数列极限与收敛准则（第 5–7 讲）

定理（第 5 讲：极限运算与夹逼）

(1) 数列极限若存在则唯一，收敛数列有界；改动有限项不改变极限。

(2) 若 $a_n \leq b_n$ 最终成立且两列收敛到 a, b，则 $a \leq b$；若 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 最终成立且两端同趋 L，则 $c_n \to L$。四则法则中商还要求分母极限非零。

(3) 若 $a_n \to L$，每个子列 a_{n_k} 也趋于 L；因此两个子列极限不同足以证明原列发散。

关键　乘法估计要用收敛列有界；商法则先从 $b_n \to b \neq 0$ 得到尾部 $|b_n| > |b|/2$。完整证明见第 5 讲。

用法　先检查每个输入数列都收敛，再用运算法则；若分母极限为 0，不能套商法则。夹逼只需两端同趋，不要求中间项单调。

定理（第 6 讲：单调收敛、区间套与压缩迭代）

(1) 实数列递增且有上界时趋于其上确界；递减且有下界时趋于其下确界。嵌套非空有界闭区间交集非空，若长度趋于 0 则交集只有一点。

(2) 若 $T : I \to I$，I 为非空闭区间，$a_1 \in I$，且 $|T(x) - T(y)| \le c|x - y|$、$0 \le c < 1$，迭代列收敛到唯一不动点；对 $n \ge 2$，$|a_n - a| \le c^{n-1}|a_2 - a_1|/(1 - c)$。

关键　递推题依次证明单调、有界、极限存在，再代回递推并排除不合条件的根；压缩迭代用几何级数控制任意两项的距离。完整证明见第 6 讲。

用法　递推关系只在极限已证存在后才能取极限。压缩定理先检查映入自身、区间闭以及同一个 $c < 1$ 对所有 x, y 有效。

定理（第 7 讲：子列、Bolzano–Weierstrass 与柯西准则）

(1) 每个有界实数列都有收敛子列；任意实数列也有单调子列。抽子列时下标必须严格递增。

(2) 实数列收敛当且仅当它是柯西列；对有界列，唯一子列极限 L 等价于整列收敛到 L。

(3) 若相邻差满足 $|a_{n+1} - a_n| \le c|a_n - a_{n-1}|$、$0 < c < 1$，则极限 L 存在；对 $n \ge 2$，$|L - a_n| \le |a_2 - a_1|c^{n-1}/(1 - c)$。

关键　Bolzano–Weierstrass 只给出某条子列，不保证整列收敛；柯西条件则直接控制尾部任意两项。完整证明见第 7 讲。

用法　证明发散时找两条极限不同的子列；证明收敛时若候选极限不好猜，直接估计 $|a_m - a_n|$ 的尾部。

R1.2.3 级数与幂级数（第 8 讲）

定理（第 8 讲：先看部分和与通项）

(1) $\sum a_n$ 收敛是指部分和 $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ 收敛；因此 $a_n \to 0$ 是必要条件，但不充分。若 $a_n \ge 0$，级数收敛当且仅当部分和有上界。

(2) 几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ 当且仅当 $|c| < 1$ 收敛，和为 $1/(1 - c)$；$\sum 1/n^p$ 当且仅当 $p > 1$ 收敛。

(3) 若 $b_n \ge 0$ 单调递减且 $b_n \to 0$，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛，且 $|S - s_n| \le b_{n+1}$。

关键　级数问题转成部分和数列问题。若通项不趋于 0，先用必要条件判发散；非负项则用单调性加部分和有界。

用法　遇到交错或有符号项不能直接用「部分和有上界」判别；比较判别要求比较项非负。完整证明见第 8 讲。

定理（第 8 讲：比较、绝对收敛与幂级数）

(1) $0 \le a_n \le b_n$ 且 $\sum b_n$ 收敛时 $\sum a_n$ 收敛；$\sum |a_n|$ 收敛则 $\sum a_n$ 收敛。

(2) 若 $a_n > 0$ 且 $a_{n+1}/a_n \to L$，或 $a_n \ge 0$ 且 $a_n^{1/n} \to L$，则 $L < 1$ 给收敛、$L > 1$ 给发散、$L = 1$ 无结论。

(3) 幂级数的半径为 $R = 1/\limsup |a_n|^{1/n}$（约定 $1/0 = \infty$、$1/\infty = 0$）；$|x| < R$ 时绝对收敛，$|x| > R$ 时发散，$|x| = R$ 的端点须分别检查。

关键　比较时逐项核对大小与非负性；比值/根值判别在临界值 1 处停用。完整证明见第 8 讲。

用法　先找已知级数作比较，再计算比值或 n 次根；求幂级数时先给出开区间 $(-R, R)$，最后单独代入两个端点。

R1.2.4 指数级数与连续函数（第 9–11 讲）

定理（第 9 讲：指数级数与连续性）

(1) $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ 对每个实数 x 绝对收敛。若 $M \ge 0$、整数 $k \ge 0$ 且 $|x| \le M < k+2$，则

$$|E(x) - P_k(x)| \le \frac{M^{k+1}}{(k+1)!\,(1 - M/(k+2))}, \qquad P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}.$$

(2) 连续性要求 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$：定义域内 $|x - x_0| < \delta$ 推出 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。在相应定义域内，连续函数的和、积、常数倍、复合连续；商还需分母非零。

(3) 若 $f : A \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in A$ 连续，且 $x_n \in A$、$x_n \to x_0$，则 $f(x_n) \to f(x_0)$；在稠密的 $\mathbb{Q}$ 上相等的两个连续函数处处相等。

(4) 指数级数 $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ 连续：在任意有界区间上用同一截断阶数控制尾和，再用截断多项式的连续性。

关键　指数级数的尾项用相邻项比值控制成几何级数；连续性复合误差时先选输出半径，再由内层连续性选输入半径。完整证明见第 9 讲。

用法　需要统一控制一段有界输入上的 $E(x)$ 时，先固定 M，再选同一个截断阶数 k；点态连续不能自动换成全域的同一 δ。

定理（第 10 讲：Cauchy 乘积与指数加法）　若 $\sum a_n$、$\sum b_n$ 绝对收敛，令 $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$，则 $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$。应用到指数级数，对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，

$$E(x+y) = E(x)E(y), \qquad E(-x) = \frac{1}{E(x)}, \qquad E(x) > 0.$$

关键　卷积系数用二项式恒等式化成 $(x+y)^n/n!$；绝对收敛保证重排合法。由 $E(x)E(-x) = E(0) = 1$ 得 $E(x) \ne 0$；同理 $E(x/2) \ne 0$，再由 $E(x) = E(x/2)^2$ 得正性。详证见第 10 讲。

用法　拆指数时先使用已证的加法公式；只有知道一个因子不为零后，才可改写成倒数。

定理（第 10 讲：稠密性可检验连续函数）　若连续函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上相等，则 $f = g$ 于整个 $\mathbb{R}$。相反，有理数指示函数 $D(x) = 1$（$x \in \mathbb{Q}$）、$D(x) = 0$（$x \notin \mathbb{Q}$）在每一点都不连续，因为任意邻域都同时含有两类数。

关键　给定 $x \in \mathbb{R}$，由有理数稠密性取 $q_n \in \mathbb{Q}$ 且 $q_n \to x$；再对两函数分别用数列刻画连续性。完整证明见第 10 讲。

用法　证明两个连续函数恒等时，只需在稠密子集核对；若要证明指示函数连续，必须检查每个邻域内函数值能否保持接近。

定理（第 11 讲：闭区间上的最值与介值）

(1) 若 $a \le b$ 且 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 有界，并在 $[a, b]$ 上取得最大值和最小值。

(2) 若 $a < b$、$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续，且 $\min\{f(a), f(b)\} \le y \le \max\{f(a), f(b)\}$，则存在 $c \in [a, b]$ 使 $f(c) = y$。端点异号保证至少一个零点。

(3) 若 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续且 $f(a)f(b) < 0$，二分 n 次后保留区间宽为 $(b - a)2^{-n}$；其中点到根的误差至多 $(b - a)2^{-n-1}$。若中点恰为根即可结束。

关键　最值证明先有界，再取逼近上确界的输入列，抽收敛子列并用连续性；介值证明以连续性和实数完备性制造端点值相等。完整证明见第 11 讲。

用法　使用前逐项核对连续、闭区间和端点值。介值定理只给存在性；唯一性必须另证，例如证明函数严格单调。

R1.3　题型与例题

下列题目覆盖期中复习单的递推、级数比较和幂级数半径，并把它们放回前 11 讲的结论链中。每题先检查适用条件，再完成计算或证明。

R1.3.1　题型一：上确界与极限定义

■ **例 R1.1　把逼近判别用于具体集合**　设 $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$。求 A 的上确界、下确界，并判断最大值和最小值是否存在。

解　先找候选端点。对每个 $n \ge 1$，有 $0 \le 1 - 1/n < 1$，所以 0 是下界、1 是上界。$n = 1$ 时 $1 - 1/n = 0$，故最小值为 0。

给定 $\varepsilon > 0$，由阿基米德性质取 $n > 1/\varepsilon$，则 $1 - 1/n > 1 - \varepsilon$。因此 1 的任意左邻域都含有 A 中元素，$\sup A = 1$。每个集合元素严格小于 1，所以最大值不存在。　♦

点评　例 R1.1 的特征是候选端点可能只被逼近。先证上界，再做任意精度逼近；若把 1 加入集

合，最大值才会出现。

■ **例 R1.2　按量词构造 N**　证明 $a_n = (3n+2)/(2n+5)$ 收敛到 $3/2$，并给出一个适用于每个 $\varepsilon > 0$ 的 N。

解　直接化简误差：

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4n+10} < \frac{11}{4n}.$$

给定 $\varepsilon > 0$，取 $N = \lfloor 11/(4\varepsilon) \rfloor + 1$。于是 $N > 11/(4\varepsilon)$；当 $n \geq N$ 时，$11/(4n) < \varepsilon$，故 $|a_n - 3/2| < \varepsilon$。这正好按「先给 ε，再选 N，最后控制所有 $n \geq N$」完成定义。 ♦

点评　例 R1.2 的关键是先把误差化为只含 n 的分式，再从严格不等式选 N；若把 N 写成依赖 n，就没有满足定义。

R1.3.2　题型二：递推数列与子列

■ **例 R1.3　期中复习单模拟题：递推数列**　设 $x_1 = a$，且 $x_{n+1} = x_n/n$（$n \geq 1$）。对哪些 $a \in \mathbb{R}$，数列收敛？若收敛，极限是多少？

解　先展开递推并归纳。$x_2 = a$；对 $n \geq 2$，若 $x_n = a/(n-1)!$，则 $x_{n+1} = a/[n(n-1)!] = a/n!$。所以 $x_n = a/(n-1)!$ 对所有 $n \geq 2$ 成立。

当 $n \geq 2$ 时，$(n-1)! \geq 2^{n-2}$，因而 $|x_n| \leq |a|/2^{n-2} \to 0$。故任意实数 a 都给出收敛数列，极限恒为 0；$a = 0$ 时数列从头起恒为零。 ♦

点评　例 R1.3 先用递推推出显式公式，再用阶乘增长控制尾部；递推式不能在未证明极限存在前直接代入极限。若题目改为 $x_{n+1} = x_n$，同样收敛但极限为 a。

■ **例 R1.4　用两条子列证明发散**　判断 $a_n = (-1)^n + 1/n$ 是否收敛，并求偶数项、奇数项子列的极限。

解　分别写出两类项：$a_{2k} = 1 + 1/(2k) \to 1$，而 $a_{2k-1} = -1 + 1/(2k-1) \to -1$。若原数列收敛，任一子列都必须趋于同一个极限；这两条子列极限不同，故原数列发散。又因 $|a_n| \leq 2$，它是有界但不收敛的例子。 ♦

点评　例 R1.4 的符号按奇偶交替，先抽两条自然子列；有界性只保证存在收敛子列，不保证整列收敛。若两条子列都趋于同一值，仍需额外论证整列收敛。

R1.3.3　题型三：比较级数与收敛半径

■ **例 R1.5　期中复习单模拟题：逐项比较**　设 $|a_n| < 1/n^2$ 对每个 $n \geq 1$ 成立。证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

解　先证比较用的正项级数收敛。对 $n \geq 2$，

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

因此 $\sum_{n=1}^{N} 1/n^2 \leq 1 + (1 - 1/N) < 2$。其部分和递增且有上界，所以 $\sum 1/n^2$ 收敛。又有 $0 \leq |a_n| < 1/n^2$，比较判别法给出 $\sum |a_n|$ 收敛，故 $\sum a_n$ 绝对收敛，特别收敛。 ♦

点评　例 R1.5 是期中复习单的绝对比较题。关键是先建立非负标尺；如果只知道 $a_n \to 0$，不能推出级数收敛。

■ **例 R1.6　期中复习单模拟题：两种幂级数**　求 $\sum_{n=0}^{\infty} n^5 x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} n^5 x^n/n!$ 的收敛半径，并讨论第一条级数在端点处的行为。

解　在 $x = 0$ 时两条级数的项都为 0，所以都收敛。对第一条级数，若 $x \neq 0$，相邻项绝对值之比为 $|x|(1+1/n)^5$，趋于 $|x|$。故 $0 < |x| < 1$ 时绝对收敛，$|x| > 1$ 时通项不趋于零而发散；在 $x = 1$ 或 $x = -1$ 时通项绝对值为 n^5，仍不趋于零。因此半径为 $R = 1$，两个端点都发散。

对第二条级数，若 $x \neq 0$，相邻项绝对值之比为 $|x|(n+1)^4/n^5$，对每个固定 x 都趋于 0。比值判别法说明它对每个非零实数 x 绝对收敛；连同 $x = 0$ 的直接检查，故收敛半径为 $R = \infty$。 ♦

点评　例 R1.6 要先求开区间半径，再检查边界；第一条在端点直接用通项不趋于零判发散，第二条则对每个固定 x 使用比值极限 0。

R1.3.4　题型四：指数级数与闭区间定理

■ **例 R1.7　用尾和界夹住 $E(1)$**　令 $P_3(x) = \sum_{n=0}^{3} x^n/n!$。用第 9 讲的尾和估计给出 $E(1)$ 的一个有理上下界。

解　先算截断值 $P_3(1) = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 = 8/3$。因 $|1| \leq M = 1 < 3 + 2$，尾和估计给出

$$0 < E(1) - P_3(1) \leq \frac{1^4}{4!\,(1 - 1/5)} = \frac{5}{96}.$$

所以 $8/3 < E(1) \leq 8/3 + 5/96 = 87/32$。下界严格是因为余下各项都为正。 ♦

点评　例 R1.7 的特征是用有限和近似无穷级数；统一尾界需要先选 $M < k + 2$，这里取 $M = 1, k = 3$。若只写小数近似而没有尾项界，不能据此保证误差。

■ **例 R1.8　用介值定理找根并估计误差**　设 $p(x) = x^3 + x - 1$。证明 p 在 $[0, 1]$ 有唯一零点，并用四次二分给出一个包含零点的区间和中点误差界。

解　多项式 p 连续，且 $p(0) = -1 < 0 < p(1) = 1$，所以介值定理给出零点。若 $x < y$，则

$$p(y) - p(x) = (y - x)(y^2 + xy + x^2 + 1) > 0,$$

因为 $y^2 + xy + x^2 = (x + y/2)^2 + 3y^2/4 \geq 0$。因此 p 严格递增，零点唯一。

中点依次为 $1/2, 3/4, 5/8, 11/16$，函数值依次为 $-3/8, 11/64, -67/512, 51/4096$。每次保留端点函数值异号的一半，最后根落在 $[5/8, 11/16]$。图 R1.2 汇总了区间更新。

最终区间宽为 $11/16 - 5/8 = 1/16$，其中点到根的距离至多为半个宽度，即 $1/32$。 ♦

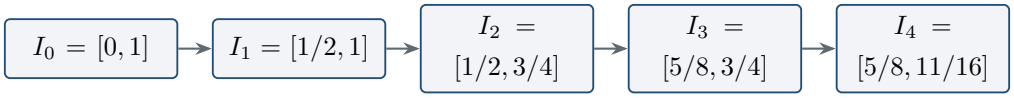


图 **R1.2**　四次二分始终保留函数值异号的区间，最终区间宽为 $1/16$，中点误差至多为 $1/32$。

点评　例 R1.8 先用异号端点保证存在，再用严格递增证明唯一，最后让区间宽度转化为误差界；若没有单调性，介值定理本身不能给唯一性。

■ **例 R1.9　用最值定理与配方确定值域**　求 $h(x) = x(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值、最小值和全部取得点。

解　先完成平方：

$$h(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4},$$

等号当且仅当 $x = 1/2$，所以最大值为 $1/4$，唯一取得点为 $1/2$。又因 $x \ge 0$、$1 - x \ge 0$，有 $h(x) \ge 0$；等号当且仅当 $x = 0$ 或 $x = 1$。因此最小值为 0，取得点恰为两个端点。 ♦

点评　例 R1.9 的定义域是闭有界区间且函数连续，最值定理先保证两端最值都存在；配方与因式分解再找值和全部取到点。改成开区间会改变最小值是否取得。

R1.4　常见错误

把上确界当成最大值　错误说法：上确界一定属于集合。反例：$A = (0,1)$ 的上确界是 1，但 $1 \notin A$。正确说法：最大值必须是集合元素；上确界只要求为最小上界。

把通项趋零当作充分条件　错误说法：$a_n \to 0$ 就有 $\sum a_n$ 收敛。反例：$1/n \to 0$，但调和级数发散。正确说法：通项趋零是级数收敛的必要条件；还要使用比较、交错、比值等判别。

在比值极限等于 1 时下结论　错误说法：比值极限为 1 就能判收敛。反例：$\sum 1/n$ 发散而 $\sum 1/n^2$ 收敛，两者相邻项比值都趋于 1。正确说法：$L = 1$ 时比值判别法无结论，须另换方法。

把介值定理的存在性当作唯一性　错误说法：异号端点只能有一个零点。反例：$p(x) = x^3 - x$ 在 $[-2,2]$ 两端异号，却有 $-1, 0, 1$ 三个零点。正确说法：唯一性需要额外证明，例如验证严格单调。

忽略最值定理的区间条件　错误说法：连续函数总能取得最大值。反例：$f(x)=x$ 在 $[0,1)$ 连续，值趋近 1 却不取到。正确说法：最值定理要求函数在闭有界区间上连续。

本讲小结

- 求 $\sup A$：先证所有 $a\le s$，再对每个 $\varepsilon>0$ 找到 $s-\varepsilon<a$；最大值还要求 $s\in A$。
- 数列极限按 $\forall\varepsilon\,\exists N\,\forall n\ge N$ 排列量词；有界列的两条不同子列极限可证发散。
- 单调有界推出收敛；实数列柯西当且仅当收敛；有界列只保证存在收敛子列。
- 级数看部分和；$a_n\to 0$ 仅为必要条件。比较、交错、比值和根值判别各有条件。
- 幂级数先算 $R=1/\limsup|a_n|^{1/n}$，再分别检查 $x=\pm R$。
- 闭区间连续函数取到最大、最小值；介值定理给存在性，唯一性另证。

自测题与答案。先独立完成以下十题，再对照逐题答案。第 6、9、10 题分别综合多个结论。

练习

R1.1 ★　在有序域中，若 $x<y$、$z<0$，证明 $xz>yz$；并计算把 $2<5$ 两边乘以 -3 后的不等式。

R1.2 ★　求 $\lfloor -27/10\rfloor$；再用整数网格构造一个有理数 q 满足 $1/3<q<5/12$，并说明 $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ 的连续点。

R1.3 ★　对 $A=\{1-1/n:n\in\mathbb{N}\}$ 求上下确界，并判断最大值、最小值是否取得。

R1.4 ★★　证明 $b_n=(5n-1)/(3n+2)$ 收敛到 $5/3$，并给出依赖 ε 的 N。

R1.5 ★★　期中复习单给出 $x_1=a$、$x_{n+1}=x_n/n$。求所有使数列收敛的 a 及相应极限。

R1.6 ★★　设 (a_n) 有界，且它唯一的子列极限为 L。证明 $a_n\to L$。

R1.7 ★★　若 $|c_n|\le 3/n^2$，证明 $\sum c_n$ 绝对收敛，并说明比较级数为何收敛。再设 $a_0\in\mathbb{R}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，证明对每个 $x\in\mathbb{R}$，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 收敛。

R1.8 ★★　求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ 的收敛半径，并检查两个端点。

R1.9 ★★★　连续函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上相等，证明它们处处相等。再由 $E(x+y)=E(x)E(y)$ 推出 $E(-x)=1/E(x)$ 与 $E(x)>0$。举例说明 f^2 连续不保证 f 连续，并证明 f^3 连续必推出 f 连续。

R1.10 ★★★　对 $p(x)=x^3+x-1$，证明 $[0,1]$ 内有唯一零点；再求 $h(x)=x(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值、最小值和取得点。

练习答案与提示

R1.1 因 $z<0$，乘以 z 会反转不等号，所以 $xz>yz$。代入 $x=2,y=5,z=-3$ 得 $-6>-15$。这是有序域的序与乘法相容性。

R1.2 整数部分满足 $m\le x<m+1$，故 $\lfloor -27/10\rfloor=-3$。取 $n=13$、$m=\lfloor 13/3\rfloor+1=5$，得 $1/3<5/13<5/12$。若 $x\notin\mathbb{Z}$，与相邻整数有正距离的小邻域内 $\lfloor y\rfloor=\lfloor x\rfloor$；在整数 k 左侧邻近点取整为 $k-1$，但 $\lfloor k\rfloor=k$。故取整函数恰在非整数点连续。

R1.3 $0\le 1-1/n<1$，且 $n=1$ 取到 0，所以 $\inf A=\min A=0$。给定 $\varepsilon>0$，取 $n>1/\varepsilon$，便有

$1-\varepsilon<1-1/n<1$；因此 $\sup A=1$，但 $1\notin A$，没有最大值。

R1.4 直接计算得 $|b_n-5/3|=13/(9n+6)<13/(9n)$。取 $N=\lfloor 13/(9\varepsilon)\rfloor+1$，则 $n\ge N$ 推出 $n>13/(9\varepsilon)$，从而 $|b_n-5/3|<\varepsilon$。因此 $b_n\to 5/3$。

R1.5 先从初值算出 $x_2=a$。对 $n=2$ 公式 $x_n=a/(n-1)!$ 成立；若某个 $n\ge 2$ 时成立，则

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{n}=\frac{a}{n!},$$

所以归纳得到 $x_n=a/(n-1)!$ 对所有 $n\ge 2$ 成立。对 $n\ge 2$，乘积 $(n-1)!=2\cdot 3\cdots(n-1)$ 的每个因子都至少为 2，故 $(n-1)!\ge 2^{n-2}$（$n=2$ 时两边都为 1）。于是 $|x_n|\le |a|/2^{n-2}\to 0$。因此每个 $a\in\mathbb{R}$ 都使数列收敛，且极限都是 0。

R1.6 反设 a_n 不趋于 L。极限定义的否定给出 $\varepsilon_0>0$，使任意 N 后都有 $n\ge N$ 满足 $|a_n-L|\ge\varepsilon_0$。令 $n_0=0$，递归取 $n_k\ge n_{k-1}+1$ 且 $|a_{n_k}-L|\ge\varepsilon_0$，便得到原列的一个有界子列 (a_{n_k})。由 Bolzano–Weierstrass 定理，它有收敛子列 $(a_{n_{k_j}})$，记极限为 L'；复合下标仍严格递增，所以 L' 是原列的子列极限。由绝对值函数的连续性，

$$|L'-L|=\lim_{j\to\infty}|a_{n_{k_j}}-L|\ge\varepsilon_0,$$

因而 $L'\neq L$，与唯一子列极限为 L 矛盾。因此 $a_n\to L$。

R1.7 对 $n\ge 2$，

$$\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

所以 $\sum_{n=1}^{N}1/n^2\le 1+\sum_{n=2}^{N}(1/(n-1)-1/n)=2-1/N<2$。部分和递增且有上界，故 $\sum 1/n^2$ 收敛。再由 $0\le|c_n|\le 3/n^2$ 得 $\sum|c_n|\le 3\sum 1/n^2<\infty$，所以 $\sum c_n$ 绝对收敛。

固定 $x\in\mathbb{R}$，由 $|\sin(nx)|,|\cos(nx)|\le 1$ 有 $|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|\le|a_n|+|b_n|$。比较判别法给出该级数绝对收敛；加上常数项 $a_0/2$ 后仍收敛。此论证对每个 x 都成立。

R1.8 系数 $c_n=(-1)^{n-1}/n$ 满足 $|c_n|^{1/n}=n^{-1/n}\to 1$，由根值判别的半径公式得 $R=1$。当 $x=1$ 时，$1/n$ 单调递减到 0，交错级数判别法给出收敛。当 $x=-1$ 时，通项为 $-1/n$；调和级数发散，因为在 $2^{j-1}<n\le 2^j$ 的每一组中，$1/n\ge 1/2^j$，该组的和至少为 $1/2$，故 $\sum_{n=1}^{2^m}1/n\ge 1+m/2\to\infty$。因此两个端点必须分别检查，半径本身不给端点结论。

R1.9 固定 $x\in\mathbb{R}$，由稠密性取 $q_n\in\mathbb{Q}$ 使 $|q_n-x|<1/n$。则 $q_n\to x$，而两函数连续且在有理点相等，故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(q_n)=\lim_{n\to\infty}g(q_n)=g(x).$$

由 $E(x)E(-x)=1$，有 $E(x/2)\neq 0$；再用加法公式 $E(x)=E(x/2)^2>0$，最后得到 $E(-x)=1/E(x)$。

令 $f(x)=-1$（$x<0$）、$f(x)=1$（$x\ge 0$），则 $f^2\equiv 1$ 连续但 f 在 0 不连续。又

$$u^2+uv+v^2=\frac{(u-v)^2}{4}+\frac{3(u+v)^2}{4}\ge\frac{(u-v)^2}{4}$$

结合 $|u^3-v^3|=|u-v|(u^2+uv+v^2)$，得到 $|u-v|^3\le 4|u^3-v^3|$。若 f^3 在 x_0 连续，给定 $\varepsilon>0$，取 δ 使 $|x-x_0|<\delta$ 推出 $|f(x)^3-f(x_0)^3|<\varepsilon^3/4$，便有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$；因此 f 连续。

R1.10 p 连续且 $p(0)<0<p(1)$，介值定理给出零点。若 $x<y$，

$$p(y)-p(x)=(y-x)\left((x+y/2)^2+3y^2/4+1\right)>0,$$

故 p 严格递增，零点唯一。另有

$$h(x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4},$$

等号当且仅当 $x=1/2$；且 $h(x)=x(1-x)\ge 0$，等号当且仅当 $x=0,1$。因此最大值 $1/4$ 在 $1/2$ 取得，最小值 0 在两个端点取得。

第二部分

度量空间、微分、积分与函数列

第 12 讲

度量空间、收敛与开集

Metric Spaces, Convergence and Open Sets

对应材料：MIT 18.100B Lecture 11 的度量空间部分、Lecture 12 全文；习题集 6 第 1–4 题。开集的基本运算在本讲完成，闭集在第 13 讲、紧性在第 14 讲。原材料中自然数距离补上绝对值，$(0,1)$ 内的数列使用 $1/(n+1)$，并订正区间并集。

本讲目标

(1) 会逐条检验距离公理，计算欧氏距离、方框距离和函数的最大值距离。

(2) 理解度量空间中的收敛与柯西条件，能说明极限必须属于空间。

(3) 会用三角不等式证明极限唯一、收敛蕴含柯西及柯西列有界。

(4) 能构造不完备空间与有界但没有收敛子列的例子，说明实数定理的适用范围。

(5) 会计算不同距离下的开球，并用球包含证明开集与开球的性质。

(6) 掌握开集任意并、有限交，以及集合补运算的量词规则。

12.1 距离需要满足什么条件

平面上两点 $(0,0)$ 与 $(3,4)$ 的直线距离为 5，沿坐标方向分别走三格和四格的总长度为 7。这两种不同的测量都能描述接近，只要它们满足同一组基本规则。抽象度量空间保留测量距离所需的性质，不再要求点一定是实数或坐标向量。

定义 12.1（度量空间） 设 X 为非空集合，函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 满足：对任意 $x,y,z\in X$，

(1) $d(x,y)\geq 0$，且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) $d(x,y)=d(y,x)$；

(3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$。

则称 d 为 X 上的**度量**（metric），(X,d) 为**度量空间**（metric space）。第三条称为三角不等式。

实轴的距离 $d(x,y)=|x-y|$ 满足公理：绝对值非负且只在差为零时为零，交换输入不变，绝对值三角不等式给出第三条。单点集合上的距离恒为零也满足公理，因为空间内没有不同的点。相反，两个点的集合上若把所有距离都规定为零，就违反「零距离只允许相同点」。

■ **例 12.1 平方距离为什么失败** 在实轴上令 $d(x,y)=(x-y)^2$，判断它是否为度量。

解　先检查非负、分离性和对称性，它们都成立。再取 $x=0,y=1,z=2$，得到 $d(0,2)=4$，而 $d(0,1)+d(1,2)=2$，违反三角不等式。因此前三种外观相似的性质并不足以成为距离，最后一条需要单独验证。 ♦

■ **例 12.2**　**离散距离**　在任意非空集合 X 上令 $d(x,y)=0$（$x=y$）、$d(x,y)=1$（$x\neq y$）。证明它是度量。

解　前两条由定义直接成立。若 $x=z$，三角不等式左边为零；若 $x\neq z$，不可能同时有 $x=y$ 与 $y=z$，所以右边两项中至少一项为 1，从而右边至少为左边的 1。这给出第三条，并且说明同一个集合可以有与坐标距离完全不同的度量。 ♦

命题 12.2（反三角不等式）　任意度量空间中有 $|d(x,z)-d(y,z)|\le d(x,y)$。

证明　三角不等式给出 $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$，移项得 $d(x,z)-d(y,z)\le d(x,y)$。交换 x,y 再得相反方向的差也不超过同一上界，两者合起来就是绝对值形式。 ■

这个不等式只用距离，不需要对空间中的点做减法。即使 x 是函数、字符串或集合元素，距离的差仍是实数，可以做上述移项；点本身则未必能相加。这种区分决定哪些实数上的证明能推广。

想一想　能否在任意度量空间写出 $(x+y)/2$ 作为两点的中点？
答　不能。定义只给集合与距离，没有给加法或数乘。例如两点的离散空间中没有第三个点作为中点，已有点到另一点的距离为 1，无法同时为 $1/2$。涉及中点、单调、加法的实数证明需要额外结构；只使用三角不等式的证明更有机会推广。

12.2　平面上的几种距离

点 $(0,0)$ 与 $(3,4)$ 的两个距离 $5,7$ 可以统一写成公式。对 $x=(x_1,x_2)$、$y=(y_1,y_2)$，定义

$$d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},\qquad d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

前者是欧氏距离，后者是原课程的方框距离，也常称为曼哈顿距离。再令 $d_\infty(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$，得到最大坐标距离。

命题 12.3（坐标距离满足公理）　d_1,d_2,d_∞ 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的度量，且

$$d_\infty(x,y)\le d_2(x,y)\le d_1(x,y)\le 2d_\infty(x,y).$$

思路　前两条公理逐项检查，关键是三角不等式。方框距离把两个实数三角不等式相加；最大距离先逐坐标估计再取最大；欧氏距离用二维 Cauchy–Schwarz 不等式。比较式则对两个坐标差的绝对值做简单代数运算。

证明　三种距离都非负，零值等价于两个坐标都相等，交换两点也不改变距离。对方框距离，

$$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \quad (i = 1, 2),$$

将两式相加得三角不等式。对最大距离，每个 $|x_i - z_i| \le d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$，取最大即得。

欧氏情形，先记向量差 $u = x - y$、$v = y - z$。恒等式

$$(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \ge 0$$

给出 $u_1 v_1 + u_2 v_2 \le \|u\|_2 \|v\|_2$。于是

$$\|u + v\|_2^2 \le \|u\|_2^2 + 2\|u\|_2\|v\|_2 + \|v\|_2^2 = (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2.$$

两边非负，开平方得到欧氏三角不等式。

最后令 $a = |x_1 - y_1|, b = |x_2 - y_2|$。由 $\max(a,b)^2 \le a^2 + b^2 \le (a+b)^2$ 及 $a + b \le 2\max(a,b)$，得到所列比较式。 ∎

比较式意味着三种距离在数值上不同，却给出相同的收敛概念。某种距离趋于零时，另外两种被常数倍夹住，也趋于零。这个结论仅针对上述有限维坐标距离，不能据此认为所有度量都等价。

例 12.3　同一对点的距离　取 $x = (-1, 2)$、$y = (2, -2)$，计算三种距离。

解　坐标差绝对值为 $3, 4$，因此 $d_1(x,y) = 7$、$d_2(x,y) = 5$、$d_\infty(x,y) = 4$。它们满足 $4 \le 5 \le 7 \le 8$，与比较式一致。以后说某数列接近另一个点时，必须先说明正在使用哪种距离。 ♦

图 12.1 用同一个坐标单位画三种单位球的边界。球本身不含边界；图中虚线提醒这一点。

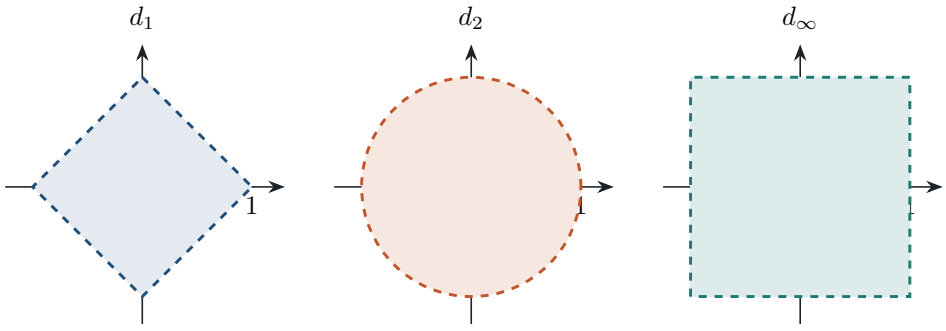


图 12.1　原点处半径为 1 的球在 d_1, d_2, d_∞ 下依次是菱形内部、圆盘内部和正方形内部。

点 $(3/5, 3/5)$ 在欧氏单位球内，因为距离平方为 $18/25 < 1$；却不在 d_1 单位球内，因为距离为 $6/5$。因此「半径相同」不代表球相同。把半径适当缩小后，上述距离比较仍能保证球的包含关系，这解释了它们给出相同收敛概念。

例 12.4　铁路距离与经原点的路线　在 $\mathbb{R}^2$ 上，若 x, y 与原点共线，令 $d_F(x,y) = \|x - y\|_2$；否则令 $d_F(x,y) = \|x\|_2 + \|y\|_2$。证明这是度量，并计算 $(3,0)$ 与 $(0,4)$、$(2,0)$ 与 $(5,0)$ 的距离。

解　先处理三角不等式。若 x, z 共线，则 $d_F(x,z) = \|x-z\|_2 \le \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2 \le d_F(x,y) + d_F(y,z)$，最后一步因为铁路距离总不小于欧氏距离。若 x, z 不共线，而 y 与二者都不共线，则右边等于 $\|x\|_2 + 2\|y\|_2 + \|z\|_2$，不小于左边。若 y 与 x 共线但不与 z 共线，则右边为 $\|x-y\|_2 + \|y\|_2 + \|z\|_2 \ge \|x\|_2 + \|z\|_2$；交换 x, z 处理另一种情形。若 $y = 0$，右边恰等于左边。非零 y 不可能同时与不共线的 x, z 共线，情形已全。非负、分离性和对称性由公式成立，所以确是度量。两组距离分别为 $3 + 4 = 7$ 和 $5 - 2 = 3$：不同直线必须经过原点，同一直线可直接相连。 ♦

12.3　点也可以是函数

函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2$ 在 $[0,1]$ 上的差并非一个数。若要用一个数衡量整幅图像的差别，可以取各点误差的最大值。

定义 12.4（连续函数的最大值距离）　设 $a \le b$。在 $C([a,b])$ 上定义 $d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$，称为最大值距离。

函数 $|f-g|$ 连续，闭区间上的最值定理保证最大值存在且有限。这里同时用了区间闭、有界和函数连续；若定义域改成 $(0,1)$，连续函数 $1/t$ 与零函数的误差无界，该公式不再给有限实数。

命题 12.5（最大值距离的公理）　上述 d 是 $C([a,b])$ 上的度量。

证明　误差非负；最大误差为零当且仅当每一点误差都为零，即 $f = g$；绝对值保证对称性。对任意 t，有 $|f(t) - h(t)| \le |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \le d(f,g) + d(g,h)$。右侧与 t 无关，对左侧取最大便得三角不等式。 ■

例 12.5　求整幅图像的最大误差　求 $f(t) = t$ 与 $g(t) = t^2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值距离，并解释 $d(f,g) < 1/3$。

解　配方得到 $|t - t^2| = t(1-t) = 1/4 - (t - 1/2)^2$，故最大值为 $1/4$，在 $t = 1/2$ 取得。因此 $d(f,g) = 1/4 < 1/3$。这意味着对每个 $t \in [0,1]$，都有 $|f(t) - g(t)| < 1/3$；并非只比较端点。两个函数在端点处相等，内部仍可能相差 $1/4$。 ♦

图 12.2 把「最大值距离小」画成整条曲线落入一条带子。

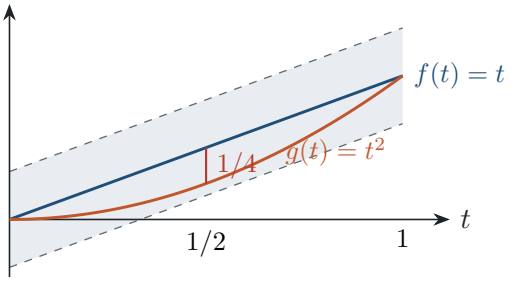


图 12.2　t^2 的整条图像位于 t 上下各 $1/3$ 的带内，最大竖直误差为 $1/4$。

这里比较的是同一输入处的竖直差，不能用两条曲线间最短的斜线距离代替。最大值距离为我们在第 21 讲讨论一致收敛提供了一个精确的几何含义。

定义 12.6（度量空间上的连续函数）　函数 $F : X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in X$ 连续，是指对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使 $d(x, x_0) < \delta$ 时 $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$。

例如固定 $t_0 \in [a, b]$，取值映射 $F(f) = f(t_0)$ 满足 $|F(f) - F(g)| \le d(f, g)$，所以连续。输入是整条函数，输出是某一点的函数值；不要将它与「每个输入函数本身连续」混为一谈。

■ **例 12.6　对函数取值的连续性**　在 $C([0,1])$ 上令 $F(f) = f(0)$。若 $d(f, g) < 1/100$，能保证两个输出多接近？

解　最大误差控制每一点，故 $|f(0) - g(0)| \le d(f, g) < 1/100$。对一般 $\varepsilon > 0$ 取 $\delta = \varepsilon$ 即证明 F 连续。这种估计不依赖于选了哪两个函数，也不依赖于基准函数的形状。 ♦

12.4　收敛、柯西与空间中缺失的极限

在区间 $(0, 1)$ 中，$x_n = 1/(n+1)$ 越来越接近零。实轴上的距离能趋于零，但「在这个空间内有极限」还要求零属于空间。

定义 12.7（收敛、柯西与完备）　设 (X, d) 为度量空间。数列 x_n 收敛到 $x \in X$，指对每个 $\varepsilon > 0$，存在 N，使所有 $n \ge N$ 都有 $d(x_n, x) < \varepsilon$。数列为柯西列，指对每个 $\varepsilon > 0$，存在 N，使所有 $m, n \ge N$ 都有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$。若每个柯西列都收敛到 X 中某点，则称 X 完备（complete）。

收敛先指定一个候选极限，柯西条件只比较后面的项。数列仍是从正整数集到 X 的映射；子列 x_{n_k} 要求 n_k 严格递增，与实数数列相同。

命题 12.8（连续映射保持数列极限）　设 $F : X \to \mathbb{R}$ 在 $x \in X$ 连续，且 $x_n \to x$，则 $F(x_n) \to F(x)$。

证明　给定 $\varepsilon > 0$，连续性给出 $\delta > 0$，使 $d(y, x) < \delta$ 时 $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$。再由 $x_n \to x$ 取 N，使所有 $n \ge N$ 满足 $d(x_n, x) < \delta$。代入前一估计便得 $|F(x_n) - F(x)| < \varepsilon$。 ■

例如在最大值距离下，若函数列 f_n 收敛到 f，则取值映射的连续性给出 $f_n(0) \to f(0)$。反向不成立：只知道一个输入位置的值，无法控制整条图像。取 $f_n(t) = nt$，虽然 $f_n(0) = 0$，到零函数的最大值距离却为 n。

定理 12.9（只用三角不等式的三个结论）　度量空间中，极限唯一；收敛列必为柯西列；柯西列必有界。

思路　唯一性把两个候选极限经由同一个 x_n 连起来；柯西性质把两项经由同一个极限连起来。有界性先用柯西条件把尾部装进一个球，再扩大半径容纳有限个前项。

证明　唯一性。若 $x_n \to x$ 且 $x_n \to y$，而 $d(x,y) = r > 0$，分别对误差 $r/3$ 选阈值，取二者最大值。大于该阈值的 n 满足 $d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y) < 2r/3$，矛盾。故 $d(x,y) = 0$，由分离性 $x = y$。

收敛蕴含柯西。给定 $\varepsilon > 0$，选择 N 使 $n \ge N$ 时 $d(x_n,x) < \varepsilon/2$。对任意 $m,n \ge N$，三角不等式给出 $d(x_m,x_n) \le d(x_m,x) + d(x,x_n) < \varepsilon$。这里两个下标都必须落在尾部。

柯西蕴含有界。取误差 1 对应的 N，则 $d(x_N,x_n) < 1$ 对所有 $n \ge N$ 成立。令 $R = 1 + \max(\{0\} \cup \{d(x_N,x_i) : 1 \le i < N\})$。这个有限非空实数集合有最大值；加入 0 也处理了 $N = 1$。尾部距离小于 $1 \le R$，前面有限项的距离也严格小于 R，因此全部项都属于 $B_R(x_N)$。 ■

「有界」只说明存在一个统一的距离上限：存在 $c \in X$ 与 $R > 0$，使所有项满足 $d(x_n,c) < R$。它不保证项之间最终接近。例如在离散距离下，任何数列都被半径 2 的球包含；一列两两不同的点却永远相距 1，不可能是柯西列。

■ **例 12.7　开区间中丢失的极限**　在 $X = (0,1)$ 及通常距离下，证明 $x_n = 1/(n+1)$ 是柯西列，但在 X 内不收敛。

解　给定 $\varepsilon > 0$，选 N 使 $1/(N+1) < \varepsilon$。若 $m,n \ge N$，两个数都在 $(0,1/(N+1)]$ 中，故 $|x_m - x_n| < 1/(N+1) < \varepsilon$。所以数列是柯西列。若它在 X 内收敛到某个 $x > 0$，选 n 足够大，使 $x_n < x/3$，则 $d(x_n,x) = x - x_n > 2x/3$，与趋于零矛盾。因此它在 X 内没有极限。实轴中的极限为零，错误不在数列的后项不够接近，而在空间没有包含所需的极限点。 ♦

易错提醒　「柯西列一定收敛」需要完备性条件。$(0,1)$ 中的 $1/(n+1)$ 是反例。说它「收敛到 0」时必须注明正在更大的空间 $\mathbb{R}$ 中讨论；0 不是 X 中合法的极限候选。

■ **例 12.8　自然数上的倒数距离，习题集 6 第 2 题**　在 $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ 上令 $d(m,n) = |1/m - 1/n|$。证明它是度量，并证明 $x_n = 5n$ 为不收敛的柯西列。

解　映射 $n \mapsto 1/n$ 将自然数一一对应到实轴上的集合 $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$。绝对值距离通过此映射给出非负性、对称性和三角不等式；距离为零意味着 $1/m = 1/n$，于是 $m = n$，所以分离性也成立。对 $m,n \ge N$，有 $d(x_m,x_n) = |1/(5m) - 1/(5n)| \le 1/(5N)$。选 $N > 1/(5\varepsilon)$ 便得柯西条件。若收敛到某个自然数 k，距离为 $|1/(5n) - 1/k|$，当 $n > 2k/5$ 时它大于 $1/(2k)$，不趋于零。因此空间不完备。

例如 $d(5,10) = 1/10$，$d(50,100) = 1/100$；自然数的通常差越来越大，倒数距离却越来越小。**数列是否接近，取决于所用的度量。**本题原材料中的距离必须带绝对值，否则当 $m > n$ 时可能为负，连距离公理的第一条都不满足。 ♦

想一想　在离散距离下，什么样的数列是柯西列？这个空间是否完备？

答　取 $\varepsilon = 1/2$，柯西条件要求尾部任意两项距离小于 $1/2$。离散距离只取 $0, 1$，所以尾部所有项相等，即数列最终恒定。反过来，最终恒定的数列为柯西列并收敛到那个恒定值。因此任意非空集合配离散距离都完备；即使集合无限，也成立。

命题 12.10（坐标收敛与平面的完备性）　欧氏平面中，$(a_n, b_n) \to (a, b)$ 当且仅当 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$；(a_n, b_n) 是柯西列当且仅当两条坐标数列都是柯西列。因此欧氏平面完备。三维欧氏空间也满足相应结论。

证明　由 $|a_n - a|, |b_n - b| \le d_2((a_n, b_n), (a, b))$，点列收敛蕴含坐标收敛。反向用 $d_2 \le |a_n - a| + |b_n - b|$，对两条坐标各取误差 $\varepsilon/2$ 的阈值，再取最大值。把 a, b 改成 a_m, b_m 就以完全相同的估计证明两种柯西条件等价。若平面点列为柯西列，两个坐标分别为实数柯西列。由 $\mathbb{R}$ 完备，它们收敛到实数 a, b；前一结论保证点列收敛到平面中的 (a, b)。三维情形用每个坐标差不超过欧氏距离、欧氏距离不超过三个坐标差绝对值之和，并取误差 $\varepsilon/3$。 ■

这个证明说明维数有限起了作用：可以给有限多个坐标分别分配误差，再取有限个阈值的最大值。函数空间有无穷多个输入位置，逐个位置都收敛未必能取到统一阈值。第 21 讲将处理这个额外困难，不能从平面例子直接跳到「任何函数空间都完备」。

12.5　球、有界集与收敛列

在实轴上，$B_1(2) = x : |x - 2| < 1 = (1, 3)$。度量只提供距离，因此同一个定义可用于平面、函数空间和离散空间。

定义 12.11（开球与有界集）　在度量空间 (X, d) 中，中心 $x \in X$、半径 $r > 0$ 的开球是

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

子集 $A \subseteq X$ 有界，是指存在 $c \in X$ 和 $R > 0$ 使 $A \subseteq B_R(c)$。

半径必须为正；$B_0(x)$ 没有按此定义列入开球，而半径 1 的离散球 $B_1(x)$ 只含中心 x。有界性依赖于度量，实数上的通常距离和倒数距离会给出不同的尺度。

■ **例 12.9　球的计算**　在欧氏平面、d_1 平面和离散距离空间中，分别描述半径 1 的球。

解　欧氏平面中 $B_1((0, 0))$ 是满足 $x^2 + y^2 < 1$ 的圆盘内部；d_1 下是 $|x| + |y| < 1$ 的菱形内部；离散距离下 $B_1(x) = \{x\}$，因为其他点到 x 的距离恰为 1，不满足严格不等式。这个比较说明球的形状由度量决定，边界点不属于开球。 ♦

图 12.3 用两种球的包含关系说明距离比较如何转成邻域控制。

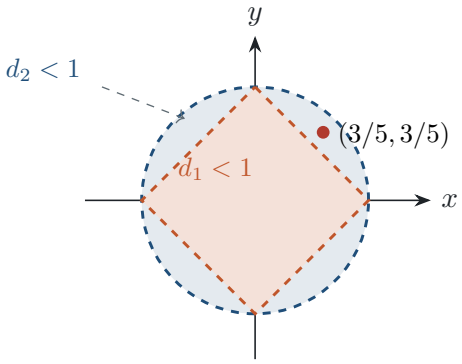


图 12.3　菱形 d_1 单位球包含在欧氏单位球内；点 $(3/5, 3/5)$ 在圆盘中，却在菱形外。两条边界均不属于相应的开球。

前两节给出的 $d_2 \le d_1 \le 2d_\infty$ 说明 $B_r^{d_1}(x) \subseteq B_r^{d_2}(x) \subseteq B_r^{d_\infty}(x)$，而 $B_r^{d_\infty}(x) \subseteq B_{2r}^{d_1}(x)$。球的包含常用于把一个距离条件换成另一个距离条件。

命题 12.12（更换有界集的中心）　若 $A \subseteq B_R(c)$，则对任意 $p \in X$ 都有 $A \subseteq B_{R+d(c,p)}(p)$。因此定义有界时选哪个中心不影响结论。

证明　对 $a \in A$，三角不等式给出 $d(a,p) \le d(a,c) + d(c,p) < R + d(c,p)$。半径仍为正实数，故所列球包含 A。若 A 为空，同一个包含关系也成立。 ■

例如 $A \subseteq B_2(c)$ 且 $d(c,p) = 5$ 时，半径 7 的球 $B_7(p)$ 足以包含 A。这个半径只给一个可用上界，不一定是最小半径。有界定义只要求找到一个球，不要求找到最优的球。

■ **例 12.10　有界而无收敛子列**　给 $\mathbb{N}$ 配离散距离，考察点列 $x_n = n$。证明它有界，却没有收敛子列；这个空间同时是完备的。

解　固定中心 1，每一点到它的距离至多为 1，所以 $\mathbb{N} \subseteq B_2(1)$。任意子列下标严格递增，点也两两不同，故任意两个不同项距离都是 1。取 $\varepsilon = 1/2$，该子列不满足柯西条件；由定理 12.9，它不能收敛。另一方面，离散空间中的每个柯西列最终恒定，已在前面的想一想中证明，所以此空间完备。

因此实数的 Bolzano–Weierstrass 定理无法仅凭「有界」推广到任意度量空间；即使再加「完备」，仍会失败。第 14 讲的紧性会提供正确的附加条件。这里的反例同时说明，检验一个推广时，应把所需性质分别列出，不能将完备与紧性混用。 ♦

想一想　如果一个柯西列已经有收敛到 x 的子列，整个数列是否收敛到 x？是否需要假定空间完备？

答　会收敛，且不需要完备。给定 $\varepsilon > 0$，取柯西阈值 N，使 $m, n \ge N$ 时距离小于 $\varepsilon/2$。再选子列中的一项 x_{n_k}，使 $n_k \ge N$ 且 $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$。对任意 $n \ge N$，有 $d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$。极限 x 已由子列提供，所以不用完备性来保证它存在。

12.6　开集：每个点周围都有余量

在 $(1,3)$ 中取点 2.8，半径 0.1 的球仍留在区间里；半径 1 则会越过端点。判断开集允许半径依赖所选的点，越靠近端点通常需要越小的半径。

定义 12.13（开集）　设 (X,d) 是度量空间。若对每个 $x \in O \subseteq X$，都存在 $r_x > 0$ 使 $B_{r_x}(x) \subseteq O$，则称 O 是 X 中的**开集**（open set）。

空集是开集：没有点需要检验，条件没有失败对象。整个 X 也是开集：每个球本来就只由 X 中的点组成。单点集是否开则依赖度量；实轴中的 $\{0\}$ 不开，离散空间中的任意单点都开。

例 12.11　开区间与半开区间　在实轴的通常距离中，证明 $(1,3)$ 是开集，而 $(1,3]$ 不是开集。

解　对 $x \in (1,3)$ 取 $r = \min(x-1, 3-x) > 0$。若 $|y-x| < r$，则 $y > x - r \geq 1$ 且 $y < x + r \leq 3$，严格不等式保证 $1 < y < 3$。因此每个点都有所需球。对 $(1,3]$，只需找到一个失败点。取 $x = 3$，任意 $r > 0$ 的球 $B_r(3)$ 都含 $3 + r/2$，该点在集合外。所以半开区间不满足定义。失败来自被包含的右端点，左端点 1 不属于集合，无须检验它。 ♦

定理 12.14（开球是开集）　任意度量空间中，每个开球 $B_r(x)$ 都是开集。

直观理解　取球内点 y。它到中心的距离小于 r，两者之差 $r - d(x,y)$ 为正。这个差值就是可用于选择新球半径的余量；三角不等式保证新球仍在原球内。图 12.4 画的是欧氏平面中的这一情形，证明本身只需要距离公理。

证明　固定 $y \in B_r(x)$，令 $s = r - d(x,y) > 0$。对任意 $z \in B_s(y)$，

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s = r.$$

因此 $B_s(y) \subseteq B_r(x)$。这个构造对球内任意 y 都有效，故原球为开集。 ■

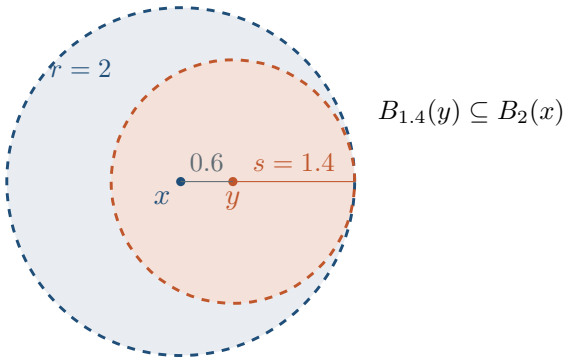


图 12.4　原球半径为 2，$d(x,y) = 0.6$，新球半径取 1.4。边界相切点不属于任何开球，因此仍有开球包含关系。

图中不要求新球的闭包也位于原开球内。两条边界相切没有妨碍，因为定义只比较满足严格距离不等式的点。若希望连闭包也留在内部，可以改取更小半径 $s/2$，但证明开性无需这一步。

■ **例 12.12　相对空间会改变开性的判断**　给 $X=(0,1]$ 配通常距离，判断 $A=(0,1/2)$ 与 $B=(1/2,1]$ 是否是 X 中的开集。

解　在 X 中，球是 $B_r^X(x)=(x-r,x+r)\cap X$，必须把空间范围一起考虑。对 $x\in A$ 取 $r=1/2-x>0$，则 $y\in B_r^X(x)$ 保证 $0<y<1/2$。对 $x\in B$ 取 $r=x-1/2>0$，则球中的点满足 $y>1/2$，又因 $y\in X$ 自动有 $y\le 1$。因此 A,B 都在 X 中开。

特别地，$1\in B$ 不造成问题：在 X 中取球不会产生大于 1 的点。将 B 看成实轴的子集时，它却不开放。这说明「开集」必须连同所处空间说明；集合符号的括号形状不能代替定义。　♦

易错提醒　开集不要求存在一个适用于所有点的统一半径。$(0,1)$ 是开集，但若指定任意 $r>0$，可取 $0<x<\min(r/2,1)$，球 $B_r(x)$ 就含有非正数。正确量词为「对每个点，存在半径」，半径可以随点变化。

核心思想　证明集合开：先任取集合中的点，再构造一个正半径，并逐点验证球包含。证明集合不开：找出一个集合内的点，证明任意正半径的球都会包含集合外的点。两个方向的量词顺序不同。

12.7　集合运算与开集的并交

取实轴上的 $A=(0,3)$、$B=(-1,2)$。并集包含左侧的负数和右侧大于 2 的数，所以 $A\cup B=(-1,3)$；交集要求同时满足两组限制，所以 $A\cap B=(0,2)$。这一例子也订正了原材料将并集写成 $(0,3)$ 的笔误。

定义 12.15（并、交与补）　设 $A_\alpha\subseteq X$ 是一族集合，指标集为 J。定义

$$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\{x\in X:\text{存在}\alpha\in J,\ x\in A_\alpha\},\qquad \bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha=\{x\in X:\text{对所有}\alpha\in J,\ x\in A_\alpha\}.$$

集合 A 的补集为 $X\setminus A=\{x\in X:x\notin A\}$。

并集中的「或」允许同时属于多个集合，交集中的「所有」要求没有例外。若指标集为空，约定空并为 $\varnothing$、空交为 X；这也与存在、全称量词的含义相符。

命题 12.16（De Morgan 公式）　对 X 中任意集合及集合族，有

$$X\setminus(X\setminus A)=A,\qquad X\setminus\bigcup_{\alpha}A_\alpha=\bigcap_{\alpha}(X\setminus A_\alpha),\qquad X\setminus\bigcap_{\alpha}A_\alpha=\bigcup_{\alpha}(X\setminus A_\alpha).$$

证明　两个集合相等，当且仅当互相包含；以下逐点的等价判断同时给出两个方向。首先，对 $x\in X$，

属于 $X \setminus (X \setminus A)$ 表示不属于补集，也就是属于 A，故第一式成立。

对第二式，x 不属于并集，等价于没有任何指标使 $x \in A_\alpha$；也就是对每个 α 都有 $x \notin A_\alpha$。后一句等价于 x 属于所有补集，即属于这些补集的交。每一步均可倒推，所以给出集合相等。

对第三式，x 不属于交集，等价于「对所有 α 都属于 A_α」失败，因此至少有一个 α 使 $x \notin A_\alpha$。这正表示 x 属于某个补集，也就是属于补集的并。反向从这个指标可知 x 不在原交集中。空指标时两式分别变成 $X \setminus \varnothing = X$ 和 $X \setminus X = \varnothing$，也成立。 ■

补集的全集不能中途更改。例如在 $X = \mathbb{R}$ 中，$(0,3)$ 的补集为 $(-\infty, 0] \cup [3, \infty)$；若全集换成 $(0,4)$，补集就变成 $[3,4)$。上述公式在固定的全集中才有一致含义。

■ **例 12.13　缩小区间的并与交**　令 $U_n = (-1/n, 1/n)$，$n \geq 1$。求 $\bigcup_n U_n$ 与 $\bigcap_n U_n$。

解　先看嵌套方向：$U_{n+1} \subseteq U_n$，而最大的 $U_1 = (-1,1)$ 已在集合族中，因此并集恰为 $(-1,1)$。交集包含 0，因为每个区间都含零。若 $x \neq 0$，由阿基米德性质可以取正整数 $n > 1/|x|$，使 $1/n < |x|$，于是 $x \notin U_n$。所以非零点都不能属于交集，得到 $\bigcap_n U_n = \{0\}$。证明交集时要处理任意非零 x，仅列出前几个区间不能排除全部非零点。 ♦

定理 12.17（开集的并与有限交）　任意一族开集的并仍为开集；有限多个开集的交仍为开集。

思路　并集中的一个点只需属于其中一个开集，沿用该集合提供的半径即可。交集中的点需要同时满足全部限制，因此对每个集合先取一个半径，再取有限个正数的最小值。

证明　设各 O_α 开，任取 $x \in \bigcup_\alpha O_\alpha$。存在一个指标 α_0 使 $x \in O_{\alpha_0}$；开性给出 $r > 0$，使 $B_r(x) \subseteq O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_\alpha O_\alpha$。所以并集开。若没有点可取，并集为空，也已经知道它开。

设 $O_1, \dots, O_m$ 开且 $m \geq 1$，任取交集内点 x。分别选 $r_i > 0$，使 $B_{r_i}(x) \subseteq O_i$。有限个正数的最小值 $r = \min_{1 \leq i \leq m} r_i$ 仍为正。若 $y \in B_r(x)$，则对每个 i 都有 $d(x,y) < r \leq r_i$，从而 $y \in O_i$。于是 $B_r(x)$ 包含于整个交集，证明交集开。零个集合的交是 X，也开。 ■

有限性用在「最小值仍为正」。无穷多个正数不一定有正的共同下界：$1/n$ 的下确界是零，不能拿零充当邻域半径。前例中每个 U_n 都开，交集 $\{0\}$ 却不开：任意 $r > 0$ 的 $B_r(0)$ 都含非零点 $r/2$。

易错提醒　开集的任意并与有限交不能互换。无穷交 $\bigcap_n (-1/n, 1/n) = \{0\}$ 不是开集，而任意并始终开放。每次应用开性结论时，先看正在做并还是交，再核对集合族是否有限。

本讲小结

- 度量满足非负与分离、对称、三角不等式；d_1, d_2, d_∞ 在平面上满足 $d_\infty \le d_2 \le d_1 \le 2d_\infty$。
- $C([a,b])$ 的最大值距离 $d(f,g)=\max_{[a,b]}|f-g|$ 是度量；$d(f,g)<\varepsilon$ 表示整条图像处在误差带内。
- 收敛列极限唯一且为柯西列；柯西列有界，但只有完备空间才能保证它在空间内收敛。
- 开球 $B_r(x)=\{y: d(x,y)<r\}$；若 $A\subseteq B_R(c)$，则换中心 p 后 $A\subseteq B_{R+d(c,p)}(p)$。
- O 开当且仅当每个 $x\in O$ 都有某个 $r_x>0$ 使 $B_{r_x}(x)\subseteq O$；半径允许依赖 x。
- 开球开；开集任意并、有限交开，无穷交可能不开。补集满足 De Morgan 公式，全集必须固定。

练习

12.1 ★ 在 d_1、d_2、d_∞ 中分别计算 $(1,-2)$ 与 $(-2,2)$ 的距离，并验证比较链。

12.2 ★ 证明 $d(f,g)=\max_{[0,1]}|f-g|$ 满足三角不等式；取 $f(t)=t$、$g(t)=t^2$ 求其距离。

12.3 ★ 判断真假并给出理由：(a) 每个度量空间中的有界数列都有收敛子列；(b) 每个收敛列都是柯西列；(c) 柯西列在任意度量空间都收敛。

12.4 ★★ 在通常距离下证明 $[0,1)$ 不是开集，并证明它在相对空间 $X=[0,1)$ 中是开集。

12.5 ★★ 证明若 A,B 有界，则 $A\cup B$ 有界；分别给出交集为空和非空的有界集例子。

12.6 ★★ 用球定义证明两个开集的交是开集，并指出证明中哪里用到了「两个」。

12.7 ★★ 证明 $\mathbb{R}^2$ 中 d_1 与 d_∞ 给出相同的收敛列。

12.8 ★★ 令 $V_n=(0,1+1/n)$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集，求 $\bigcap_{n\ge1}V_n$，并判断它是否开。

12.9 ★★★ 设 x_n 是柯西列，且有子列收敛到 x。不用完备性证明 $x_n\to x$。

12.10 ★★★ 设 O_α 是开集。用量词证明 $X\setminus\bigcup_\alpha O_\alpha=\bigcap_\alpha(X\setminus O_\alpha)$，再说明若所有 O_α 开，补集族不一定开。

练习答案与提示

12.1 坐标差绝对值为 $3,4$，所以 $d_1=7$、$d_2=5$、$d_\infty=4$，有 $4\le5\le7\le8$。

12.2 对每个 t，$|f(t)-h(t)|\le|f(t)-g(t)|+|g(t)-h(t)|$，取最大得三角不等式；$|t-t^2|$ 最大值为 $1/4$，故距离为 $1/4$。

12.3 (a) 假，离散距离空间中的 $x_n=n$ 有界却没有收敛子列；(b) 真，由三角不等式分配 $\varepsilon/2$；(c) 假，$(0,1)$ 中 $1/(n+1)$ 是柯西列但极限 0 不在空间。

12.4 $0\in[0,1)$，任意 $r>0$ 的球 $B_r(0)$ 含负数 $-r/2$，故它在 $\mathbb{R}$ 中不开。在相对空间 $X=[0,1)$ 中，该集合就是整个空间，因此相对开。

12.5 取 $A\subseteq B_R(c)$、$B\subseteq B_S(c')$。令 $T=\max\{R,S+d(c',c)\}>0$；换中心命题给出 $A\cup B\subseteq B_T(c)$。交集例子：$(0,1)\cap(1,2)=\varnothing$；$(0,2)\cap(1,3)=(1,2)$。两种交集都被有界集包含，因此有界。

12.6 任取 $x \in O_1 \cap O_2$。由开性取 $r_1, r_2 > 0$，使 $B_{r_i}(x) \subseteq O_i$。令 $r = \min(r_1, r_2) > 0$，则 $B_r(x) \subseteq B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x) \subseteq O_1 \cap O_2$，故交集开。用到「两个」的地方是两个半径的最小值仍为正；对无限多个半径没有这样的保证。

12.7 $d_\infty \le d_1 \le 2d_\infty$。若 $d_1(x_n, x) \to 0$，则 $d_\infty \to 0$；若 $d_\infty \to 0$，则 $d_1 \le 2d_\infty \to 0$，故收敛等价。

12.8 交集为 $(0, 1]$。若 $0 < x \le 1$，则 x 属于每个 V_n；若 $x > 1$，取 $n > 1/(x-1)$，便有 $1 + 1/n < x$，排除该点；非正数不属于任一区间。点 1 的任意球含大于 1 的点，故交集在实轴中不开。

12.9 给定 $\varepsilon > 0$，取柯西阈值 N，使 $m, n \ge N$ 时 $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$。选 k 使 $n_k \ge N$ 且 $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$。对任意 $n \ge N$，由三角不等式，$d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$，所以 $x_n \to x$。

12.10 对每个 $x \in X$，左边成员条件等价于对所有 α 都有 $x \notin O_\alpha$，等价于对所有 α 都有 $x \in X \setminus O_\alpha$，恰为右边成员条件。补集未必开：取 $O = (0, 1)$，其补集含 0，但任意半径 $r > 0$ 的球 $B_r(0)$ 都含 $\min(r/2, 1/2) \in (0, 1)$，故补集不开。

第 13 讲

闭集、相对空间与开覆盖

Closed Sets, Subspaces and Open Covers

对应材料：MIT 18.100B Lecture 13：闭集定义与序列刻画、闭集运算、覆盖和有限子覆盖；紧性及其主要定理在第 14 讲证明。本讲补全原稿中构造距离小于 $1/n$ 的点这一关键步骤。

本讲目标

(1) 会通过补集判断闭集，并说明开与闭的四种组合。

(2) 能用反三角不等式证明闭球是闭集，区分闭球与开球的闭包。

(3) 掌握闭集的序列刻画，能从开性失败构造收敛数列。

(4) 会证明闭集任意交、有限并的性质，能举出无穷并失败的例子。

(5) 会在指定空间内判断相对开闭，避免遗漏极限必须属于环境空间的条件。

(6) 理解开覆盖与有限子覆盖的量词，能证明一个具体覆盖没有有限子覆盖。

13.1 闭集保留了怎样的边界

在实轴上，$1/n$ 的每一项都属于 $(0,1]$，极限 0 却不在这个区间。如果改为 $[0,1]$，这次极限保留了下来。第 12 讲用小球定义了开集；现在从补集出发给出一个能够准确描述这种差别的定义。注意，这个定义首先涉及的是整个空间中哪些点被排除，暂时还没有直接提到数列。

定义 13.1（闭集） 设 (X,d) 为度量空间。若 $X\setminus C$ 是 X 中的开集，则称 $C\subseteq X$ 为 X 中的闭集（closed set）。

例如 $[0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中闭，因为其补集为 $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$，是两个开区间的并。单点集 $\{0\}$ 也闭，因为补集为 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$。空集与整个空间都闭：它们的补集分别为 X 和空集，都开。这里不能因集合没有端点或没有元素而拒绝判断，定义已经覆盖了这些边界情形。

相反，$(0,1)$ 在实轴中不闭。它的补集含 0，但任意 $r>0$ 的 $B_r(0)$ 都含点 $\min(r/2,1/2)$，该点落在 $(0,1)$ 内。所以补集在 0 处不满足开集定义。这个论证只用到了一个失败点；要证明「每个点都有邻域」的条件失败，找到一个点便足够。

■ **例 13.1　四种开闭组合**　在通常距离的实轴中，分别找一个开且不闭、闭且不开、既开又闭、既不开也不闭的集合，并验证。

解　先用区间端点检验，再利用空集的特殊地位。$(0,1)$ 开而不闭，开性由第 12 讲的区间证明得到，不闭性已在上面验证。$[0,1]$ 闭而不开：其补集开，但任何以 0 为中心的正半径球都含负数，无法包含在 $[0,1]$ 内。空集既开又闭，整个实轴也如此。$[0,1)$ 既不开也不闭：在 0 处没有内含小球；其补集 $(-\infty,0)\cup[1,\infty)$ 在 1 处没有内含小球，因为 $1-\min(r/2,1/2)$ 是球内却不在补集的点。四种情况确实都发生，开与闭并不是互相排斥的两个选项。 ♦

易错提醒　「不是开集，所以是闭集」是错误推断。$[0,1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中两者都不是。闭集的定义要求补集开，并没有将所有非开集收集起来；判断时应分别检验集合与其补集。

下面的图 13.1 将四个区间的端点是否保留画在同一尺度上，帮助把「球越过端点」和「补集中缺乏余量」分开。

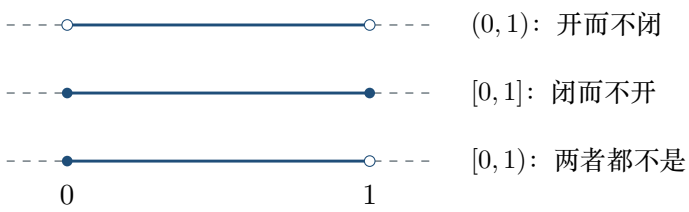


图 13.1　同样的两个端点，保留方式不同会改变区间在实轴中的开闭性质；空心点表示端点不属于集合。

图中闭区间包含两端点，但「闭」不能在一般空间中简化成「画实心端点」。平面中的圆盘、函数组成的集合甚至离散空间都未必有这样两个端点。补集的球条件才是适用于所有度量空间的定义。

想一想　在离散距离空间中，一个集合是否可能既不开又不闭？

答　不可能。对任意子集 A 及 $x\in A$，离散球 $B_{1/2}(x)=\{x\}\subseteq A$，所以所有子集都开。补集也是子集，因而也开，所以所有子集同时闭。开闭性质取决于度量，不能仅凭集合中点的个数判断。

13.2　闭球与距离函数

欧氏平面中的圆盘 $x^2+y^2\le 4$ 保留了圆周，因而很适合检验闭集定义。但在抽象空间中我们不便谈「圆周内外」，可以改看数值 $d(p,y)$ 是否超过 2。若它严格超过 2，距离连续的小幅变化不应立刻使它降到 2 以下；反三角不等式正好把这一直觉写成估计。

定义 13.2（闭球）　中心 $p\in X$、半径 $r>0$ 的**闭球**（closed ball）定义为 $\overline{B}_r(p)=\{y\in X:d(p,y)\le r\}$。此处横线是闭球的记号，暂不表示已经对开球实施了某种运算。

命题 13.3（距离函数的误差控制）　固定 $p\in X$。对任意 $y,z\in X$，有 $|d(p,y)-d(p,z)|\le d(y,z)$，因此 $y\mapsto d(p,y)$ 连续。

证明　三角不等式给出 $d(p,y)-d(p,z)\le d(y,z)$。交换 y,z 得 $d(p,z)-d(p,y)\le d(y,z)$，合起来便是绝对值不等式。给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，即可直接满足连续性定义。 ■

> **定理 13.4（闭球是闭集）**　任意度量空间的每个闭球都是闭集。等价地，集合 $A_r=\{y: d(p,y)>r\}$ 为开集。

直观理解　在球外选点 y，其距离超过半径的部分 $s=d(p,y)-r$ 是正数。如果点 z 到 y 的距离严格小于这个余量，它到 p 的距离就仍大于 r。这与上一讲从球内点构造小球的方法相互对应。

证明　任取 $y\in A_r$，令 $s=d(p,y)-r>0$。若 $z\in B_s(y)$，由命题 13.3 得 $d(p,z)\ge d(p,y)-d(y,z)>d(p,y)-s=r$。所以 $B_s(y)\subseteq A_r$。每个球外点都有这样的邻域，故补集开，闭球闭。 ■

■ **例 13.2　在闭球外安排一个开球**　在欧氏平面取 $p=(0,0)$、$r=2$、$y=(3,0)$。求一个以 y 为中心、完全不碰到闭球 $\overline{B}_2(p)$ 的开球。能否取半径 1？

解　用外部余量 $s=3-2=1$，可取 $B_1(y)$。若 z 在此球中，则 $d(p,z)\ge 3-d(y,z)>2$。两圆边界在 $(2,0)$ 相切，但该点不属于 $B_1(y)$，因此开球与闭球仍不相交。若错误地把外部邻域取成闭球 $\overline{B}_1(y)$，相切点就会同时属于两闭球；严格不等式在这里不可省略。 ♦

图 13.2 将上述余量计算画在同一条水平直线上。

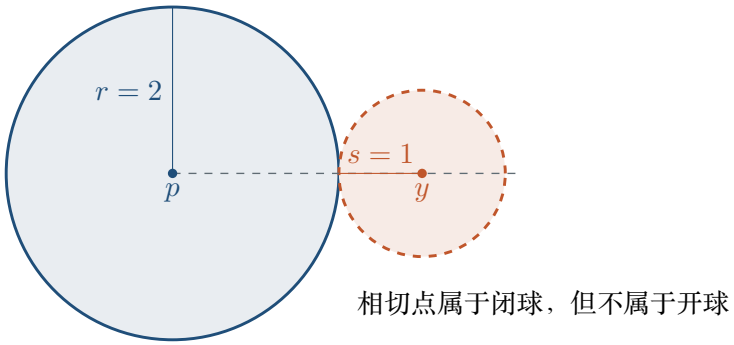


图 13.2　闭球半径为 2，外部点到中心距离为 3；半径 1 的外部开球与闭球不相交。

图中蓝色边界包含于蓝色闭球，橙色虚线不属于橙色开球。因此相切点处看似接触的两块区域，在集合意义下仍没有公共点。换用任意度量时可能失去圆形，但反三角估计完全保留。

■ **例 13.3　闭球不一定是开球补上边界**　在至少有两个点的离散距离空间中，求半径 1 的开球和闭球。开球附近是否真能找到所有闭球中的点？

解　离散距离只有 $0,1$ 两个值，所以 $B_1(p)=\{p\}$，而 $\overline{B}_1(p)=X$。对 $q\ne p$，小球 $B_{1/2}(q)=\{q\}$ 与 $B_1(p)$ 没有交点；所以 q 根本无法用开球中的点逼近。闭球的定义是距离不超过半径；不能在所有度量空间中将它解释为开球加上所有可逼近的边界点。 ♦

13.3　闭集的序列刻画

集合 $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ 中的点越来越接近零，但集合没有零，因而会丢失一个在实轴中存在的极限。给它补上零后，这种丢失是否完全消除？下面的定理将补集开性转成可用数列检验的条件。检验只考虑在环境空间 X 内确实收敛的数列；一个没有极限的柯西列并不违反闭性。

定理 13.5（闭集的序列刻画）　子集 $C \subseteq X$ 闭，当且仅当：每个满足 $x_n \in C$ 且 $x_n \to x \in X$ 的数列，其极限都属于 C。

直观理解　若极限 x 在开补集中，便有一整个小球排除了 C，而收敛又要求后面的项进入这个球，两者冲突。反过来，如果补集在某个点不开放，则每个越来越小的球都会碰到 C；从每个球里选一点，就得到趋向该点的数列。

思路　正向从补集中一个假定的极限点取球；逆向将开性的否定展开为「存在一个失败点，对每个正半径都失败」，再选半径 $1/n$。逆向不能只说「选一个 $x_n \in C$」，还必须给出它到目标点的距离上界。

证明　先设 C 闭，且 $x_n \in C$、$x_n \to x \in X$。若 $x \notin C$，补集开性给出 $r > 0$，使 $B_r(x) \subseteq X \setminus C$。收敛性给出 N，使 $n \geq N$ 时 $x_n \in B_r(x)$。这同时要求 x_n 在 C 内外，矛盾。因此 $x \in C$。

反过来，设题述数列条件成立。如果补集不开放，则存在 $x \in X \setminus C$，使任意 $r > 0$ 的 $B_r(x)$ 都不能完全包含在补集中。于是对每个 $n \geq 1$，可选 $x_n \in B_{1/n}(x) \cap C$，满足 $d(x_n, x) < 1/n$。给定 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/\varepsilon$，则 $n \geq N$ 时 $d(x_n, x) < \varepsilon$，即 $x_n \to x$。由假设 $x \in C$，与选点矛盾。故补集开，C 闭。 ■

易错提醒　「闭集中的每个数列都收敛」不是序列刻画。实轴本身闭，但 $x_n = n$ 不收敛。定理说的是：如果列在环境空间中有极限，那么极限仍在集合中；它没有保证极限存在。

■ **例 13.4　补上唯一缺失的极限**　在实轴中判断 $D = \{1/n : n \geq 1\}$ 与 $E = D \cup \{0\}$ 是否闭。

解　用数列刻画，D 不闭，因为 $1/n \to 0$ 而 $0 \notin D$。为了证明 E 闭，设 $z_k \in E$ 且 $z_k \to z$。每项非负，所以 $z \geq 0$。若 $z = 0$，已经属于 E。若 $z > 0$，取 K 使 $k \geq K$ 时 $|z_k - z| < z/2$，于是尾部满足 $z_k > z/2$，只可能取有限多个值 $1, 1/2, \dots, 1/M$，其中可取整数 $M > 2/z$。

这个有限集合中必有一个值 a 在尾部出现无限次，否则各值只出现有限次，尾部总项数也有限，矛盾。取恒等于 a 的子列，它收敛到 a；同时原列收敛到 z，子列也收敛到 z。极限唯一性给出 $z = a \in E$。所以 E 闭。这里补上零后，任何非零候选极限附近只剩有限多个可能值，正是证明可以完成的原因。 ♦

■ **例 13.5　正方形为何保留所有极限**　证明欧氏平面中的 $Q = [0,1] \times [0,1]$ 是闭集，再判断 $Q \setminus \{(0,0)\}$ 是否闭。

解　用第 12 讲的坐标收敛结论。设 $(a_n, b_n) \in Q$ 且 $(a_n, b_n) \to (a, b)$，则 $a_n \to a$、$b_n \to b$。如果

$a<0$，取误差 $-a/2$，尾部就必须为负，与 $a_n\ge 0$ 矛盾；如果 $a>1$，取误差 $(a-1)/2$，尾部便大于 1，也矛盾。所以 $0\le a\le 1$。对第二坐标重复这个端点论证，得 $0\le b\le 1$。故极限仍在 Q，由序列刻画知 Q 闭。

删去原点后，取点列 $(1/n,0)$。每项均在删去原点的正方形中，且欧氏距离到原点为 $1/n\to 0$，极限却被删去。因此新集合不闭。这一例子说明，无论被删去的点位于边上还是角上，只要原集合中的点列能够趋向它，删去就可能破坏闭性。 ♦

想一想　若只检验集合中所有恒定数列的极限，能否判断闭性？

答　不能。恒定数列的极限就是其唯一取值，所以每个集合都通过这种检验，连非闭集 $(0,1)$ 也通过。序列刻画要求检验所有在环境空间中收敛的列，包括 $1/(n+1)$ 这样的变化数列。若列的值最终落在有限集内，它能提供的极限也只能是该有限集内的点；要发现集合缺失的聚集位置，通常需要使用无限多个不同值。

图 13.3 画出逆向证明中的选点约束：球半径逐次缩小，每一项都必须在对应球内，单有「选到集合里的点」并不能推出收敛。

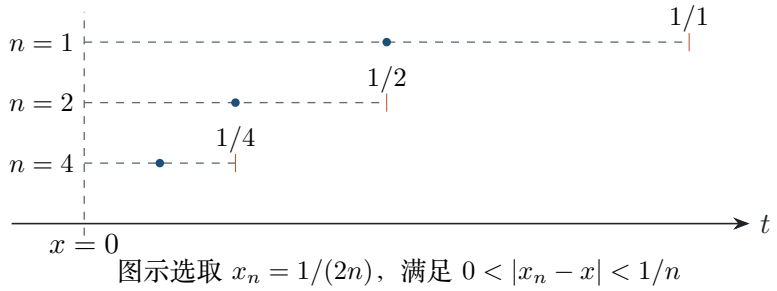


图 13.3　半径 $1/n$ 为第 n 项提供趋于零的距离上界；图中的选点只是这一构造的实轴示例。

图中 $x=0$ 不属于正数集合，选点却可以任意接近它，正好解释了为何开补集失败会产生丢失的极限。在一般空间里不能用左右方向描述接近，改成 $d(x_n,x)<1/n$ 后，选点方法仍然成立。

13.4　闭集的交与并：有限性放在哪里

两个闭区间 $[0,1]$、$[2,3]$ 的并仍然闭；把所有 $[1/n,1]$ 放在一起，却得到 $(0,1]$，缺失了零。为什么任意交没有同样的困难，而无穷并会有？将补集运算写出来，区别就落在上一讲已经证明的开集性质上。

定理 13.6（闭集运算）　任意族闭集的交为闭集；有限个闭集的并为闭集。零个集合的交按 X 处理，零个集合的并按空集处理，这两种边界情形也闭。

思路　将待判断的集合取补，运用 De Morgan 公式，再检查补集成为开集的哪一种运算。任意交的补集是任意并；有限并的补集是有限交。有限性的位置必须跟随这个变换，不能凭记忆调换。

证明　设每个 C_α 闭，则 $X \setminus C_\alpha$ 开。由于

$$X \setminus \bigcap_{\alpha} C_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus C_\alpha),$$

右边是开集的任意并，故开；所以原交集闭。空指标族时右边为空集，这也与结论一致。

若 $C_1, \dots, C_m$ 闭且 $m \geq 1$，则

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C_i = \bigcap_{i=1}^{m} (X \setminus C_i).$$

右边是有限个开集的交，因此开，原有限并闭。零个集合的并为空集，补集为 X，仍然开。 ■

这里没有要求闭集有界。例如 $(-\infty, 0]$ 与 $[1, \infty)$ 都闭，二者的并也闭，却没有被某个有限半径球包含。也没有要求各闭集非空，若其中一个为空，任意交就为空，仍是闭集。定理只在有限并的结论中要求指标有限。

■ **例 13.6　逐项闭，无穷并却不闭**　令 $C_n = [1/n, 1]$，求所有 C_n 的并与交，并分别判断闭性。

解　先注意 C_n 随 n 增大而扩张。若 $0 < x \leq 1$，由阿基米德性质可取 $n \geq 1/x$，使 $1/n \leq x$，于是 $x \in C_n$。反过来，任一 C_n 中的点都满足 $0 < x \leq 1$，因此并集为 $(0, 1]$。它不闭，因为 $1/n$ 是并集中的数列，极限为并集外的零。

交集为 $\{1\}$：由于 $C_1 = \{1\}$，交集只能包含 1，而 1 确实属于每个区间。这个单点集闭。每个有限并 $C_1 \cup \cdots \cup C_N = [1/N, 1]$ 都闭，随着 N 增加的无穷并却不闭。有限阶段保留的左端点可以移动，不能以每个有限阶段都闭来推出无穷并闭。 ♦

■ **例 13.7　有限点集与整数集**　证明任意度量空间中的有限集闭，并证明 $\mathbb{Z}$ 在通常距离的实轴中闭。后一个结论是否能直接从前一个结论取无穷并得到？

解　先证单点 $\{p\}$ 闭。任取 $y \neq p$，取 $r = d(y, p)/2 > 0$，球 $B_r(y)$ 不含 p：否则 $d(y, p) < d(y, p)/2$，矛盾。因此单点的补集开，单点闭。有限集是有限个单点的并，所以闭；空集的情形也已知。

对整数集，任取实轴中收敛的整数数列 $z_n \to z$。该列为柯西列，所以存在 N，使 $m, n \geq N$ 时 $|z_m - z_n| < 1/2$。整数之间的非零距离至少为 1，故尾部全相等于某个整数 k，于是极限 $z = k \in \mathbb{Z}$。由序列刻画，整数集闭。不能直接用单点的无穷并证明，因为闭集的无穷并并无闭性保证；这里必须利用整数之间的统一间隔。 ♦

核心思想　证明闭性有两条互补路线：补集容易描述时，找球或用开集运算；收敛列容易控制时，证明极限留在集合内。选择路线可以简化证明，但两条路线的环境空间必须相同。

13.5　相对空间：开闭判断必须注明在哪里

集合 $(0, 1)$ 在实轴中不开闭两者之一的判断已经熟悉：它开而不闭。如果把环境空间本身取为 $X = (0, 1)$，那么它同时开且闭，因为它就是整个空间。这没有矛盾，两个判断取补集时使用了不同的全集。下面将这种变化写成可以直接计算的公式。

定义 13.7（相对度量与相对开闭）　设 $Y \subseteq X$ 非空，将 X 的度量限制到 $Y \times Y$，所得度量称为相对度量。若 $A \subseteq Y$ 在这个度量下开或闭，就称它在 Y 中相对开或相对闭。

相对球满足 $B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y$。球只收集环境空间里允许的点：例如 $Y = [0,1]$ 时，$B_{1/4}^Y(0) = [0, 1/4)$，虽然作为实轴子集它含左端点，在 Y 中却是开球。因此「形状像半开区间」并不自动阻止相对开性。

定理 13.8（相对开闭的交集表示）　设 $A \subseteq Y \subseteq X$。集合 A 在 Y 中相对开，当且仅当存在 X 中开集 O 使 $A = Y \cap O$。集合 A 在 Y 中相对闭，当且仅当存在 X 中闭集 C 使 $A = Y \cap C$。

思路　相对开性给每个 $a \in A$ 一个相对球；用同样中心半径的环境球取并，构造环境开集。闭性再对 $Y \setminus A$ 应用这个结论并取补。必须区分 Y 内补集与 X 内补集。

证明　若 O 在 X 中开且 $A = Y \cap O$，对每个 $a \in A$，由 $a \in O$ 选 $r > 0$ 使 $B_r^X(a) \subseteq O$。于是 $B_r^Y(a) = Y \cap B_r^X(a) \subseteq Y \cap O = A$，所以 A 相对开。

反过来，若 A 相对开，对每个 $a \in A$ 选 $r_a > 0$，使 $Y \cap B_{r_a}^X(a) \subseteq A$。令 $O = \bigcup_{a \in A} B_{r_a}^X(a)$，则 O 为环境开集。每个 a 属于自己的球，故 $A \subseteq Y \cap O$；而 $Y \cap O$ 中的点落在某个选出的相对球内，故属于 A。所以两集合相等。若 A 为空，取 O 为空即可。

最后，A 相对闭等价于 $Y \setminus A$ 相对开，等价于存在环境开集 O 使 $Y \setminus A = Y \cap O$。在 Y 内取补，得 $A = Y \cap (X \setminus O)$。令 $C = X \setminus O$ 即得所需环境闭集；反向沿上述等价式逆推成立。 ■

■ **例 13.8　同一半开区间的两种身份**　令 $Y = [0,1]$，判断 $A = [0, 1/2)$ 与 $D = [0, 1/2]$ 在 Y 中的开闭性质，再与实轴中的性质比较。

解　用交集表示，$A = Y \cap (-1, 1/2)$，故 A 在 Y 中相对开。它不相对闭：数列 $1/2 - 1/(n+2)$ 的每项都在 A，在 Y 中收敛到 $1/2 \notin A$。在实轴中，A 在 0 处不开，且仍缺失上述极限，所以两者都不是。

$D = Y \cap (-\infty, 1/2]$，所以在 Y 中相对闭。它不相对开：任意半径 $r > 0$，点 $1/2 + \min(r/2, 1/4)$ 属于 Y 内以 $1/2$ 为中心的球，却不属于 D。在实轴中 D 也闭而不开。变化主要发生在环境空间删掉的方向：相对球不再要求包含 0 左侧的点，但在 $1/2$ 的右侧仍有可用的环境点。 ♦

易错提醒　「在子空间中闭」不能推出「在整个空间中闭」。例如 $Y = (0,1)$ 在自身中闭，在实轴中不闭。若额外知道 Y 在 X 中闭，则相对闭集 $A = Y \cap C$ 是两个环境闭集的交，才可推出 A 在 X 中闭。

■ **例 13.9　环境闭性帮助相对闭性向外传递**　设 Y 是 X 的闭子集，且 A 在 Y 中相对闭。证明 A 在 X 中闭；若改为 Y 在 X 中开而 A 在 Y 中相对开，结论如何？

解　第一问可用序列刻画再核对交集公式。若 $a_n \in A$ 且 $a_n \to a \in X$，由 $A \subseteq Y$ 和 Y 的环境闭性，先得 $a \in Y$。相对度量不改变这些点之间的距离，所以同一数列在 Y 中也趋于 a，再由 A 的

相对闭性，得 $a \in A$。因此 A 在 X 中闭。等价地，写 $A = Y \cap C$，其中 C 在 X 中闭，有限交闭立即给出结论。

第二问同样成立：写成 $A = Y \cap O$，其中 O 在 X 中开；因 Y 也开，有限交仍开。直接取球时，先在 X 中找到留在 Y 的半径，再在相对空间找到留在 A 的半径，取二者的最小值。这两种传递都需要中间空间具有相应环境性质，不能省掉这一层检查。 ♦

13.6　开覆盖与有限子覆盖

平面上的方形 $(-1,1)^2$、$(-2,2)^2$、$(-3,3)^2$ 不断扩大。每个平面点最终都会落在某个方形内，但任意有限多个这样的方形合在一起，仍无法铺满整个平面。这里的「每个点能找到一块」与「找到有限多块照顾所有点」有不同的量词次序，值得在正式定义前先分清。

定义 13.9（覆盖、开覆盖与有限子覆盖）　若 $A \subseteq X$，一族子集 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 满足 $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$，则称它为 A 的覆盖（cover）。若每个 U_α 在 X 中开，称为开覆盖（open cover）。若存在有限多个指标 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$，使 $A \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m}$，则所选集合称为一个有限子覆盖（finite subcover）。

这里 U_α 无须包含于 A，它们可以伸到 A 外部；要求的仅是每个 A 中的点至少被一块覆盖。子覆盖中的集合必须从给定族中选出，不能临时加入一个更大集合。空集可以由零个集合覆盖，这个约定与空并为空相符；若 A 非空，有限子覆盖至少需要一个集合。

将定义逐字展开，覆盖条件是：对每个 $x \in A$，存在一个可依赖于 x 的指标 α，使 $x \in U_\alpha$。有限子覆盖则要求：存在一个固定的有限指标表，对每个 $x \in A$，表中至少一个集合包含它。同一张有限表必须适用于所有点。覆盖即使有无穷多块，也可能只需其中一块；一个具体覆盖没有有限子覆盖，才提供真正的反例。

■ **例 13.10　扩大方形覆盖整个平面**　在 $\mathbb{R}^2$ 中令 $U_n = (-n, n) \times (-n, n)$，其中 $n \geq 1$。证明它们构成平面的开覆盖，但不存在有限子覆盖；再证明任意有界集对这个覆盖都有有限子覆盖。

解　先验证每块开。对 $(a,b) \in U_n$，令 $r = \min\{n - |a|, n - |b|\} > 0$。若欧氏距离 $d_2((x,y),(a,b)) < r$，则 $|x - a| < r$、$|y - b| < r$，从而 $|x| < n$、$|y| < n$，点仍在方形内。

任意平面点 (a,b) 都有有限坐标，取整数 $n > \max(|a|, |b|)$ 就得 $(a,b) \in U_n$，所以这些集合确实覆盖平面。若只选有限多个指标 $n_1, \dots, n_m$，令 $N = \max_i n_i$。方形嵌套保证它们的并恰为 U_N；点 $(N+1, 0)$ 不在 U_N，所以该有限选择失败。选择哪几个指标都失败，故没有有限子覆盖。

最后设 A 有界，写 $A \subseteq B_R(c)$，其中 $c = (c_1, c_2)$。对 $(a,b) \in A$，有 $|a| < R + |c_1|$、$|b| < R + |c_2|$。选整数 $n > R + \max(|c_1|, |c_2|)$，就有 $A \subseteq U_n$。因此对这一个指定的覆盖，单独一块已经够用。这个结论尚没有处理任意的开覆盖。 ♦

图 13.4 画出前三块方形及有限选择可能遗漏的位置；有限选取的障碍来自最大指标的存在。

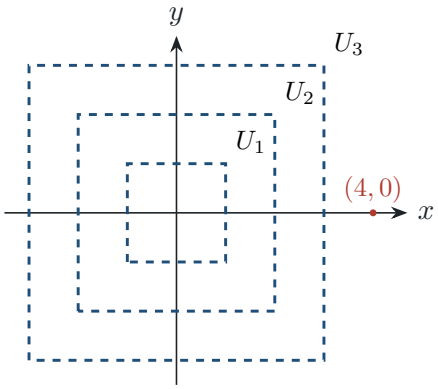


图 13.4　前三个开方形的并仍是 U_3，无法覆盖点 $(4,0)$；一般有限选择同样受最大指标限制。

虚线边界不属于方形，然而本例中的外部见证点甚至与最大方形隔着正距离。因此反例不依赖边界是否包含，而依赖有限多块具有共同的有限大小。下一节的区间例子会显示，有界集合也能发生有限子覆盖失败。

13.7　用一个覆盖否定紧性

开区间 $(0,1)$ 有界，但若覆盖的左端点不断靠近零，要照顾整个区间就不能只取有限多个。这个现象将引出下一讲的紧性。先把给定覆盖的计算做好，再讨论它对集合本身说明什么。

■ **例 13.11　开区间的标准失败覆盖**　在 $A=(0,1)$ 上取 $U_n=(1/n,1)$，$n\ge 1$。证明 $\{U_n\}$ 是 A 的开覆盖，且任何有限子族都不能覆盖 A。

解　每个 U_n 是实轴开集，U_1 为空集，也开。对任意 $x\in(0,1)$，选整数 $n>1/x$，则 $1/n<x<1$，故 $x\in U_n$。所以给定族覆盖 A。

任取非空有限指标表 $n_1,\dots,n_m$，令 $N=\max_i n_i$。区间随指标扩大，故这些集合的并是 $U_N=(1/N,1)$。点 $x_*=1/(2N)$ 满足 $0<x_*<1$，却有 $x_*<1/N$，所以它属于 A 而不属于任何已选集合。零个集合也无法覆盖非空的 A。因此所有有限选择都失败，给定覆盖没有有限子覆盖。

注意，我们没有声称 A 无法被有限多个开集覆盖。一个开集 $(-1,2)$ 就能覆盖它。但该集合不在给定族中，不能用来充当这个覆盖的子覆盖。 ♦

图 13.5 展示 U_2,U_4,U_8 及其有限并遗漏的点。

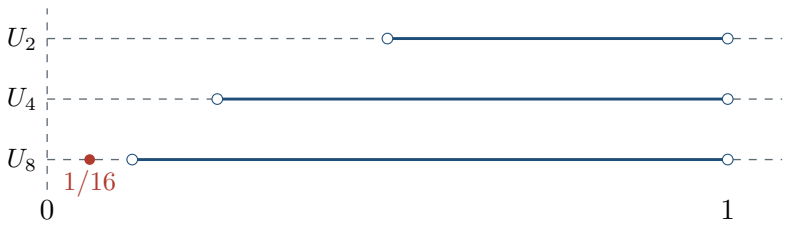


图 13.5　所选三个区间的并为 $U_8=(1/8,1)$，点 $1/16$ 仍未被覆盖；有限选择总能留下类似的正数。

图中未覆盖的位置可以很靠近零，但永远还在集合内。即使原集合不包含零，想覆盖所有正

数仍要处理任意接近零的位置。这也说明「缺失端点」如何通过一个具体开覆盖表现出来。

定义 13.10（紧集的预告）　子集 $K \subseteq X$ 称为**紧集**（compact set），若它的**每一个**开覆盖都有有限子覆盖。其基本定理将在第 14 讲证明。

因此上例已经证明 $(0,1)$ 在实轴中不紧。平面方形覆盖则证明整个欧氏平面不紧。有界性只解决那一族不断扩大的方形覆盖，无法保证所有覆盖都可有限缩减。要否定紧性，只要构造一个失败覆盖；要肯定紧性，必须给出适用于任意开覆盖的论证。

例 13.12　有限集对任意覆盖都可缩减　不用紧性定理，证明有限集都是紧集，并处理空集。

解　给定任意开覆盖 $\{U_\alpha\}$。对每个 x_i，覆盖条件给出一个指标 α_i，使 $x_i \in U_{\alpha_i}$。于是选出的至多 m 块覆盖了整个 K，构成有限子覆盖；重复选到的集合可以删去。由于原覆盖任意，这就证明紧性。空集的任何覆盖都可以缩减成零个集合，所以也紧。这个证明甚至没有用到各块开放，有限集对任意覆盖都具有同样的有限选取性质。 ♦

想一想　如果某个集合有一个覆盖能够缩减为有限子覆盖，能否判断它紧？

答　不能。任何集合都有覆盖 $\{X\}$，且这一覆盖已经有限。若把紧性中的「每一个开覆盖」改成「存在一个开覆盖」，所有子集都会满足，概念就失去区分能力。$(0,1)$ 的覆盖 $\{(-1,2)\}$ 能有限缩减，上面的 $\{(1/n,1)\}$ 却不能，正好同时展示了这两种情况。

核心思想　否定「每个覆盖都能有限选取」的顺序是：先固定一个完整覆盖，再针对任意有限选择构造遗漏点。遗漏点允许依赖所选有限指标；不能只证明某一组有限选择失败。

本讲小结

- C 在 X 中**闭**，当且仅当 $X \setminus C$ 在 X 中开；空集与整个空间同时开且闭。
- 固定 p 时，$|d(p,y) - d(p,z)| \le d(y,z)$；距离函数连续，闭球 $\overline{B}_r(p)$ 为闭集。
- **序列刻画**：C 闭，当且仅当 $x_n \in C$ 且 $x_n \to x \in X$ 总能推出 $x \in C$；它不保证数列有极限。
- 闭集的**任意交、有限并**仍闭；无穷并可能不闭，例如 $\bigcup_{n\ge1}[1/n,1] = (0,1]$。
- 相对球为 $B_r^Y(y) = Y \cap B_r^X(y)$；相对开集写为 $Y \cap O$，相对闭集写为 $Y \cap C$，其中 O 环境开、C 环境闭。
- **有限子覆盖**必须从给定覆盖中选取有限多块；紧性要求每一个开覆盖都能这样缩减，一个失败覆盖足以否定紧性。

练习

13.1 ★　在实轴中判断 $(-\infty,2]$、$\{2\}$、$[0,1)$ 的开闭性质，给出球或补集论证。

13.2 ★ 在离散距离下，求半径 $1/2, 1, 2$ 的开球、闭球，并说明它们的开闭性质。

13.3 ★★ 在欧氏平面取 $p=(0,0)$、闭球半径 3，外部点 $y=(5,0)$。求一个最大可用的外部开球半径，并证明更大半径会碰到原闭球。

13.4 ★★ 证明有限集在任意度量空间中闭。无限点集 $\{1/n : n \ge 1\}$ 在实轴中为何不闭？

13.5 ★★ 求 $C_n = [-1/n, 1-1/n]$ 的并与交，判断二者在实轴中是否闭。

13.6 ★★ 令 $Y=(0,2)$、$A=(0,1]$。判断 A 在 Y 中与在实轴中的开闭性质，并用序列或相对球证明。

13.7 ★★ 设 C 闭、O 开。证明 $C\setminus O$ 闭、$O\setminus C$ 开，指出取补集所用的环境空间。

13.8 ★★★ 设 $F: X\to\mathbb{R}$ 连续、$c\in\mathbb{R}$。用序列刻画证明 $\{x : F(x)\le c\}$ 闭；再证明 $\{x : F(x) > c\}$ 开。

13.9 ★★★ 对 $A=(0,1)$，证明 $V_n=(1/n, 2)$ 构成开覆盖，却无有限子覆盖。若给族中加入 $(-1, 1/2)$，证明新覆盖具有有限子覆盖。

13.10 ★★★ 判断并证明或反驳：(a) 闭集中的每个柯西列收敛；(b) 相对闭集总在环境空间中闭；(c) 一个覆盖有无穷多块就不能有有限子覆盖。

练习答案与提示

13.1 $(-\infty, 2]$ 闭而不开：补集 $(2,\infty)$ 开，但 2 的任意正半径球都含大于 2 的点。单点 $\{2\}$ 闭而不开：补集为两个开射线的并，而任意以 2 为中心的球都有异于 2 的点。$[0,1)$ 既不开也不闭：在 0 处没有内含球；数列 $1-1/(n+1)$ 在集合内收敛到集合外的 1。

13.2 对任意中心 p，半径 $1/2$ 的开球和闭球均为 $\{p\}$；半径 1 的开球为 $\{p\}$，闭球为 X；半径 2 的开球和闭球均为 X。离散空间的每个子集都开且闭，因为每一点都有单点邻域，补集也有同样性质。若空间只有一个点，各个球都等于 X，上述表达仍成立。

13.3 最大可用半径为 $s=5-3=2$。若 $d(z,y)<2$，则 $d(z,p)\ge 5-d(z,y)>3$，所以 $B_2(y)$ 与原闭球不交。若半径 $s>2$，点 $(3,0)$ 到 y 的距离为 $2<s$，同时在原闭球边界上，故二者相交。这同时验证了最大半径确实可取，关键在外部球为开球。

13.4 对单点 $\{p\}$，任取 $y\neq p$，球 $B_{d(y,p)/2}(y)$ 不含 p，故其补集开，单点闭。有限集是有限个单点的并，因此闭；空集也闭。无限点集中的数列 $1/n$ 在实轴中趋于 0，而 0 不在该集合，故不闭。单点闭不能通过任意并推广到无限集。

13.5 并集为 $[-1,1)$：每个区间都包含于此；$-1\le x\le 0$ 时 $x\in C_1=[-1,0]$；$0<x<1$ 时选 $n\ge 1/(1-x)$，便有 $x\le 1-1/n$ 且 $x\ge -1/n$。交集为 $\{0\}$：C_1 排除所有正数，每个负数 x 又被足够大的 $n>-1/x$ 排除，零则属于每个区间。并集不闭，因为 $1-1/n$ 趋于缺失的 1；交集闭，因为单点闭。

13.6 在 Y 中，$A=Y\cap(-\infty,1]$ 相对闭。它不相对开，因为 1 的任意相对球含 $1+\min(r/2,1/2)\in Y\setminus A$。在实轴中 A 不闭：$1/(n+1)$ 趋于缺失的零；它也不开，因为 1 仍没有内含球。相对闭性只保留在 Y 中存在的极限，零不属于 Y。

13.7 全部补集均相对于同一个 X。$C\setminus O=C\cap(X\setminus O)$ 是两个闭集的交，故闭；$O\setminus C=O\cap(X\setminus C)$ 是两个开集的交，故开。不能把差集理解成把有限个端点删掉；此证明不要求集合形状或大小。

13.8 设 x_n 属于该下水平集且 $x_n\to x\in X$。连续性给出 $F(x_n)\to F(x)$。若 $F(x)>c$，取误差 $(F(x)-c)/2$，则尾部 $F(x_n)>(F(x)+c)/2>c$，矛盾。因此 $F(x)\le c$，序列刻画给出闭性。其补集正是

$\{x : F(x) > c\}$，所以开。也可直接取连续性的误差 $(F(x) - c)/2$ 来构造内含球。

13.9 对 $0 < x < 1$，选 $n > 1/x$，便有 $1/n < x < 2$，故各 V_n 覆盖 A。任意非空有限选择取最大指标 N，其并为 $(1/N, 2)$，遗漏 $1/(2N) \in A$，所以无有限子覆盖。加入新区间后，取 $(-1, 1/2)$ 与 $V_3 = (1/3, 2)$ 即可：若 $x < 1/2$，第一块包含它；若 $x \geq 1/2$，则 $x > 1/3$，第二块包含它。两块之间有重叠，因而没有遗漏接点。

13.10 (a) 假。取环境空间 $X = (0, 1)$，它在自身中闭，但 $1/(n+1)$ 是不收敛的柯西列。若额外假设环境空间完备，柯西列先在 X 中有极限，再用闭性保证极限留在闭集中，结论才成立。(b) 假。$Y = (0, 1)$ 在自身中闭，在实轴中不闭；若 Y 环境闭，相对闭性才可借有限交向外传递。(c) 假。实轴上的覆盖 $\{(-n, n) : n \geq 1\}$ 有无穷多块，而对集合 $[-1, 1]$，其中一块 $(-2, 2)$ 已构成有限子覆盖。判断有限可选性时必须同时指定被覆盖集合与给定集合族。

第 14 讲

紧性

Compactness

对应材料：MIT 18.100B Lecture 14 讲义（并参照 Lecture 13 末尾关于覆盖与紧集的部分）；习题集 6 第 5 题，习题集 7 第 1(3)、2 题；参考 Thomson–Bruckner–Bruckner *Elementary Real Analysis* 关于紧集的章节。

本讲目标

(1) 理解开覆盖、有限子覆盖、紧集的定义；会用定义证明一个集合是紧的，也会构造「没有有限子覆盖的开覆盖」说明一个集合不紧。

(2) 掌握「紧集一定闭且有界」的证明，并知道反过来一般不成立：$(0,1)$ 作为自身的度量空间、$C([0,1])$ 中的闭单位球都是反例。

(3) 理解 Heine–Borel 定理：在 $\mathbb{R}^n$ 中，紧 $\iff$ 闭且有界；会用二分法证明闭方体是紧的，并说清证明在哪里用到了实数的完备性。

(4) 掌握嵌套闭集引理和闭球套推论，读懂度量空间版 Bolzano–Weierstrass 定理的证明：紧集中的任何序列都有收敛到该集合中某点的子列。

(5) 会用紧性证明「下确界能取到」一类存在性结论。

14.1 开覆盖与紧集

前几讲反复出现同一个现象。闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数一定有最大值和最小值（第 11 讲）；$[a,b]$ 中的序列一定有收敛子列，而且极限仍在 $[a,b]$ 中（第 7 讲）。把 $[a,b]$ 换成开区间或整条实数轴，这些结论都会失败：$f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 上取不到最大值，序列 $x_n=n$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有收敛子列。

$[a,b]$ 到底特殊在哪里？第 12 讲把舞台从 $\mathbb{R}$ 换成了一般的度量空间 (X,d)。在那里，「区间」「端点」「上确界」都没有意义了，能用的只有距离、球和开集。我们需要一个只用开集来表述的性质，它在 $[a,b]$ 上成立，在 $(0,1)$ 和 $\mathbb{R}$ 上不成立。这个性质就是紧性。第 13 讲末尾已经给出了定义，这一讲把它彻底讲清楚。

定义 14.1（覆盖、开覆盖、有限子覆盖） 设 (X,d) 是度量空间，$A\subseteq X$。一族子集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 如果满足 $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$，就称为 A 的一个**覆盖**（cover）；如果每个 U_α 都是开集，就称为**开覆盖**（open cover）。如果能从中挑出有限个 $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_m}$，使得它们仍然覆盖 A，就说这 m 个集合构成一个**有限子覆盖**（finite subcover）。

指标集 I 可以是任意集合：有限的、可数的（如 $\mathbb{N}$），甚至不可数的（如「对每个 $y \in A$ 取一个球」，指标集就是 A 本身）。

定义 14.2（紧集） 设 (X,d) 是度量空间，$A \subseteq X$。如果 A 的每一个开覆盖都有有限子覆盖，就称 A 是**紧集**（compact set）。若 X 本身是紧集，就称 (X,d) 是**紧度量空间**（compact metric space）。

直观理解 有限集的每个点都可以选一个包含它的开集，有限个选择已经覆盖全体。无限集没有这种逐点选取的保证：每个点各选一个，可能需要无限多个。紧性要求每个开覆盖最终都能由有限个原有成员覆盖全体。这种有限性使后面的证明能够取有限个下标的最大值、有限个正半径的最小值。

按定义，证明「A 紧」要对付所有开覆盖；证明「A 不紧」只要举出一个没有有限子覆盖的开覆盖。先看后一种。

例 14.1　$(0,1)$ 不紧　在 $\mathbb{R}$ 中，令 $U_n = (\frac{1}{n}, 1)$，$n = 2,3,4,\ldots$。证明 $\{U_n\}$ 是 $(0,1)$ 的开覆盖，但没有有限子覆盖。

解　*是开覆盖。*每个 U_n 是开区间，是 $\mathbb{R}$ 中的开集。任取 $x \in (0,1)$，由阿基米德性质（第 4 讲）存在整数 $n \geq 2$ 使 $\frac{1}{n} < x$，于是 $x \in U_n$。所以 $(0,1) \subseteq \bigcup_{n\geq 2} U_n$。

*没有有限子覆盖。*任取有限个 $U_{n_1}, \ldots, U_{n_m}$，令 $N = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$。因为 $n \leq N$ 时 $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{N}$，有 $U_n \subseteq U_N$，所以

$$U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_m} = U_N = \left(\tfrac{1}{N}, 1\right).$$

点 $\frac{1}{2N}$ 属于 $(0,1)$，却不属于 $(\frac{1}{N}, 1)$。所以这 m 个集合盖不住 $(0,1)$。例如选 U_2, U_3, U_6，并集是 $(\frac{1}{6}, 1)$，点 $\frac{1}{12}$ 没被盖住。 ♦

问题出在左端点：覆盖中的集合越来越靠近 0，但 0 本身不在 $(0,1)$ 里，没有哪个集合能「一次盖住 0 附近的全部」。下面的例子说明，把 0 补进来，情况就完全不同。

例 14.2　收敛序列连同极限是紧的　在 $\mathbb{R}$ 中，令 $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$，$K' = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$。证明 K 是紧集，而 K' 不是。

解　*K 是紧集。*任取 K 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$。因为 $0 \in K$，有某个 U_{α_0} 含有 0。U_{α_0} 是开集，所以存在 $\varepsilon > 0$ 使 $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$。由阿基米德性质取 N 使 $\frac{1}{N} < \varepsilon$，则对一切 $n \geq N$，$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$，所以 $\frac{1}{n} \in U_{\alpha_0}$。

一个集合就盖住了 0 和从第 N 项起的全部点。剩下的只有有限个点 $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{N-1}$。对每个 $k = 1, \ldots, N-1$，取一个含 $\frac{1}{k}$ 的 U_{α_k}。于是 $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_{N-1}}$ 这 N 个集合覆盖 K。开覆盖是任取的，所以 K 是紧集。

具体看一次：若 $U_{\alpha_0} \supseteq (-0.3, 0.3)$，则 $N = 4$ 就够了（$\frac{1}{4} = 0.25 < 0.3$），剩下的点是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$，再补 3 个集合，共 4 个（图 14.1 下半）。

K' 不是紧集。相邻两点的距离是 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$。取 $\delta_n = \frac{1}{2n(n+1)}$，令 $U_n = (\frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n)$。当 $n \geq 2$ 时，数列 $1/m$ 严格递减，离 $1/n$ 最近的其他两点是相邻项；它们到 $1/n$ 的距离为 $\frac{1}{n(n+1)}$ 和 $\frac{1}{(n-1)n}$，都大于 δ_n。当 $n = 1$ 时只有邻点 $1/2$，距离 $1/2 > \delta_1 = 1/4$。所以 $U_n \cap K' = \{\frac{1}{n}\}$：每个开集恰好只盖住 K' 的一个点。$\{U_n\}_{n\geq 1}$ 是 K' 的开覆盖，而任意有限个 U_n 只盖住有限个点，盖不住无限集 K'。 ♦

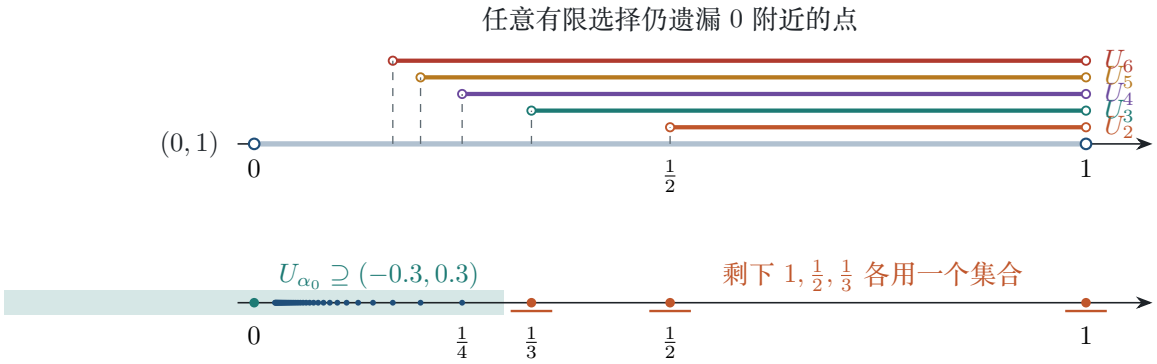


图 14.1　上：$U_n = (\frac{1}{n}, 1)$ 覆盖 $(0,1)$，但任意有限个的并都是某个 $(\frac{1}{N}, 1)$，左端总留下缺口。下：$K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}$ 中，盖住 0 的开集（青色）同时盖住了从 $\frac{1}{4}$ 起的所有点，只剩有限个点要处理。

想一想　(1) 有限集是紧集吗？空集呢？(2) $\mathbb{N}$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集是紧集吗？

答　(1) 都是。设 $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$，任给开覆盖，对每个 a_i 选一个含它的集合，得到 m 个集合的子覆盖。空集被零个集合覆盖，任何开覆盖都有有限子覆盖。(2) 不是。开区间 $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$，$n \in \mathbb{N}$，构成 $\mathbb{N}$ 的开覆盖，每个区间只含一个自然数，有限个区间只盖住有限个自然数。

易错提醒　定义中的量词是「每一个开覆盖都有有限子覆盖」。常见的两个错误：

- 只验证了某一个开覆盖有有限子覆盖，就断言集合是紧的。任何集合 A 都有开覆盖 $\{X\}$，它本身就是有限的，什么也说明不了。
- 用不是开集的集合去覆盖，然后说「没有有限子覆盖，所以不紧」。比如 $[0,1]$ 被单点集 $\{x\}$（$x \in [0,1]$）覆盖，没有有限子覆盖，但单点集在 $\mathbb{R}$ 中不是开集，这不构成反例。$[0,1]$ 是紧的（§14.4）。

14.2　紧集闭且有界，反之不然

14.2.1　紧集一定闭且有界

定理 14.3　设 (X, d) 是度量空间，$A \subseteq X$ 是紧集。则 A 是闭集，并且有界。

回忆两个概念（第 12、13 讲）：A 有界（bounded）是指 A 含于某个球 $B_r(x) = \{\, y \mid d(x,y) < r \,\}$；

A 是**闭集**（closed set）是指补集 $X \setminus A$ 是开集。

思路　两个结论都是「选一个好的开覆盖，取有限子覆盖，再用有限性」。有界：用以 A 中各点为心的单位球覆盖 A，有限个球心之间的距离有最大值，由三角不等式可界住各球的并。闭：任取 $x \notin A$，用「离 x 远于 $\frac{1}{n}$ 的点」组成的开集覆盖 A；它们一个套一个，有限子覆盖等于其中最大的一个，于是 A 整个落在离 x 远于某个 $\frac{1}{N}$ 的地方，x 有一个小球与 A 不相交。

证明　若 $A = \varnothing$，则 A 已有界，且补集 X 是开集；以下设 $A \neq \varnothing$。

有界。$\{B_1(y)\}_{y\in A}$ 是 A 的开覆盖（$y \in B_1(y)$，且球是开集）。由紧性，有有限个 $y_1, \dots, y_m \in A$ 使 $A \subseteq B_1(y_1) \cup \cdots \cup B_1(y_m)$。令

$$r = 1 + \max_{1\le i\le m} d(y_1, y_i).$$

任取 $z \in A$，则 $z \in B_1(y_i)$ 对某个 i 成立，由三角不等式

$$d(z, y_1) \le d(z, y_i) + d(y_i, y_1) < 1 + \max_j d(y_1, y_j) = r.$$

所以 $A \subseteq B_r(y_1)$，A 有界。

闭。要证 $X \setminus A$ 是开集。任取 $x \in X \setminus A$，对 $n \ge 1$ 令

$$O_n = \{\, y \in X \mid d(x, y) > \tfrac{1}{n} \,\}.$$

第 13 讲证明过这样的集合是开集。对任意 $y \neq x, d(x, y) > 0$，由阿基米德性质有 n 使 $d(x, y) > \frac{1}{n}$，所以 $\bigcup_n O_n = X \setminus \{x\}$。因为 $x \notin A$，$\{O_n\}$ 是 A 的开覆盖。由紧性，有限个 $O_{n_1}, \dots, O_{n_m}$ 覆盖 A。又 $O_1 \subseteq O_2 \subseteq \cdots$，令 $N = \max n_i$，这些集合的并就是 O_N，所以 $A \subseteq O_N$：每个 $y \in A$ 都满足 $d(x, y) > \frac{1}{N}$。这说明 $B_{1/N}(x) \cap A = \varnothing$，即 $B_{1/N}(x) \subseteq X \setminus A$。$x$ 是任取的，所以 $X \setminus A$ 是开集。 ■

虽然闭且有界一般不足以推出紧性，紧集中的闭子集却仍然紧。下面先证明这个结论，后面证明 Heine–Borel 定理时会用到。

> **命题 14.4**　设 A 是度量空间 X 中的紧集，$C \subseteq A$ 是 X 中的闭集。则 C 是紧集。

证明　任取 C 的开覆盖 $\{O_\alpha\}$。C 闭，所以 $X \setminus C$ 是开集。$\{O_\alpha\}$ 再添上 $X \setminus C$，就覆盖了 A。由 A 的紧性，有有限个 $O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_m}$（也许还要加上 $X \setminus C$）覆盖 A。$X \setminus C$ 不含 C 中任何点，而 $C \subseteq A$，所以 $C \subseteq O_{\alpha_1} \cup \cdots \cup O_{\alpha_m}$。 ■

■ **例 14.3　有限并保持紧性**　若 K_1, K_2 是同一度量空间中的紧集，证明 $K_1 \cup K_2$ 紧。由此判断 $[-2, -1] \cup [1, 3]$ 的紧性。

解　同一个开覆盖分别覆盖 K_1 和 K_2。由紧性，为 K_1 选出有限个成员，为 K_2 再选出有限个成员。两组并起来仍是有限个，而且覆盖 $K_1 \cup K_2$。因此有限并紧；归纳可得任意有限个紧集的并紧。

两个闭区间各自紧，因此 $[-2,-1]\cup[1,3]$ 也紧。它虽不连成一段，却不影响紧性。后面还可以用 Heine–Borel 判定：它闭且有界，绝对值不超过 3。 ♦

无限并没有同样保证：$\mathbb{R}=\bigcup_{n\geq 1}[-n,n]$ 的每个成员都紧，整个并却无界，因而不紧。这里得到的是可数个有限子族，合起来可能有无穷多个成员，不能当成有限子覆盖。

14.2.2 闭且有界不一定紧

定理 14.3 的逆命题「闭且有界 ⇒ 紧」在 $\mathbb{R}^n$ 中成立（§14.4），但在一般度量空间中不成立。最简单的反例来自「换一个度量空间」。

■ **例 14.4**　**$(0,1)$ 作为自身的度量空间**　令 $X=(0,1)$，$d(x,y)=|x-y|$。证明 X 作为自身的子集是闭的、有界的，但不是紧的。

解　闭。$X\setminus X=\varnothing$ 是开集，所以 X 是 X 的闭子集。（任何度量空间都是自身的闭子集，第 13 讲。）

有界。取 $x=\frac{1}{2}$。对任意 $y\in(0,1)$，$|y-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}<1$，所以 $X\subseteq B_1(\frac{1}{2})$。

不紧。令 $U_n=(\frac{1}{n},1)$，$n\geq 2$。在度量空间 X 中 U_n 是开集：对 $y\in U_n$，取 $s=\min\{y-\frac{1}{n},\,1-y\}>0$，则 X 中以 y 为心、s 为半径的球含于 U_n。剩下的论证与例 14.1 完全一样：$\{U_n\}$ 覆盖 X，任意有限个的并是某个 $(\frac{1}{N},1)$，漏掉了 $\frac{1}{2N}\in X$。 ♦

注 14.1　「闭」依赖于周围的大空间，「紧」不依赖。$(0,1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中不闭（$\frac{1}{n}\to 0\notin(0,1)$），在它自己里面却是闭的。紧性则不同：可以证明，$A\subseteq X$ 作为 X 的子集是紧的，当且仅当 A 作为度量空间 (A,d) 本身是紧的（原因是 A 中的开集恰好是 X 中开集与 A 的交）。所以 $(0,1)$ 无论放在哪里都不紧。这也是为什么一般度量空间里「闭且有界」不够：闭性可以靠「把空间缩小」免费得到，紧性不行。

14.3　一个更有启发性的反例：$C([0,1])$ 中的闭单位球

例 14.4 中，闭性依赖环境空间的选择。下面考察函数空间中的闭单位球：即使空间本身完备（习题集 7 第 5 题将证明），闭且有界仍然不足以保证紧性。

回忆第 12 讲：$C([0,1])$ 是 $[0,1]$ 上全体连续函数的集合，距离为

$$d(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

由最值定理（第 11 讲），$|f-g|$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，最大值能取到，所以 d 有定义；三角不等式是习题集 6 第 1 题。$d(f,g)<r$ 的意思是：g 的图像整个落在 f 的图像上下宽 r 的「带子」里。记 $\mathbf{0}$ 为恒等于 0 的函数。

对 $n \geq 1$，定义

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n+1}, \\ 1 - n(n+1)\left(x - \dfrac{1}{n+1}\right), & \dfrac{1}{n+1} \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

f_n 在 $[0, \frac{1}{n+1}]$ 上恒为 1，在 $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 上从 1 线性降到 0（斜率 $-n(n+1)$），之后恒为 0（图 14.2）。

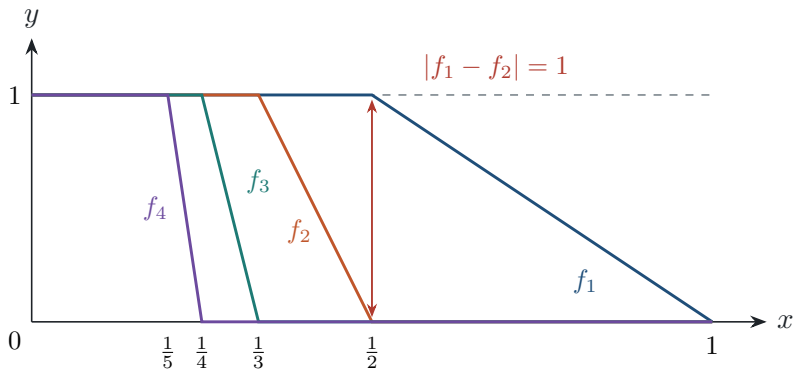


图 14.2　函数 f_1, f_2, f_3, f_4。每个 f_n 的「台阶」在 $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 上从 1 降到 0。在 $x = \frac{1}{2}$ 处 $f_1 = 1$、$f_2 = 0$（红色箭头），所以 $d(f_1, f_2) = 1$。

从图 14.2 可见，每个 f_n 的值都在 $[0,1]$ 中，所以 $\|f_n\|_\infty = 1$，特别地 $f_n \in \overline{B}_1(\mathbf{0})$。但这列函数在最大距离下彼此分开：若 $m < n$，在 $x = 1/(m+1)$ 处有 $f_m(x) = 1$、$f_n(x) = 0$，故

$$d(f_m, f_n) = 1.$$

半径不超过 $1/2$ 的开球至多含有一个 f_n。事实上，若 f_m, f_n 同在 $B_{1/2}(g)$，三角不等式给出 $d(f_m, f_n) < 1$，与上式矛盾。

命题 14.5　在 $C([0,1])$ 的最大距离度量下，闭单位球 $A = \overline{B}_1(\mathbf{0})$ 是闭且有界的，但不是紧集。

证明　闭球是闭集，且 $A \subseteq B_2(\mathbf{0})$，所以 A 闭且有界。考虑以 A 中每个函数 g 为球心、半径 $1/2$ 的开球族 $\{B_{1/2}(g) : g \in A\}$。它覆盖 A。若有有限子覆盖，每个球至多含一个 f_n，有限个球便至多覆盖有限多个 f_n；但 A 含有全部 f_n，矛盾。因此 A 不紧。 ■

这说明「有界」只限制每个函数离零函数多远，并不阻止球内出现彼此相隔固定距离的无限多个函数。稍后证明的 Heine–Borel 定理依赖有限维欧氏空间的结构，不能直接搬到任意度量空间。

想一想　上面的 f_n 是否可能有柯西子列？若只看每个固定的 $x>0$，又会发生什么？

答　没有柯西子列：不同项之间的距离恒为 1，柯西条件取 $\varepsilon=1/2$ 就失败。可是固定 $x>0$ 后，当 $n>1/x$ 时已有 $f_n(x)=0$；在 $x=0$ 则始终为 1。逐点考察得到的极限在 0 处不连续，不能作为 $C([0,1])$ 中的极限函数。最大距离要求整条图像同时接近；本讲的反例已经显示出这一区别，第 20 讲将给出两种收敛的正式定义。

■ **例 14.5　标准基向量没有收敛子列；习题集 7 第 1(3) 题**　在平方可和序列空间 ℓ^2 中，取 $e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$，其中 1 在第 n 个位置。距离为 $d(a,b)=\sqrt{\sum_{j\ge1}(a_j-b_j)^2}$。证明 (e_n) 有界，却没有收敛子列。

解　每个 e_n 到零向量的距离是 1，所以序列落在闭单位球内。若 $m\neq n$，差 e_m-e_n 恰有两个非零坐标，一个为 1，另一个为 -1，故

$$d(e_m,e_n)^2=1^2+(-1)^2=2.$$

任何子列的两项之间仍相距 $\sqrt{2}$。取柯西条件中的 $\varepsilon=1$，无论下标多大，任取两项都不满足距离小于 1，所以没有柯西子列。收敛子列一定是柯西列，故也没有收敛子列。 ♦

这个例子与折线函数的作用相同：有界不保证能把无限多个对象压在彼此越来越近的位置。两两距离有统一正下界，直接阻止了柯西子列。关键几何信息是精确的距离 $\sqrt{2}$：任取有限多项，它们都位于单位球面上，互相之间始终保持相同的正距离。

14.4　Heine–Borel 定理

在实数轴上，「闭且有界」恰好能刻画紧集；平面和更高维欧氏空间也一样。先从一个闭方体开始：覆盖它的开集可以形状任意，证明不能依赖覆盖的具体形状。

定理 14.6（Heine–Borel 定理）　集合 $K\subseteq\mathbb{R}^n$（取欧氏度量）紧，当且仅当 K 闭且有界。

思路　紧推出闭且有界已在定理 14.3 证明。反方向先证明闭方体紧：若某开覆盖没有有限子覆盖，就不断把方体二分，选出仍不能有限覆盖的子方体。边长趋于零，完备性给出唯一共同点；覆盖这个点的开集最终会盖住整个小方体，产生矛盾。任意闭且有界集是某个闭方体中的闭子集，再用命题 14.4。

证明　只证「闭且有界推出紧」。先证闭方体 $Q=\prod_{j=1}^n[a_j,b_j]$ 紧。令 $J=\{j:a_j<b_j\}$，$m=|J|$。若 $m=0$，Q 是单点，任意开覆盖中取一个含该点的集合即可。以下只二分 J 中的正长度边，退化坐标保持固定。

反设 Q 有一个开覆盖 $\mathcal{U}$，却没有有限子覆盖。把每条正长度边二等分，得到 2^m 个闭子方体，它们仍覆盖 Q。若它们全都能被 $\mathcal{U}$ 的有限子族覆盖，这些子覆盖合起来就是 Q 的有限子覆盖；故至少有一个子方体仍不能被有限覆盖。继续二等分并每次选择这样的子方体，得到嵌套闭方体 $Q_1\supseteq Q_2\supseteq\cdots$，且每个 Q_k 都不能被 $\mathcal{U}$ 的有限子族覆盖。

第 j 个坐标投影给出嵌套闭区间，长度为 $(b_j-a_j)2^{-k}$。由实数完备性，所有这些区间有唯一共同坐标 x_j。令 $x=(x_1,\dots,x_n)$，则 $x\in Q_k$ 对每个 k 成立，且 x 是这些方体的唯一共同点。图 14.3 用单位正方形画出前三步；真正的证明对任意 n 维闭方体完全相同。

因为 $\mathcal{U}$ 覆盖 Q，有 $U\in\mathcal{U}$ 含 x。U 在 $\mathbb{R}^n$ 中开，故存在 $r>0$ 使 $B_r(x)\subseteq U$。方体 Q_k 的直径至多 $2^{-k}\sqrt{\sum_{j=1}^n(b_j-a_j)^2}$，当 k 足够大时小于 r。又 $x\in Q_k$，所以 $Q_k\subseteq B_r(x)\subseteq U$。这使 Q_k 可由单个覆盖集覆盖，矛盾。故 Q 紧。

现在设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$ 闭且有界。取足够大的 $M>0$ 使 $K\subseteq[-M,M]^n=Q$。闭方体 Q 紧；K 是 Q 的闭子集，因此由命题 14.4，K 紧。 ∎

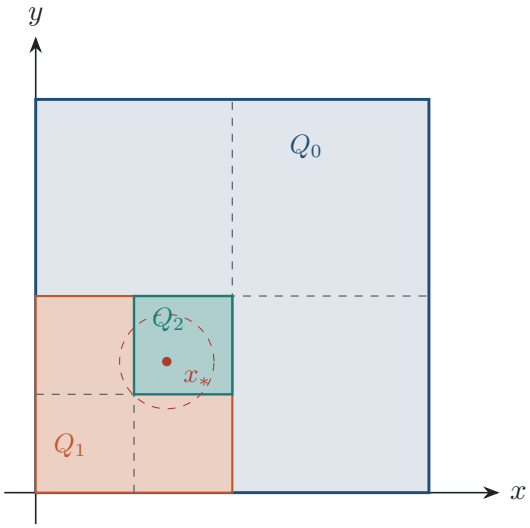


图 14.3　反复二分并保留不能有限覆盖的子方体，边长趋于零，唯一共同点 x 的某个覆盖邻域最终会包含整个小方体。

图示取 $Q_1=[0,1/2]^2$、$Q_2=[1/4,1/2]^2$，并以 $x_*=(1/3,1/3)$ 示意以后嵌套方体的共同点。图中只画出前两次选择；若继续选包含 x_* 的二分小方体，其交集就是该点。证明实际每一步都由给定开覆盖决定要保留哪个子方体。若去掉有限维坐标结构，或把闭方体换成一般度量空间中的闭有界集，二分步骤就没有对应对象；函数空间中的闭单位球正是这种失败的例子。

例 14.6　用 Heine–Borel 快速判定　判断 $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 4\}$ 是否紧，并找出一个包含它的方体。

解　K 是连续函数 $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ 的闭子水平集，因此闭；由 $x^2\le 4$、$y^2\le 4$ 得 $K\subseteq[-2,2]^2$，所以有界。Heine–Borel 定理给出 K 紧，且 $[-2,2]^2$ 是所求包含方体。边界圆也包含在 K 中，因为不等式是非严格的。 ♦

想一想　在 $\mathbb{R}^2$ 中，开圆盘 $B_2((0,0))$ 有界但不闭。哪一个极限点被漏掉？

答　圆周上的点被漏掉，例如 $(2,0)$。序列 $(2-1/n,0)$ 都在开圆盘中，却收敛到 $(2,0)$。因此不能用 Heine–Borel 的「闭且有界」方向断言开圆盘紧。

14.5　紧性带来的序列结论

紧性定义用开覆盖表述，数列收敛则用距离表述。下面两条结果把这两种语言连接起来：紧空间中的嵌套闭集不能一直缩到空集，直径不断变小的嵌套闭球最终只留下一个点。

引理 14.7（紧空间中的嵌套闭集引理）　设 X 是紧度量空间，$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$ 是非空闭集。则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$。

证明　反设交集为空。令 $O_n = X \setminus C_n$，则每个 O_n 开，且 $\bigcup_n O_n = X$。由紧性有有限子覆盖 $O_{n_1}, \dots, O_{n_m}$。令 $N = \max_i n_i$。由于 O_n 递增，这些集合的并包含于 O_N，所以 $O_N = X$，即 $C_N = \varnothing$，与假设矛盾。 ■

有限子覆盖在这里强迫某一个补集 O_N 已经等于整个空间。若没有紧性，就可能有递增开集逐渐填满空间，却没有任何一个单独填满；例如 $O_n = (-n, n)$ 覆盖 $\mathbb{R}$，但任意有限多个仍有界。

推论 14.8（闭球套）　设 X 是紧度量空间，$\overline{B}_{r_n}(x_n)$ 是一列非空闭球，满足

$$\overline{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq \overline{B}_{r_n}(x_n), \qquad r_n \to 0.$$

则这些闭球的交集恰好是一个点。

证明　每个闭球是闭集，且各球非空并嵌套。由引理 14.7，交集非空。若 x, y 都在交集中，则对每个 n，

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y) \le 2r_n.$$

令 $n \to \infty$ 得 $d(x, y) = 0$，所以 $x = y$。交集恰有一个点。 ■

闭球套的非空交集来自紧性，交集至多一个点则来自半径趋零。图 14.4 把一维情形画成嵌套闭区间；高维或一般度量空间里，唯一性仍由三角不等式给出。

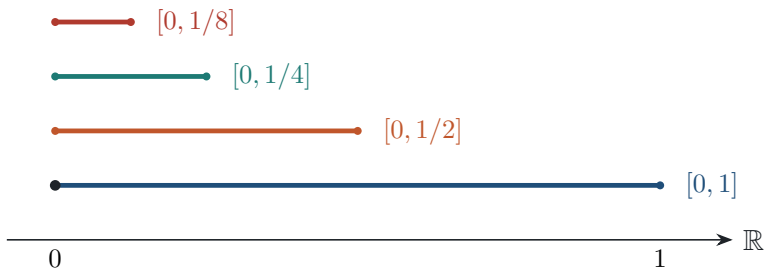


图 14.4　区间 $[0, 2^{-k}]$ 逐层嵌套，交集为单点 $\{0\}$。

例如 $I_n = [0, 2^{-n}]$（$n \ge 0$）是紧区间 $[0, 1]$ 中的嵌套非空闭集。每一级都保留 0，而右端点趋于 0，故 $\bigcap_{n \ge 0} I_n = \{0\}$。这里的闭球套结论适用于中心和半径都变化的情形。

定理 14.9（紧集的 Bolzano–Weierstrass 性质）　设 (X,d) 是度量空间，$A\subseteq X$ 紧。则 A 中任意序列都有一个收敛子列，且子列极限属于 A。

思路　反复用有限覆盖把「无穷多项」压进直径趋零的闭集。闭集仍紧，因此每一步都能继续；嵌套闭集引理给出共同极限点，再从各层依次挑出下标递增的项。

证明　设原序列为 (x_n)。令 $F_0=A$，其中有无穷多个序列项（按下标计数）。假设已构造紧集 $F_{k-1}\subseteq A$，其中仍有无穷多个 x_n。以各 $y\in F_{k-1}$ 为中心、半径 2^{-k} 的开球覆盖 F_{k-1}。紧性给出有限子覆盖；若每个球只含有限多个这些序列项，有限并也只含有限多个，与假设矛盾。因此可选一个球 $B_{2^{-k}}(y_k)$，其中有无穷多个落在 F_{k-1} 的序列项。令

$$F_k=F_{k-1}\cap\overline{B}_{2^{-k}}(y_k).$$

那么 F_k 含有无穷多个序列项，且是紧集 F_{k-1} 的闭子集，故仍紧。它们嵌套，且 $\operatorname{diam}(F_k)\le 2^{1-k}$。

由引理 14.7，交集 $\bigcap_{k\ge0}F_k$ 非空。若 x,y 都在交集中，则 $d(x,y)\le\operatorname{diam}(F_k)\to0$，所以交集只有一点，记作 $x_*\in A$。逐级从 F_k 中的序列项选出 x_{n_k}，使 $n_k>n_{k-1}$。固定 k 后，对所有 $j\ge k$，嵌套性给出 $x_{n_j},x_*\in F_k$，从而

$$d(x_{n_j},x_*)\le\operatorname{diam}(F_k)\le 2^{1-k}.$$

给定 $\varepsilon>0$，取 k 使 $2^{1-k}<\varepsilon$，则 $j\ge k$ 时 $d(x_{n_j},x_*)<\varepsilon$。因此 (x_{n_k}) 收敛到 $x_*\in A$。 ■

这里每次取有限子覆盖后，至少一个小球仍含有无穷多项；否则有限个有限集的并只能含有限多项。这个计数论证保证构造能无限继续。

■ **例 14.7　嵌套结论的条件缺一不可**　分别去掉「闭」「紧」「直径趋零」，嵌套集合是否仍有唯一共同点？

解　去掉闭性：在紧空间 $[0,1]$ 中，$C_n=(0,1/n)$ 非空、嵌套，直径趋零，但交集为空。若 $x>0$，选 $n>1/x$ 便有 $x\notin C_n$；0 又从来不在其中。

去掉紧性：在 $\mathbb{R}$ 中，$C_n=[n,\infty)$ 非空、闭、嵌套，但交集为空。任何实数 x 都小于某个自然数 n，因而不属于这个 C_n。此例说明一般嵌套闭集引理里的紧性不能直接删掉。

去掉直径趋零：在紧空间 $[0,1]$ 中，取 $C_n=[0,1]$。交集仍为 $[0,1]$，含无穷多个点。紧性保证存在共同点；要得到唯一性，还需直径趋零。 ♦

从有限子覆盖到极限点　先保证每一层都含有无穷多个序列项，再把每一层做成闭集并保持嵌套，最后让直径趋零。这三个要求分别解决：子列能继续选、极限点确实存在、子列确实收敛到这个点。

14.6　用紧性证明最小值存在

对 $K=\{0\}\cup\{1/n:n\ge1\}$ 和给定实数 p，到 p 最近的点在哪里？逐点检查无限多个距离很麻烦；紧性允许先证明最近点存在，再利用具体形状计算。这个例子也解释了为什么优化问题总

要检查约束集合是否闭且有界。

命题 14.10（紧集上的最近点）　设 K 是度量空间 X 中的非空紧集，$p \in X$。则存在 $x_* \in K$，使

$$d(p, x_*) = \inf_{x \in K} d(p, x).$$

思路　下确界不一定是集合中的值，但总能选取越来越接近它的值。先选一列近似最小点，再用紧性抽收敛子列。距离函数的变化不超过点之间的距离，这保证子列极限真正取到下确界。

证明　集合 $\{d(p,x) : x \in K\}$ 非空且以 0 为下界，故有下确界 $a \geq 0$。由下确界的定义，对每个 n 可以选 $x_n \in K$ 满足

$$a \leq d(p, x_n) < a + 1/n.$$

否则 $a + 1/n$ 会是比 a 更大的下界。紧性与定理 14.9 给出子列 $x_{n_k} \to x_* \in K$。由反三角不等式，

$$|d(p, x_{n_k}) - d(p, x_*)| \leq d(x_{n_k}, x_*) \to 0.$$

一方面 $d(p, x_{n_k}) \to a$，另一方面它趋于 $d(p, x_*)$，极限唯一性给出 $d(p, x_*) = a$。 ■

■ **例 14.8　最近点与缺失端点**　令 $K = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$。求 $p = 2$ 到 K 的最小距离，以及 $p = 1/2$ 到 K 的最小距离。若把约束集合换成 $(0, 1]$、取 $p = -1$，下确界还能取到吗?

解　K 非空且紧，所以两个最小值都存在。$K \subseteq [0,1]$ 且 $1 \in K$，故对 $p = 2$，有 $|2 - x| = 2 - x \geq 1$，等号恰在 $x = 1$ 取得。对 $p = 1/2$，该点本身属于 K，最小距离为 0，最近点就是 $1/2$。

对 $(0, 1]$ 和 $p = -1$，任意可行点 x 都满足 $|x + 1| = 1 + x > 1$，但 $x_n = 1/n$ 给出距离 $1 + 1/n \to 1$。因此距离的下确界为 1，却没有任何可行点取到。缺失的点正是 0。集合有界而不闭，紧性条件失败。 ♦

图 14.5 展示「距离无限接近最优值」和「最优值被某点取到」的差别。

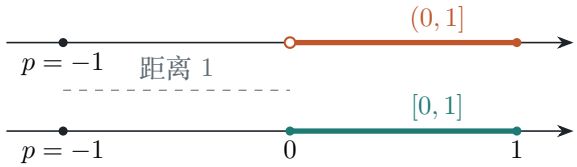


图 14.5　同一个下确界 1：上方约束集合漏掉端点 0，下方紧集保留端点并取到最小距离。

图中上下两个集合有相同的距离下确界；下方保留的端点使下确界成为实际可取的值。最近点的存在性来自紧性，至于最近点是否唯一，还需要额外条件，例如 $K = \{-1, 1\}$、$p = 0$ 就有两个最近点。

本讲小结

- A 紧的定义是：A 的每个开覆盖都存在有限子覆盖。证不紧只需找到一个反例覆盖。
- 若 A 在度量空间中紧，则 A 闭且有界，且 A 的闭子集仍紧。
- 在 $\mathbb{R}^n$ 中，K 紧当且仅当 K 闭且有界；这是有限维的 Heine–Borel 定理。
- 紧度量空间中的嵌套非空闭集交集非空；若嵌套闭球半径趋于 0，交集恰为一点。
- 紧集中的任意序列有收敛子列，极限仍属于该紧集。
- 非空紧集 K 中存在到给定点 p 的最近点：某个 $x_* \in K$ 满足 $d(p,x_*)=\inf_{x\in K} d(p,x)$。

练习

14.1 ★ 证明有限集（包括空集）是紧集。

14.2 ★ 证明 $[0,1)$ 不紧，明确给出一个开覆盖和任意有限子族遗漏的点。

14.3 ★★ 令 $K=\{0\}\cup\{1/n : n\ge 1\}$。证明 K 紧，并说明删掉 0 后集合不紧。

14.4 ★★ 设 K_1,K_2 紧。证明 $K_1\cup K_2$ 紧；举例说明把「有限并」改成「可数并」后结论可能失败。

14.5 ★★ 在 $K=\{0\}\cup\{1/n : n\ge 1\}$ 中，求 2 的最近点及距离；再求 -1 到 $(0,1]$ 的距离下确界，并判断是否取到。

14.6 ★★ 证明 $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$ 紧。这个集合有界于哪个闭方体?

14.7 ★★★ 设 K 紧，A_j 闭，且对每个 m，$K\cap\bigcap_{j=1}^{m} A_j\neq\varnothing$。证明 $K\cap\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\neq\varnothing$；说明去掉紧性后结论可失败。

14.8 ★★★ 设序列 (x_n) 在度量空间中没有收敛子列，$E=\{x_n : n\ge 1\}$。证明每个 x_k 都有半径 $r_k>0$，使 $B_{r_k}(x_k)\cap E=\{x_k\}$。提示：先处理重复项，再反证。

14.9 ★★★ 设 K 是度量空间中的非空紧集，$p\in X$。证明 $d(p,x)$ 在 K 上取得最小值，并判断对 $K=(0,1]$、$p=0$ 时结论是否成立。

练习答案与提示

14.1 任给有限集 $F=\{x_1,\dots,x_m\}$ 的开覆盖，对每个 x_j 选一块包含它的开集，至多 m 块便覆盖 F。空集由零块覆盖，故也紧。这里必须从任意给定覆盖中选取。

14.2 取实轴开集 $U_n=(-1,1-1/n)$，$n\ge 2$。任意 $x\in[0,1)$ 都满足 $1/n<1-x$ 对某个充分大的 n 成立，故属于某个 U_n。有限选取令最大指标为 N，其并为 U_N，遗漏点 $1-1/(2N)\in[0,1)$，所以不紧。

14.3 任给覆盖，含 0 的成员含某个 $(-\varepsilon,\varepsilon)$。取 N 使 $1/N<\varepsilon$，它盖住 0 及所有 $n\ge N$ 的点，其余有限个点各添一块即可。删零后 $1/n\to 0\notin K'$，故 K' 不闭、不紧。

14.4 任给覆盖，分别为 K_1,K_2 取有限子覆盖，两族合并仍有限且覆盖并集。取 $K_n=\{n\}$，每个单点紧而并 $\mathbb{N}$ 无界，故可数并不一定紧。

14.5 对 $x\in K\subseteq[0,1]$，$|2-x|\ge 1$，等号仅在 $x=1$，故最近点距离为 1。对 $0<x\le 1$，$|-1-x|>1$，

而 $x=1/n$ 时距离趋于 1，所以在 $(0,1]$ 上下确界为 1，但不取到。

14.6 若 (x_n,y_n) 在圆上收敛到 (x,y)，则坐标极限及乘法法则给出 $x^2+y^2=\lim_n(x_n^2+y_n^2)=1$，圆是闭集。又 $|x|,|y|\le 1$，故包含于闭方体 $[-1,1]^2$，因而有界。Heine–Borel 定理给出紧性。

14.7 令 $C_m=K\cap\bigcap_{j=1}^{m}A_j$。这些是 K 中递减的非空闭集，由嵌套闭集引理，全交非空，正是题设结论。去掉紧性可取 $K=\mathbb{R}$、$A_j=[j,\infty)$：有限交 $[m,\infty)$ 非空，全交为空。

14.8 每个值只能出现有限次，否则有恒值收敛子列。反设 x_k 不孤立，令 $n_0=0$。选好 n_{j-1} 后，前项中异于 x_k 的值有限；取它们到 x_k 的最小正距离 δ（若无则取 1）。不孤立性给出球 $B_{\min(1/j,\delta/2)}(x_k)$ 中另一个值；它未出现于前 n_{j-1} 项，故可取其后一次出现的下标 $n_j>n_{j-1}$。于是 $d(x_{n_j},x_k)<1/j$，矛盾。因此所求半径存在。

14.9 令 $a=\inf_{x\in K}d(p,x)$，取 $x_n\in K$ 使 $a\le d(p,x_n)<a+1/n$。紧性给子列 $x_{n_j}\to x_*\in K$，且 $|d(p,x_{n_j})-d(p,x_*)|\le d(x_{n_j},x_*)\to 0$，故 $d(p,x_*)=a$。对 $K=(0,1]$、$p=0$，下确界 0 不取到。

第 15 讲

导数

The Derivative

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 15 的导数定义、可导与连续、和积商及链式法则；Lecture 16 开头的回顾。原材料后半部分的 Fermat、Rolle 与中值定理安排在第 16 讲。

本讲目标

(1) 理解导数是差商的极限，会直接用定义求导数，会用单侧导数判断「尖点」处不可导。

(2) 掌握「可导 $\Rightarrow$ 连续」的证明；会用 $|x|$ 和 $x\sin\frac{1}{x}$ 说明反方向不成立，并理解为什么 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 在 0 处可导。

(3) 理解导数是最佳线性逼近，会用 Carathéodory 形式改写可导性。

(4) 会证明和、积、商的求导法则与链式法则，知道链式法则的「朴素证明」漏洞在哪里、怎样补上。

(5) 会判断分段函数在拼接点的可导性；能区分函数值、连续性、左右差商与导数之间的条件。

对 $f(x)=x^2$，在 $x=1$ 处的导数等于 2，这是一个熟悉的计算。但这个 2 从哪个极限得到？为什么连续函数可能没有导数？把两个可导函数相乘或复合时，求导公式怎样从定义推出？本讲逐一回答这些问题。第 16 讲再用中值定理把一点处的导数与整个区间上的变化联系起来。图 15.1 标出两讲的分工。

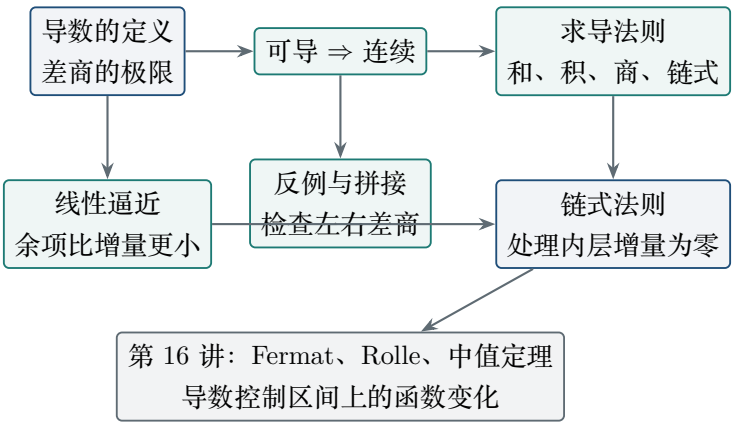


图 15.1　差商极限给出线性逼近和连续性，进而支持求导法则；导数的区间应用留到第 16 讲。

15.1　导数的定义

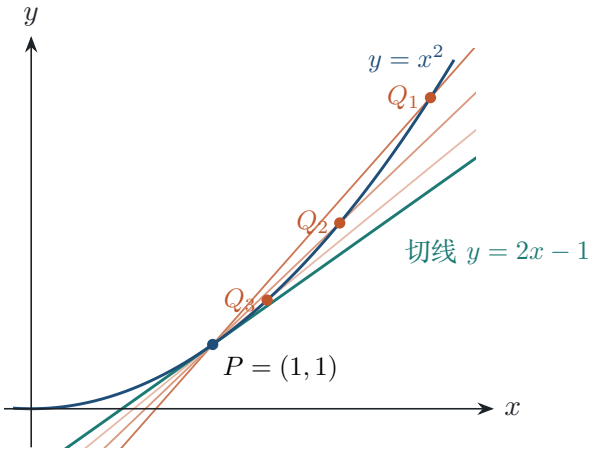
15.1.1　从割线到切线

先看一个熟悉的例子。设 $f(x)=x^2$，我们想求它的图像在点 $(1,1)$ 处切线的斜率。「切线」很难直接定义，但**割线**（secant line）很容易：过 $(1,1)$ 和图像上另一点 (x,x^2) 的直线，斜率是

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1\qquad(x\neq 1).$$

让 x 逐渐靠近 1，割线绕着 $(1,1)$ 转动，斜率依次变化：

图 15.2 把这些割线和它们趋近的切线画在一起；右侧表格列出靠近 1 时的斜率变化。



点	x	割线斜率 $x+1$
Q_1	2.2	3.2
Q_2	1.7	2.7
Q_3	1.3	2.3
	1.1	2.1
	1.01	2.01
	0.99	1.99
	0.9	1.9

图 15.2　$y=x^2$ 过 $P=(1,1)$ 的割线（橙色，颜色越浅 Q 越靠近 P）。$x\to 1$ 时割线斜率 $x+1\to 2$，割线趋于切线（青色）。

斜率趋于 2，于是我们**把切线定义为斜率等于这个极限的那条直线**：过 $(1,1)$、斜率为 2，即 $y=2x-1$。注意这里做的事情是「先算 $x\neq 1$ 时的斜率，再取极限」。在 $x=1$ 处差商 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 是 $\frac{0}{0}$，没有意义；约分得到的 $x+1$ 只在 $x\neq 1$ 时与差商相等。

物理里的速度是同一个问题。若质点在时刻 t 的位置是 $s(t)$，则从 t_0 到 t 的平均速度是 $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$，时刻 t_0 的**瞬时速度**就是 $t\to t_0$ 时平均速度的极限。几何上的切线斜率与物理上的瞬时速度，都是**差商的极限**。

15.1.2　函数极限

18.100B 讲过数列的极限（第 5 讲）和函数的连续性（第 11 讲），但导数要用的是**函数的极限**：差商在 $x=x_0$ 处根本没有定义，我们只能问「x 靠近 x_0 时它靠近什么」。先把这个概念说清楚。

定义 15.1（函数在一点的极限）　设 f 定义在 a 的某个去心邻域 $0<|x-a|<r$ 上。若对每个 $\varepsilon>0$，存在 δ 满足 $0<\delta\le r$，使

$$0<|x-a|<\delta\quad\Longrightarrow\quad|f(x)-L|<\varepsilon,$$

就称 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时极限为 L，记作 $\lim_{x\to a}f(x)=L$。

这里不要求 $f(a)$ 有定义，也不要求它等于 L。例如 $q(x)=(x^2-1)/(x-1)$ 在 1 处没有定义，但 $x\neq 1$ 时 $q(x)=x+1$，故极限为 2：取 $r=1$，给定 $\varepsilon>0$ 后令 $\delta=\min\{\varepsilon,1\}$，就有 $|q(x)-2|=|x-1|<\varepsilon$。即使另行规定 $q(1)=100$，这个去心极限仍为 2，只是函数在 1 处不连续。

命题 15.2（函数极限的序列刻画）　$\lim_{x\to a}f(x)=L$ 当且仅当：对每个满足 $x_n\to a$、$x_n\neq a$ 的序列，都有 $f(x_n)\to L$（只考察落在定义域内的项）。

证明　若函数极限成立，给定 $\varepsilon>0$，取定义中的 δ。由于 $x_n\to a$，充分大时 $0<|x_n-a|<\delta$，故 $|f(x_n)-L|<\varepsilon$。

反过来，若函数极限不为 L，则存在 $\varepsilon_0>0$，使每个 $\delta>0$ 都允许在定义域内选出 x 满足 $0<|x-a|<\delta$ 且 $|f(x)-L|\geq\varepsilon_0$。令 $\delta=\min(r/2,1/n)$，依次选出 x_n。那么 $x_n\to a$，而 $f(x_n)$ 不趋于 L，与题设的序列条件矛盾。 ■

因此，前面数列极限的和、积、商法则也适用于函数极限：把任意趋于 a 的去心序列代入，再使用命题 15.2 即可。商法则仍要求分母极限非零。函数 f 在 a 连续则等价于 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$，还要把 $x=a$ 这一点本身包含在定义域中。

15.1.3　差商、导数与单侧导数

定义 15.3（导数）　设 f 定义在包含 a 的开区间上。若有限实数极限

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

存在，就称 f 在 a **可导**（differentiable），该极限称为 f 在 a 的**导数**（derivative）。

换元 $h=x-a$ 使两种写法等价。第一种突出两点，第二种突出增量。导数 $f'(a)$ 是一个数；若在区间的每一点均可导，就得到导函数 $x\mapsto f'(x)$。本讲所说可导总指有限导数；差商趋于无穷大不算可导。

■ **例 15.1　常数、一次函数与三次多项式**　用定义求 $f(x)=c$、$g(x)=mx+b$、$p(x)=x^3-2x$ 的导数，特别求 $p'(2)$。

解　分别把增量展开后约去非零的 h。常数的差商是 $(c-c)/h=0$，故 $f'(a)=0$。一次函数的差商是 $[m(a+h)+b-(ma+b)]/h=m$，故 $g'(a)=m$，也包括 $m=0$ 的情形。三次多项式给出

$$\frac{p(a+h)-p(a)}{h}=3a^2-2+3ah+h^2\longrightarrow 3a^2-2.$$

所以 $p'(a)=3a^2-2$，特别地 $p'(2)=10$。这里先对 $h\neq 0$ 做代数变形，才让 $h\to 0$；没有把 $h=0$ 代入原差商。 ♦

■ **例 15.2　由定义求倒数的导数**　设 $f(x)=1/x$，其中 $a\neq 0$。只用导数定义求 $f'(a)$。

解　从差商开始，不先调用商法则：

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{a-(a+h)}{a(a+h)h}=-\frac{1}{a(a+h)}.$$

当 $h\to 0$ 时，$a+h\to a\neq 0$，所以

$$f'(a)=-\frac{1}{a^2}.$$

例如 $f'(2)=-1/4$。中间每一步都要求 $h\neq 0$ 且 $a+h\neq 0$；取极限时只需把 h 限制在足够小的邻域内。 ♦

■ **例 15.3　差商的两种写法**　对 $p(x)=x^3-2x$，分别用 $x\to a$ 和 $h\to 0$ 的写法核对 $p'(a)$。

解　第一种写法为

$$\frac{x^3-2x-(a^3-2a)}{x-a}=x^2+ax+a^2-2\longrightarrow 3a^2-2.$$

第二种写法把 $x=a+h$ 代入，得到

$$\frac{(a+h)^3-2(a+h)-(a^3-2a)}{h}=3a^2-2+3ah+h^2\longrightarrow 3a^2-2.$$

前者把两个图像点写得直观，后者把「增量为零」集中成一个变量；二者给出同一个导数。 ♦

15.2　可导推出连续，但反向不成立

如果差商在 a 附近趋于一个有限数，那么函数值的变化就是「一个有界数乘以很小的增量」。这正是连续性的来源。

定理 15.4（可导推出连续）　若 f 在 a 可导，则 f 在 a 连续。

思路　把函数增量拆成「差商乘以自变量增量」：先让差商有界，再让 $|x-a|$ 足够小。这样不需要事先知道 f 在 a 连续。

证明　设 $f'(a)=L$。由差商极限，存在 $\delta_1>0$，使 $0<|x-a|<\delta_1$ 时

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-L\right|<1.$$

于是

$$|f(x)-f(a)|\le(|L|+1)|x-a|.$$

给定 $\varepsilon>0$，取

$$\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{|L|+1}\right\}.$$

若 $|x-a|<\delta$，$x=a$ 时左侧为 $0<\varepsilon$；$x\neq a$ 时上式给出 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$。因此 f 在 a 连续。 ■

命题 15.5（可导点的局部斜率界）　若 f 在 a 可导，则存在 $\eta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x-a| < \eta$ 时

$$|f(x) - f(a)| \le M|x-a|.$$

证明　取 $\eta > 0$，使得当 $0 < |x-a| < \eta$ 时差商满足

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < 1$$

于是

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right| < |f'(a)| + 1.$$

令 $M = |f'(a)| + 1$ 即得结论。 ∎

这个局部估计比连续性强：连续性只说 $|f(x)-f(a)|$ 最终小于给定的 ε，这里还给出它不会超过自变量增量的固定倍数。它只在某个邻域内成立，不能直接推广到整条实线。例如 $f(x) = x^2$ 在每个固定点附近都有这样的界，但当 a 变大时所需的斜率界也变大。

■ **例 15.4　在指定邻域内控制误差**　对 $f(x) = x^2$ 在 $a = 2$ 处，给出一个具体的 M 和 η，使上面的不等式成立。

解　直接因式分解：

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2|.$$

若 $|x-2| < 1$，则 $1 < x < 3$，从而 $|x+2| < 5$。因此可以取 $\eta = 1$、$M = 5$。导数值是 $f'(2) = 4$，取更小的邻域还可以把 M 压到任意大于 4 的数；这里的 5 只是一个容易核对的选择。 ♦

■ **例 15.5　连续但不可导：$x\sin(1/x)$**　令

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明 f 在 0 连续但在 0 不可导。

解　连续性用夹逼：$|f(x) - f(0)| = |x\sin(1/x)| \le |x| \to 0$。但差商为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sin(1/x).$$

取 $x_n = 1/(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$ 和 $y_n = 1/(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$，两列都趋于 0，而差商分别为 1 和 -1。同一个极限不可能有两个值，所以 $f'(0)$ 不存在。 ♦

■ **例 15.6　再乘一个 x 就可导**　令

$$g(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $g'(0)$，并说明它为什么和上一个例子不同。

解　差商是

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=x\sin(1/x),$$

其绝对值不超过 $|x|$，故趋于 0。所以 $g'(0)=0$。振荡仍然存在，但振幅被额外的 $|x|$ 压到比增量更小的量级。 ♦

图 15.3 中的包络线显示函数值确实被压向原点，但差商仍能在两个值之间振荡。

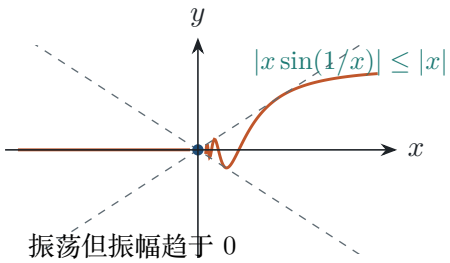


图 15.3　$x\sin(1/x)$ 被两条包络线 $y=\pm|x|$ 夹住，因此在原点连续；包络线只说明函数值变小，不能消除差商的振荡。

易错提醒　连续只控制 $f(x)-f(a)$ 是否趋于 0，可导还要求这个变化除以 $x-a$ 后有极限。$x\sin(1/x)$ 在 0 连续，却因差商在 -1 与 1 之间振荡而不可导。

想一想　为什么 $x^2\sin(1/x)$ 的函数值和差商都趋于 0，而 $x\sin(1/x)$ 只有函数值趋于 0？

答　$x\sin(1/x)$ 的函数值被 $|x|$ 控制，但除以 x 后包络消失；$x^2\sin(1/x)$ 除以 x 仍剩下 $x\sin(1/x)$，其绝对值不超过 $|x|$，所以差商也趋于 0。

15.3　和、积、商与链式法则

直接用定义求每一个新函数会很慢。差商可以先做代数拆分，再使用前面已经证明的连续性和极限运算法则。

定理 15.6（和、积与商的求导法则）　设 f,g 都在 a 可导。

(1) $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$；

(2) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$；

(3) 若 $g(a)\neq0$，则

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

思路　和法则把差商拆成两项；积法则加减同一项，再用可导推出连续；商法则先确认分母在附近不为零，再通分并分别取极限。

证明　和法则的差商直接拆开：

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

令 $h\to 0$ 即得和法则。积法则加减同一项 $f(a+h)g(a)$：

$$\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}=f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

可导推出连续，所以 $f(a+h)\to f(a)$，令 $h\to 0$ 即得积法则。

商法则中，g 连续且 $g(a)\neq 0$，所以 a 附近 $g(a+h)\neq 0$。通分得

$$\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h}=\frac{g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}{g(a+h)g(a)}.$$

分母趋于 $g(a)^2$，分子趋于 $g(a)f'(a)-f(a)g'(a)$，结论成立。 ■

■ **例 15.7**　**三种法则的连续使用**　设 $F(x)=(x^2+1)(x^3-2x)$，$H(x)=\frac{x^2+1}{x+2}$，求 $F'(2)$ 与 $H'(2)$。

解　各因子在 2 处的值和导数分别为 $(5,4)$、$(4,10)$。因此

$$F'(2)=4\cdot 4+5\cdot 10=66.$$

商法则给出

$$H'(2)=\frac{4\cdot 4-5\cdot 1}{4^2}=\frac{11}{16},$$

其中分母 $2+2=4\neq 0$，所以公式适用。 ♦

■ **例 15.8**　**和法则与常数倍**　设 $A(x)=3x^2-2x+5$。用和法则和常数倍法则求 $A'(x)$，再求 $A'(2)$。

解　把多项式看成三个简单项的和：

$$(3x^2)'=3(2x)=6x,qquad(-2x)'=-2,qquad5'=0.$$

所以 $A'(x)=6x-2$，从而 $A'(2)=10$。有限和可以逐项求导，正是因为差商的极限可以逐项相加。 ♦

定理 15.7（链式法则）　设 f 在 a 可导，g 在 $f(a)$ 可导。则 $g\circ f$ 在 a 可导，且

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a).$$

思路　把总差商拆成外层差商与内层差商时，不能假定 $f(a+h)-f(a)$ 总不为零。用上一节的余项形式可以同时处理等值和不等值的 h。

证明　记 $b=f(a)$。由命题 15.10，存在在 b 连续的 ϕ 与在 a 连续的 ψ，满足

$$g(y)-g(b)=(y-b)\phi(y),\quad \phi(b)=g'(b),\qquad f(x)-f(a)=(x-a)\psi(x),\quad \psi(a)=f'(a).$$

对 a 的充分小邻域内的 x，有

$$g(f(x))-g(f(a))=(x-a)\psi(x)\phi(f(x)).$$

当 $x\neq a$ 时除以 $x-a$。由 ψ 在 a 连续、$f(x)\to f(a)=b$，有

$$\psi(x)\to f'(a),\qquad \phi(f(x))\to \phi(b)=g'(b).$$

所以复合函数的差商趋于 $f'(a)g'(b)$。 ■

去掉链式法则的任一可导性条件，结论都可能失败：$f(x)=|x|$、$g(y)=y$ 时只有外层可导，而复合函数在 0 不可导；$f(x)=x$、$g(y)=|y|$ 时只有内层可导，复合函数同样不可导。

■ **例 15.9　链式法则的数值例题**　求 $P'(1)$，其中 $P(x)=(3x^2-1)^3$。

解　内层 $u(x)=3x^2-1$ 满足 $u(1)=2, u'(1)=6$；外层 $v(u)=u^3$ 满足 $v'(2)=12$。所以

$$P'(1)=v'(u(1))u'(1)=12\cdot 6=72.$$

♦

易错提醒　链式法则的朴素写法会把 $g(f(x))-g(f(a))$ 除以 $f(x)-f(a)$。当 $f(x)=f(a)$ 时该分式没有定义；余项形式可以避开这个除零步骤。

想一想　为什么商法则要求 $g(a)\neq 0$，而积法则没有类似条件？

答　商法则的分母 $g(a+h)g(a)$ 需要在极限过程中非零，且最终公式含 $g(a)^2$。例如 $f(x)=1$、$g(x)=x$、$a=0$ 时，商 $f/g=1/x$ 在 a 处未定义。积法则只使用加法和乘法，不会产生除零。

图 15.4 把复合过程中的两层变化率和总变化率画成一条链。

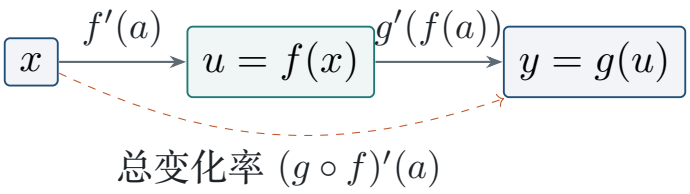


图 15.4　链式法则的结构：复合函数的变化率等于内层变化率与外层变化率的乘积。

15.4　单侧导数与分段函数

尖点处最容易混淆三件事：函数值是否接上、图像是否连续、左右斜率是否相同。把差商从两侧分别看，就能把这三层条件分开。

定义 15.8（单侧导数）　设 f 在 a 处及其左右邻域内有定义。若极限存在，记

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\qquad f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

左、右导数都存在且相等时，f 在 a 可导，公共值就是 $f'(a)$。若二者不等，函数在 a 不可导。

例 15.10　绝对值的尖点　求 $f(x)=|x|$ 在 0 的左右导数，并判断它是否连续、是否可导。

解　$f(0)=0$。若 $h>0$，差商为 $h/h=1$；若 $h<0$，差商为 $(-h)/h=-1$。所以

$$f'_+(0)=1,\qquad f'_-(0)=-1.$$

另一方面 $|f(h)-f(0)|=|h|\to 0$，函数在 0 连续；左右导数不同，故在 0 不可导。图 15.5 显示了两条不同的半切线。 ♦

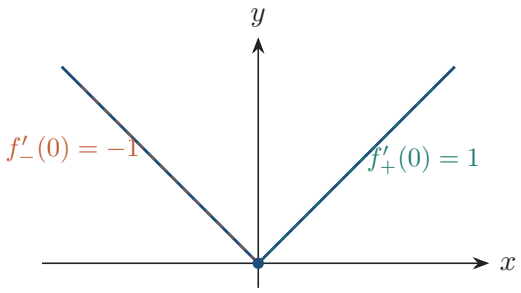


图 15.5　$|x|$ 在原点连续，但左、右半切线斜率分别为 -1 和 1，因此没有唯一切线。

命题 15.9（分段函数的拼接判据）　设

$$f(x)=\begin{cases} f_-(x), & x<a,\\ f_+(x), & x\ge a,\end{cases}$$

其中 f_- 在 a 左侧可导，f_+ 在 a 右侧可导，且 $f(a)=f_+(a)$。若

$$\lim_{x\to a^-}f_-(x)=f(a)=\lim_{x\to a^+}f_+(x),$$

则 f 在 a 连续；若另外 $f'_-(a)=f'_+(a)$，则 f 在 a 可导。

证明　左右极限都由题设给出且等于 $f(a)$，所以 f 在 a 连续。对导数，$h<0$ 时总落在左段，差商趋于 $f'_-(a)$；$h>0$ 时总落在右段，差商趋于 $f'_+(a)$。两侧极限相等时，双侧极限存在；不相等时，双侧极限不存在。 ■

■ **例 15.11　连续与可导的两个拼接条件　讨论**

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0,\\ x^2, & x\ge 0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x^2+x, & x\ge 0\end{cases}$$

在 0 的连续性和可导性。

解　对 f，左极限为 0、右极限和函数值也为 0，所以连续。左差商为 $(h^2+h)/h=h+1\to 1$，右差商为 $h^2/h=h\to 0$，故不可导。

对 g，左极限为 0，右极限和函数值也是 0，仍连续；左差商趋于 0，右差商为 $(h^2+h)/h=h+1\to 1$，仍不可导。两例说明「函数值接上」只解决连续性，不能自动接上斜率。 ♦

易错提醒　分段函数在拼接点的导数不能只代入分段公式的导函数。必须分别计算左右差商；即使两段的表达式在各自区间内都很光滑，拼接点仍可能出现尖点或跳跃。

15.5　导数是最佳线性逼近

若 f 在 a 可导，导数不仅是切线斜率，还给出了函数在 a 附近的第一阶变化。对 $h\neq 0$，令

$$r(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a).$$

由差商定义 $r(h)\to 0$，于是

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+h\,r(h),\qquad r(h)\longrightarrow 0.$$

这里的第二项比 h 小一个量级；这使「用切线代替曲线」成为可以估计误差的说法。

把 $L_a(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ 记作切线，它经过 $(a,f(a))$ 且斜率为 $f'(a)$。可导性说明

$$\frac{f(x)-L_a(x)}{|x-a|}\longrightarrow 0,$$

所以当放大观察点 a 附近时，曲线与这条直线的垂直差距相对于水平距离消失。这个结论比「图像看起来很直」更精确，也正是误差估计可以成立的原因。

命题 15.10（可导性的余项刻画）　函数 f 在 a 可导，当且仅当存在 $L\in\mathbb{R}$ 和函数 r（在 0 的去心邻域定义）满足 $r(h)\to 0$，使

$$f(a+h)=f(a)+Lh+hr(h).$$

等价地，存在 $L\in\mathbb{R}$ 和在 a 连续的函数 ϕ，且 $\phi(a)=L$，使

$$f(x)-f(a)=(x-a)\phi(x).$$

若任一种表示成立，则 f 在 a 可导，且 $f'(a)=L$。

证明　若 f 在 a 可导，取 $L=f'(a)$，并令

$$r(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\quad(h\neq 0),$$

就有 $r(h)\to 0$，并得到第一种表示。反过来，把等式除以 $h\neq 0$，差商等于 $L+r(h)$，所以趋于 L，即 $f'(a)=L$。

第一种表示改写为第二种：令 $\phi(x)=L+r(x-a)$（$x\neq a$），并令 $\phi(a)=L$。反之，若第二种表示成立，取 $L=\phi(a)$，则 $r(h)=\phi(a+h)-\phi(a)\to 0$，且除以 h 后差商趋于 L。 ■

定义 15.11（小量记号 $o(h)$）　若 $e(h)/h\to 0$（$h\to 0$），就写 $e(h)=o(h)$。于是可导性的余项形式可以简写为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(h).$$

这里的 $o(h)$ 是一个具体的函数误差，不是一个固定常数；它表示误差除以 $|h|$ 后还会趋于 0。

■ **例 15.12　比较几种误差的阶**　在 $h\to 0$ 时，判断 h^2、$|h|$ 和 $h\sin(1/h)$ 是否为 $o(h)$。

解　有

$$\frac{h^2}{h}=h\to 0,\qquad \frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0,\\ -1, & h<0,\end{cases}\qquad \frac{h\sin(1/h)}{h}=\sin(1/h).$$

因此 $h^2=o(h)$，而 $|h|$ 和 $h\sin(1/h)$ 都不是 $o(h)$。第一种误差不会改变一阶斜率，后两种误差除以 h 后仍留下非零或振荡的量。 ♦

推论 15.12（常数倍与有限和）　若 f,g 在 a 可导，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则 $\alpha f+\beta g$ 在 a 可导，且

$$(\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a).$$

证明　把差商写成

$$\alpha\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\beta\frac{g(a+h)-g(a)}{h},$$

再用极限的线性运算即可。 ■

这条推论解释了为什么多项式可以逐项求导。它只处理有限项；无穷级数逐项求导需要额外的收敛条件，留到后面的幂级数内容讨论。

■ **例 15.13　用切线估算平方**　已知 $f(x)=x^2$ 在 $a=1$ 处的导数为 2。用线性逼近估计 1.01^2，并写出误差的精确值。

解　取 $h=0.01$，切线给出

$$f(1+h)\approx f(1)+f'(1)h=1+2(0.01)=1.02.$$

但 $f(1+h)=1+2h+h^2$，所以这里的误差是 $h^2=0.0001$。这说明余项相对于 h 的比值为 $|h|\to 0$。 ♦

例 15.14　Carathéodory 形式的验证　对 $f(x)=x^2$ 和 $a=1$，构造在 a 连续的 ϕ，使

$$f(x)-f(1)=(x-1)\phi(x).$$

解　当 $x\neq 1$ 时，因式分解给出

$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

令 $\phi(x)=x+1$（包括 $x=1$），它在 1 连续且 $\phi(1)=2=f'(1)$。这比在 $x=1$ 直接代入原差商更稳妥：原差商在该点没有定义，而 ϕ 把可去的 $0/0$ 奇点填成了导数。 ♦

想一想　若只知道存在 $C,\delta>0$，使 $|f(a+h)-f(a)-Lh|\le C|h|$ 对所有 $0<|h|<\delta$ 成立，能否断定 $f'(a)=L$？

答　不能。这个误差上界只给出 $O(|h|)$ 控制；可导还要求扣除线性项后的余项除以 h 趋于 0，也就是 $o(h)$。例如 $f(a+h)=f(a)+Lh+|h|$ 满足该估计（取 $C=1$），但左右差商分别为 $L-1$ 和 $L+1$，导数不存在。

本讲小结

- f 在 a 可导的定义是差商 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 在 $h\to 0$ 时有有限极限；它给出切线斜率和瞬时变化率。
- 可导推出连续，但连续不推出可导；$x\sin(1/x)$ 在 0 连续而不可导，$x^2\sin(1/x)$ 在 0 可导且导数为 0。
- 可导性等价于 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+hr(h)$，其中 $r(h)\to 0$；导数是最佳线性逼近的斜率。
- 分段函数在拼接点先检查函数值与左右极限，再检查左右差商；两侧导数相等才可导。
- 和、积、商法则来自差商的拆分、加减同一项和通分；商法则要求分母在该点非零。
- 链式法则为 $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$；余项形式可以避开内层增量为零的情况。

练习

15.1 ★　用定义求 $f(x)=x^2+3x$ 在 $a=2$ 处的导数。

15.2 ★　判断 $f(x)=|x-3|$ 在 $x=3$ 是否连续、是否可导，并计算左右导数。

15.3 ★★　证明 $f(x)=x^2\sin(1/x)$（$x\neq 0$，$f(0)=0$）在 0 可导，并求 $f'(0)$。

15.4 ★★　设 f 在 a 可导。证明存在 $C,\delta>0$，使 $|f(a+h)-f(a)|\le C|h|$ 对所有 $0<|h|<\delta$ 成立；并说明为什么这个界还不足以给出可导性。

15.5 ★★　讨论 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<1,\\ ax+b, & x\ge 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 连续且可导时 a,b 应满足什么条件？

15.6 ★★　用积法则求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x^2+1)(x+2)\big)$。

15.7 ★★ 用商法则求 $\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)'$，并指出公式的定义域限制。

15.8 ★★ 用链式法则求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+1)^3$，并求其在 $x=1$ 的值。

15.9 ★★★ 设 f 在 a 可导且 $f(a)=0$。说明求导时差商的增量应写成 $h=x-a$；用 $f(x)=x-1, a=1$ 说明直接看 $f(x)/x$ 会出错。

15.10 ★★★ 设 f, g 在 a 可导且 $f'(a)=0$。用余项形式直接证明 $(g\circ f)'(a)=0$，不要把 $g(f(x))-g(f(a))$ 除以 $f(x)-f(a)$。

练习答案与提示

15.1 差商为 $[(2+h)^2+3(2+h)-10]/h = 7+h$，所以 $f'(2)=7$。

15.2 连续，因为 $|f(x)-f(3)|=|x-3|\to 0$；左导数为 -1，右导数为 1，故不可导。

15.3 差商为 $x\sin(1/x)$，绝对值不超过 $|x|$，所以趋于 0，故 $f'(0)=0$。

15.4 可导给出 $f(a+h)-f(a)=h[f'(a)+r(h)]$，其中 $r(h)\to 0$，故括号在 0 附近有界。取 $C=|f'(a)|+1$，就得到题设的估计。反例 $u(h)=|h|$ 也满足该估计（取 $C=1$），但 $u(h)/h$ 左右极限不同。

15.5 连续要求左极限 3 等于 $f(1)=a+b$，所以 $a+b=3$。右侧差商恒为 a，左侧差商恒为 2，故可导还要求 $a=2$。代回连续条件得 $b=1$。

15.6 由积法则，

$$\big((x^2+1)(x+2)\big)' = 2x(x+2)+(x^2+1) = 3x^2+4x+1.$$

15.7 公式只在 $x\neq -1$ 适用。商法则给出

$$\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

15.8 外层 $u\mapsto u^3$ 的导数是 $3u^2$，内层 $x\mapsto x^2+1$ 的导数是 $2x$。所以导数为 $3(x^2+1)^2(2x)=6x(x^2+1)^2$；在 $x=1$ 处等于 24。

15.9 由 $h=x-a$，导数定义的分子必须是 $f(a+h)-f(a)$，分母是 h。例中 $f(1)=0$，故正确差商为

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \quad (x\neq 1).$$

但 $f(x)/x = (x-1)/x \to 0$，把函数值除以自变量会得到错误结果。

15.10 由余项形式，存在 ψ 在 a 连续，满足 $f(x)-f(a)=(x-a)\psi(x)$ 且 $\psi(a)=f'(a)=0$；也存在 ϕ 在 $f(a)$ 连续，满足 $g(y)-g(f(a))=(y-f(a))\phi(y)$ 且 $\phi(f(a))=g'(f(a))$。当 $x\neq a$ 时，

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \psi(x)\phi(f(x)).$$

因为 $f(x)\to f(a)$，右侧趋于 $0\cdot g'(f(a))=0$，所以 $(g\circ f)'(a)=0$。

第 16 讲

导数的应用

Applications of the Derivative

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 16；习题集 7 第 3–4 题、习题集 8 第 1–3、5 题。

本讲目标

(1) 会用 Fermat 引理判断内点局部极值处的导数，并能说明导数为零只是必要条件。

(2) 掌握 Rolle 定理和中值定理的条件、证明及常见推论。

(3) 会用 Cauchy 中值定理比较两个函数的整体增量，并正确使用两种 L'Hôpital 法则。

(4) 理解 Taylor 多项式与 Lagrange 余项，能根据导数界估计近似误差。

(5) 能用中值定理证明单调性、指数不等式和极限结论。

一辆车从位置 $s(a)$ 开到 $s(b)$，平均速度是 $\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$。若每一瞬间的速度都小于 2，平均速度也不应超过 2；反过来，连续函数从 0 回到 0，中途通常得有一个水平切线。本讲要证明这两种直觉，并把它们用于极限和多项式近似。第 15 讲已经建立导数定义及求导法则；本讲的核心是把局部导数转成区间信息。

16.1 内点极值与 Rolle 定理

函数 $f(x)=-(x-1)^2+3$ 在 $x=1$ 取得局部最大值 3，而左右差商分别从正、负方向趋近 0。这个现象不依赖二次函数的具体形状。

定义 16.1（局部极值） 设 f 在 x_0 的某个邻域内有定义。若存在 $\delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\le f(x_0)$，就称 f 在 x_0 取得**局部最大值**（local maximum）；将不等号反向则称为局部最小值。

若 $f(x)=-(x-1)^2+3$，取 $|x-1|<1$，则 $f(x)\le 3=f(1)$，所以 1 是局部最大值点。$f(x)=x^3$ 在 0 的导数也为 0，但它在 0 左右分别小于和大于 $f(0)$，没有局部极值。端点也要区分：$f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 的右端点取得最大值，但 $f'(1)=1$，因为极值点不在区间内部。

引理 16.2（Fermat 引理） 若 f 在开区间内的点 x_0 可导，且在 x_0 取得局部最大值或局部最小值，则 $f'(x_0)=0$。

证明　先设 x_0 是局部最大值点。充分靠近 x_0 时，$f(x)-f(x_0)\le 0$。若 $x>x_0$，分母 $x-x_0>0$，故差商不大于 0；若 $x<x_0$，分母为负，差商不小于 0。左右差商有同一个极限 $f'(x_0)$，这个极限只能同时不大于和不小于 0，因此等于 0。局部最小值的证明把不等号反向，结论不变。 ■

■ **例 16.1　驻点未必是极值点**　判断 $f(x)=x^3$ 在 0 是否有局部极值。

解　用定义计算差商：$\frac{f(h)-f(0)}{h}=h^2\to 0$，所以 $f'(0)=0$。但当 $h<0$ 时 $f(h)<0=f(0)$，当 $h>0$ 时 $f(h)>0=f(0)$。因此 0 既不是局部最大值点，也不是局部最小值点。Fermat 引理的逆命题不成立。 ♦

易错提醒　「$f'(x_0)=0$」不能单独推出局部极值。x^3 在 0 导数为 0，函数却穿过该点继续增加；Fermat 引理只给出极值的必要条件。

想一想　为什么 Fermat 引理要求 x_0 是区间内点？
答　内点左右两侧都有可用的差商，局部最大值使右侧差商不大于 0、左侧不小于 0。端点只有一侧；例如 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 的最大值点 1 满足 $f'(1)=1$。

如果一条曲线在区间两端取相同高度，它要么全程水平，要么会在内部升高或降低，并在某个内部极值点有水平切线。这就是 Rolle 定理。

定理 16.3（Rolle 定理）　设 $a<b$，f 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$。则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$。

思路　连续性保证闭区间上的最大值和最小值能取到。若函数不是常数，至少一个极值严格高于或低于端点值，因而在内部取到；Fermat 引理随后给出零导数。

证明　由闭区间最值定理，f 在 $[a,b]$ 取得最大值和最小值。若 f 恒等于端点值，任取 $c\in(a,b)$ 都有 $f'(c)=0$。否则存在 $x\in(a,b)$ 使 $f(x)\neq f(a)$。若 $f(x)>f(a)$，最大值严格大于两个端点值，最大值只能在某个 $c\in(a,b)$ 取得；Fermat 引理给出 $f'(c)=0$。若 $f(x)<f(a)$，对最小值作同样论证。 ■

连续性和内部可导性都不能随意删去。若只删去连续性，令 $f(x)=x\,(0\le x<1)$ 且 $f(1)=0$，则 $f(0)=f(1)=0$，但 $f'(x)=1$ 对每个 $x\in(0,1)$ 成立。若删去内部可导性，$f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 两端都为 1，但除 0 外导数只有 -1 或 1，而 0 不可导。

端点相等也是必要条件：$f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 连续可导，但导数恒为 1，没有 Rolle 点。

■ **例 16.2　验证 Rolle 定理的点**　对 $f(x)=x^2-2x$ 在 $[0,2]$ 上应用 Rolle 定理，并找出结论中的 c。

解　$f(0)=0=f(2)$，且多项式在整个实线上连续可导，所以定理条件成立。解 $f'(x)=2x-2=0$

得 $c=1$，确实有 $0<1<2$。端点值相同迫使内部至少出现一个水平切线；本例的这个点恰好唯一。 ♦

16.2　中值定理：把割线变成切线

抛物线 $f(x)=x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 的割线斜率是 2。在 $x=1$ 处，切线斜率也为 $f'(1)=2$。定理说明这种相等不是抛物线的巧合（图 16.1）。

定理 16.4（拉格朗日中值定理）　设 $a<b$，f 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可导。则存在 $c\in(a,b)$ 使

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

直观理解　右边是整段区间的平均变化率，左边是某一点的瞬时变化率。连续性保证曲线没有断开，可导性保证内部每一点都有切线；两者合起来保证至少有一条切线与端点割线平行。

思路　从 f 中减去连接两个端点的直线，得到端点函数值相同的新函数。对它应用 Rolle 定理；新函数导数为零正好表示原曲线的切线斜率等于割线斜率。

证明　令

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

g 在 $[a,b]$ 连续、在 (a,b) 可导，并且 $g(a)=f(a)=g(b)$。由 Rolle 定理，存在 $c\in(a,b)$ 使 $g'(c)=0$。求导得到

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即为所求。 ■

图 16.1 以 x^2 为例：端点割线和 $x=1$ 的切线平行，斜率均为 2。

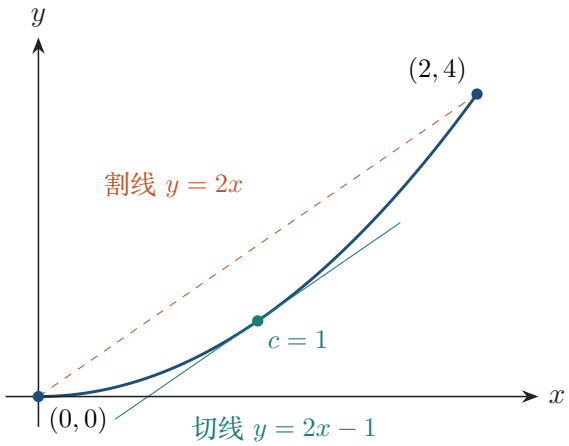


图 16.1　x^2 在 $[0,2]$ 上的端点割线斜率为 2，且在 $c=1$ 处导数也为 2。

图中橙色虚线和青色实线平行，但截距不同：割线通过两个端点，切线通过曲线上内部点 $(1,1)$。中值定理只保证斜率相同，不保证两条直线重合。

例 16.3　中值定理确定一个点　对 $f(x)=x^2+1$ 在 $[1,3]$ 上应用中值定理，求所有可能的 c。

解　平均变化率为 $\frac{10-2}{3-1}=4$。而 $f'(c)=2c$，所以 $2c=4$，得到 $c=2$，它确实在 $(1,3)$ 内。这题说明定理给出的点未必唯一，但本例方程只有一个解。 ♦

推论 16.5（导数符号决定单调性）　若 f 在 $[a,b]$ 连续、在 (a,b) 可导，则：$f'(x)\ge 0$ 对所有 $x\in(a,b)$ 成立时，f 在 $[a,b]$ 非减；若 $f'(x)>0$ 对所有 $x\in(a,b)$ 成立，则 f 严格递增。

证明　任取 $x_1<x_2$。在 $[x_1,x_2]$ 上应用中值定理，存在 $c\in(x_1,x_2)$ 使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

右侧在 $f'(c)\ge 0$ 时非负，在 $f'(c)>0$ 时为正。因为 x_1,x_2 任意，分别得到非减和严格递增。 ■

严格递增还带来一个实用的逆函数结论。下面的证明把存在性、连续性和可导性分开，避免把「单调」直接误当成「可导」。

命题 16.6（正导数与逆函数）　设 f 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可导，且 $f'(x)>0$。则 f 将 $[a,b]$ 双射到 $[f(a),f(b)]$；其逆函数 g 在 $(f(a),f(b))$ 上连续且可导，并满足

$$g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}.$$

证明　由推论 16.5，f 严格递增，所以至多一个 x 满足 $f(x)=y$。连续性和介值定理保证对每个 $y\in(f(a),f(b))$ 至少有一个这样的 x，故逆函数存在。

固定 $y_0=f(x_0)$。给定 $\varepsilon>0$，取 $0<\varepsilon_0<\varepsilon$，并使 $x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0\in(a,b)$。严格递增给出

$$f(x_0-\varepsilon_0)<y_0<f(x_0+\varepsilon_0).$$

取 δ 小于 $y_0-f(x_0-\varepsilon_0)$ 与 $f(x_0+\varepsilon_0)-y_0$，则 $|y-y_0|<\delta$ 蕴含 $|g(y)-x_0|<\varepsilon_0<\varepsilon$，所以 g 连续。

令 $y\to y_0$，并写 $x=g(y)$。由刚证的连续性，$x\to x_0$；当 $x\ne x_0$ 时，导数定义给出

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1}\longrightarrow\frac{1}{f'(x_0)}.$$

因此 $g'(y_0)=1/f'(x_0)=1/f'(g(y_0))$。 ■

这里的条件只保证 g 连续且可导，并不保证 g' 连续。若进一步假设 f' 在 (a,b) 上连续，则上式右侧 $1/f'(g(y))$ 是连续函数，此时才能推出 g' 连续。

导数处处非负还不足以保证逆函数可导：$f(x)=x^3$ 严格递增，但其逆函数 $g(y)=\sqrt[3]{y}$ 在 $y=0$ 不可导；命题中的严格正导数排除了这种情形。

■ **例 16.4　立方函数的逆函数导数**　在 $[1,3]$ 上令 $f(x)=x^3$。求其逆函数 g 在 $y=8$ 处的导数，并用命题核对。

解　$f'(x)=3x^2>0$，故 $g(y)=\sqrt[3]{y}$。由 $g(8)=2$ 以及命题，

$$g'(8)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{12}.$$

直接求导 $g'(y)=\frac{1}{3}y^{-2/3}$ 也给出 $g'(8)=1/12$。这个例子说明逆函数的斜率是原函数斜率的倒数，计算点必须先通过 g 找回原来的 x。 ♦

中值定理的两个正则性条件各自承担不同任务。若函数在端点之间有跳跃，平均变化率可能完全看不出内部导数；例如令 $f(x)=0$（$0\le x<1$）、$f(1)=1$，虽然端点值之差为 1，但内部导数恒为 0。若函数在内部有尖点，连续性仍不足以保证结论：$f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 连续，平均变化率为 0，但唯一可能的水平点 $x=0$ 不可导。因此使用中值定理前，要逐项检查闭区间连续和开区间可导。

■ **例 16.5　非负导数与严格递增**　说明 $f'(x)\ge 0$ 时函数可以严格递增，即使某点导数为零；再比较 $f(x)=x^3$ 与「导数处处为正」的条件。

解　对 $f(x)=x^3$，有 $f'(x)=3x^2\ge 0$，而任意 $x_1<x_2$ 都满足 $x_1^3<x_2^3$，所以函数严格递增。中值定理给出某个 c 使

$$\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}=3c^2\ge 0;$$

要证明严格不等式，直接因式分解更合适：$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$，括号内不可能为零，除非 $x_1=x_2=0$，但这与 $x_1<x_2$ 矛盾。故 $f'>0$ 是严格递增的方便充分条件，却不是必要条件；零导数点本身也不妨碍整体严格增长。 ♦

■ **例 16.6　指数函数的基本下界**　用 e^x 的导数证明对所有 $x\in\mathbb{R}$，$e^x\ge 1+x$，并判断何时取等号。

解　设 $x\neq 0$，在以 0 和 x 为端点的区间上应用中值定理。存在 c 严格位于 0 与 x 之间，使

$$e^x-1=e^c x.$$

若 $x>0$，则 $c>0$，故 $e^c>1$，于是 $e^x-1>x$。若 $x<0$，则 $c<0$，故 $0<e^c<1$；乘以负数 x 后 $e^cx>x$，仍有 $e^x-1>x$。$x=0$ 时两边相等。因此等号只在 $x=0$ 取到。 ♦

■ **例 16.7　导数极限推出端点导数**　设 f 在 0 连续，在 $(-\eta,0)\cup(0,\eta)$ 可导，并且 $\lim_{x\to 0}f'(x)=L$。证明 $f'(0)$ 存在且等于 L。

解　对任意 $x\neq 0$ 且 $|x|<\eta$，在端点 $0,x$ 之间应用中值定理。存在 c_x 严格位于 0 与 x 之间，使

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c_x).$$

由于 $|c_x| < |x|$，当 $x \to 0$ 时 $c_x \to 0$，所以右侧趋于 L。左侧正是 f 在 0 的差商，故 $f'(0) = L$。 ♦

这也解释了中值定理为何常用来处理极限：它把函数值的差商精确地改写成某个中间点的导数，而该点随着区间缩短一同靠近端点。

方法：差值除以长度　遇到两个函数值之差，先看它们对应的区间长度；中值定理把「总变化量」写成「某点变化率乘区间长度」，再利用导数的符号或极限。

16.3　Cauchy 中值定理与 L'Hôpital 法则

拉格朗日中值定理比较一个函数的增量和区间长度。若要比较两个函数 f, g 的增量，可以把「长度函数」换成 g；这会得到 Cauchy 中值定理。

定理 16.7（Cauchy 中值定理）　设 $a < b$，f, g 在 $[a, b]$ 连续、在 (a, b) 可导。则存在 $c \in (a, b)$ 使

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big).$$

若同时有 $g'(c) \neq 0$ 且 $g(b) \neq g(a)$，上式才可写成 $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$；不作除法的等式才是无额外条件的结论。

证明　构造

$$h(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big).$$

它在 $[a, b]$ 连续、在 (a, b) 可导。代入端点可得

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Rolle 定理给出 $c \in (a, b)$ 使 $h'(c) = 0$。求导后即得

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = 0.$$

■

取 $g(x) = x$，Cauchy 中值定理就成为拉格朗日中值定理，因为 $g'(x) = 1$ 且 $g(b) - g(a) = b - a$。取 $f = g$ 时等式两边相同，结论虽正确却不提供新的信息；所以一般形式保留交叉相乘，避免未经检查就除以零。

■ **例 16.8　比较两个函数的区间增量**　令 $f(x) = x^2$、$g(x) = x^2 + x + 1$，在 $[0, 2]$ 上找一个满足 Cauchy 中值定理的点。

解　两函数都是多项式，连续可导。端点增量分别是 $f(2) - f(0) = 4$、$g(2) - g(0) = 6$。定理要求

$$2c \cdot 6 = (2c + 1) \cdot 4,$$

解得 $c = 1$，且 $1 \in (0, 2)$。代回检查两边都是 12。在该点，导数比 $f'(1)/g'(1) = 2/3$ 恰好等于增量比 $4/6$。 ♦

L'Hôpital 法则处理分子、分母同时趋于 0 或同时趋于无穷的商。它不是「分子分母都求导」的形式规则；需要先确认商的型态、导数比的极限和分母导数条件。

定理 16.8（L'Hôpital 法则：0/0 型）　设 f, g 在 $(a, a+\delta_0)$ 可导，且 $g(x) \neq 0$、$g'(x) \neq 0$。若

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R},$$

则

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

证明　给定 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$，使 $a < x < a+\delta$ 时 $|f'(x)/g'(x) - L| < \varepsilon$。固定这样的 x，任取 y 满足 $a < y < x$。Cauchy 中值定理在 $[y, x]$ 上给出 $z \in (y, x)$，使

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

这里 $g(x) - g(y) \neq 0$：否则 Rolle 定理会给出某点 $u \in (y, x)$ 使 $g'(u) = 0$，与假设矛盾；并且 $g'(z) \neq 0$，所以 Cauchy 中值定理的交叉相乘式可以写成上面的比值。又 $z \in (a, a+\delta)$，故上式与 L 的差小于 ε。让 $y \to a^+$，利用 $f(y), g(y) \to 0$，得到 $|f(x)/g(x) - L| \leq \varepsilon$。这对所有 $a < x < a+\delta$ 成立；因 ε 任意，商的极限为 L。 ■

■ **例 16.9**　$(e^x - 1)/x$ **的极限**　求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x}$。

解　分子和分母都趋于 0；在 $x > 0$ 时分母及其导数均非零。导数之比为 $e^x/1 \to 1$，由 0/0 型 L'Hôpital 法则，原极限为 1。这与第 15 讲由导数定义得到的 e^x 在 0 的导数一致。 ♦

■ **例 16.10**　**需要连续使用两次**　求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$。

解　第一次应用 L'Hôpital 后，极限化为 $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{2x}$，仍是 0/0 型。

再应用一次，得到 $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$。每次应用前都重新检查当前分子、分母的极限型态。 ♦

定理 16.9（L'Hôpital 法则：∞/∞ 型）　设 f, g 在 $(a, a+\delta_0)$ 可导，且 $g(x) \neq 0$、$g'(x) \neq 0$。若

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R},$$

则 $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = L$。

证明　给定目标误差 $\eta > 0$，取 $\delta > 0$，使 $2\delta < \delta_0$，并且当 $a < x < a + 2\delta$ 时

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\eta}{4}.$$

固定 $x \in (a, a+\delta)$。因 $g'(t) \neq 0$，Rolle 定理说明 $g(a+\delta) \neq g(x)$；又 $g'(c) \neq 0$，所以可将 Cauchy

中值定理的交叉相乘式写为在 $[x, a+\delta]$ 上存在 $c \in (x, a+\delta)$ 使

$$\frac{f(a+\delta)-f(x)}{g(a+\delta)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

由于 $c \in (a, a+2\delta)$，右侧与 L 的差小于 $\eta/4$。记 $x_1 = a+\delta$，并设

$$A_x = \frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}, \qquad p_x = \frac{f(x_1)}{g(x)}, \qquad q_x = \frac{g(x_1)}{g(x)}.$$

将 A_x 的分子、分母除以 $g(x)$，得到

$$A_x = \frac{f(x)/g(x) - p_x}{1-q_x}.$$

因为 $g(x) \to +\infty$，有 $p_x, q_x \to 0$。取 x 更靠近 a，使 $|q_x| \le 1$ 且 $|p_x| + |L|\,|q_x| < \eta/2$。由

$$\frac{f(x)}{g(x)} = A_x(1-q_x) + p_x$$

以及 $|A_x - L| < \eta/4$，可估计

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le |A_x - L|(1+|q_x|) + |L|\,|q_x| + |p_x| < \eta.$$

这对充分靠近 a 的 x 都成立，故所求极限为 L。 ■

■ **例 16.11**　无穷/无穷型的简单情形　求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-2}}{x^{-3}}$，并核对导数之比。

解　分子和分母都趋于 $+\infty$，而且 $g(x) = x^{-3}$、$g'(x) = -3x^{-4}$ 在 $x > 0$ 不为零。直接约分得原商为 $x \to 0$；导数之比为

$$\frac{-2x^{-3}}{-3x^{-4}} = \frac{2x}{3} \longrightarrow 0.$$

两种计算相符，L'Hôpital 法则也给出极限 0。 ♦

易错提醒　不能把 L'Hôpital 法则当作任意商的求导口诀。只有先确认 $0/0$ 或 ∞/∞ 型、g' 在去心邻域非零，并且 f'/g' 有极限，才能按定理推出 f/g 的极限。

想一想　若 $f(x), g(x) \to 0$，但 $f'(x)/g'(x)$ 没有极限，L'Hôpital 法则能否直接给出 $f(x)/g(x)$ 的极限？

答　不能。定理的关键前提之一就是导数之比有极限。例如 $f(x) = x$、$g(x) = |x|$ 时，f/g 在左右两侧分别为 1 和 -1，双侧极限不存在；导数之比也没有双侧极限。

16.4　Taylor 定理与误差估计

在 $x = 1$ 附近用 $P(x) = 1 + (x-1)$ 近似 x^2，误差是 $(x-1)^2$；加入二次项后，x^2 就被精确表示。一般函数也能由多项式近似，Taylor 定理还会告诉我们误差等于某个中间点的高阶导数乘一个幂。

定义 16.10（Taylor 多项式）　设 f 在 a 处有直到 $k-1$ 阶的导数。以 a 为中心、次数至多为 $k-1$ 的**Taylor 多项式**（Taylor polynomial）定义为

$$P_{k-1}(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j,$$

其中 $f^{(0)}=f$、$0!=1$。

例如 $f(x)=e^x$ 在 $a=0$ 的二次 Taylor 多项式是 $1+x+x^2/2$；$f(x)=x^2$ 的二次 Taylor 多项式就是 x^2 本身，余项为零。Taylor 多项式匹配 a 处的函数值和若干阶导数；它不意味着区间上任意远的点都近似准确。

定理 16.11（Taylor 定理与 Lagrange 余项）　设 $a<b$、$k\geq 1$。假设 $f,f',\dots,f^{(k-1)}$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f^{(k)}$ 在 (a,b) 存在。则有 $c\in(a,b)$ 使

$$f(b)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j+\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-a)^k.$$

直观理解　前 k 项组成的多项式在 a 处匹配函数的低阶变化。若区间上 $|f^{(k)}|\leq M$，余项绝对值不超过 $M|b-a|^k/k!$；使用同一个导数上界时，距离减半会使这个误差上界缩小到原来的 2^{-k}。

思路　先把目标余项写成一个未知常数 M 乘 $(x-a)^k/k!$，令新函数在 a、b 两端都为零。反复应用 Rolle 定理：每次保留一个端点处的零点并找到另一个内部零点，最后得到某点的 k 阶导数为零，从而确定 $M=f^{(k)}(c)$。

证明　令 P_{k-1} 为上式的 Taylor 多项式，并以 M 定义

$$f(b)=P_{k-1}(b)+\frac{M}{k!}(b-a)^k.$$

构造

$$R(x)=f(x)-P_{k-1}(x)-\frac{M}{k!}(x-a)^k.$$

按 M 的定义，$R(a)=R(b)=0$。又因 P_{k-1} 与 f 在 a 处的 0 至 $k-1$ 阶导数相同，且 $(x-a)^k$ 的这些低阶导数在 a 都为零，所以

$$R^{(j)}(a)=0\qquad(0\leq j\leq k-1).$$

对 R 在 $[a,b]$ 应用 Rolle 定理，得到 $c_1\in(a,b)$ 使 $R'(c_1)=0$。$R'(a)=R'(c_1)=0$，再对 R' 在 $[a,c_1]$ 应用 Rolle 定理，得到 $c_2\in(a,c_1)$ 使 $R''(c_2)=0$。重复这一步 k 次，得到 $c\in(a,b)$ 使 $R^{(k)}(c)=0$。由于 $P_{k-1}^{(k)}=0$，而 $\big((x-a)^k/k!\big)^{(k)}=1$，故

$$0=R^{(k)}(c)=f^{(k)}(c)-M.$$

所以 $M = f^{(k)}(c)$，代回 $R(b) = 0$ 即得 Taylor 公式。 ■

■ **例 16.12　用二次多项式近似 e**　对 $f(x) = e^x$，在 $a = 0$ 取到二次项，用 Taylor 定理表示 e，并给出余项范围。

解　因为 $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$，取 $k = 3$、$b = 1$ 得某个 $c \in (0,1)$ 满足

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{e^c}{6} = \frac{5}{2} + \frac{e^c}{6}.$$

在 $(0,1)$ 上 $1 < e^c < e$，所以二次近似 $5/2$ 的误差为正，且小于 $e/6$。这给出了多项式近似的定量误差，而不只是一种形式展开。 ♦

图 16.2 比较 e^x 与 $1 + x + x^2/2$ 在 $[0,1]$ 上的图像。两者在 0 处的函数值、切线斜率和二阶导数相同；离开中心后才逐渐出现误差。

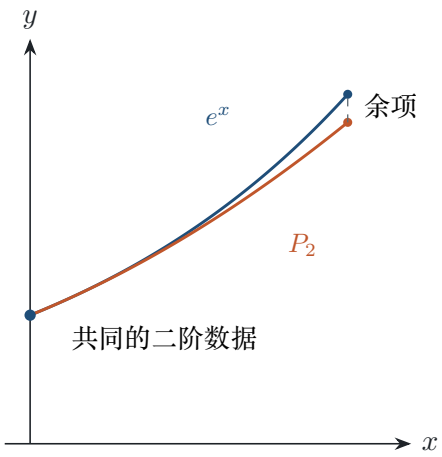


图 16.2　e^x 与二次 Taylor 多项式在 0 处匹配到二阶，$x = 1$ 的竖直差距由 Lagrange 余项控制。

二次项的加入让曲线在中心附近更贴合，但仍有正误差。图上的竖直间距是 $e - 5/2 = e^c/6$，其中 c 由定理保证存在，通常不需要也无法从公式中显式算出。

更一般地，若在从 a 到 b 的区间上有 $|f^{(k)}(x)| \le M$，Taylor 公式立即给出

$$|f(b) - P_{k-1}(b)| \le \frac{M}{k!}|b - a|^k.$$

这条估计把「近似得好」拆成两个可以分别控制的因素：导数上界 M 反映函数本身的弯曲程度，距离的 k 次方反映展开中心的远近。比如在 $[0,1]$ 上 e^x 的三阶导数仍是 $e^x < e$，所以二次 Taylor 近似的误差小于 $e/6$；若把区间缩成 $[0,1/2]$，同样的估计立刻变成 $e/48$。

命题 16.12（二阶导数非负推出凸性）　若 f 在开区间 I 上二阶可导，且 $f''(x) \ge 0$ 对所有 $x \in I$ 成立，则 f 在 I 上凸：对任意 $x_1, x_2 \in I$ 及 $\lambda \in [0,1]$，

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

证明　先由中值定理应用于 f'，$f''\ge 0$ 蕴含 f' 非减。令 $x_1<z<x_2$。分别在 $[x_1,z]$ 和 $[z,x_2]$ 上应用中值定理，存在 $u\in(x_1,z)$、$v\in(z,x_2)$ 使

$$\frac{f(z)-f(x_1)}{z-x_1}=f'(u),\qquad \frac{f(x_2)-f(z)}{x_2-z}=f'(v).$$

因 $u<v$ 且 f' 非减，左边第一个斜率不大于第二个斜率。交叉相乘并整理，得到

$$f(z)\le \frac{x_2-z}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{z-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

写 $z=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ 即为凸性不等式；端点情形 $\lambda=0,1$ 等号成立。 ■

■ **例 16.13**　**二次函数的凸性**　用命题 16.12 证明 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上凸，并用 $x_1=0,x_2=2,\lambda=1/2$ 核对一次。

解　$f''(x)=2\ge 0$，故命题给出凸性。指定数据下，插值点为 1，左侧为 $f(1)=1$，右侧为 $\frac12 f(0)+\frac12 f(2)=0+2=2$，确有 $1\le 2$。二阶导数条件不仅控制局部弯曲，也控制任意两点间的弦。 ♦

上面的命题给出了「二阶导数非负 $\Rightarrow$ 凸」。在二阶导数存在时，反向判断也成立；一个方便的桥梁是对称差商。

命题 16.13（凸性的二阶导数判据）　设 f 在开区间 I 上二阶可导，则

$$f\text{ 凸}\quad\Longleftrightarrow\quad f''(x)\ge 0\quad(x\in I).$$

证明　$f''\ge 0$ 蕴含 f 凸已在命题 16.12 中证明。反过来设 f 凸，固定 $x\in I$，取足够小的 h 使 $x-h,x+h\in I$。把 x 写成两端点的中点，凸性给出

$$2f(x)\le f(x+h)+f(x-h).$$

因此对 $h\neq 0$ 有

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\ge 0. \tag{16.1}$$

分子、分母都趋于 0。对 $h\to 0^+$ 或 $h\to 0^-$ 用一次 L'Hôpital 法则，商的极限等于

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}.$$

而右式可拆成

$$\frac12\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac12\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}\longrightarrow f''(x).$$

因此对称差商的极限等于 $f''(x)$，即

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

结合 (16.1) 得 $f''(x)\ge 0$。x 任意，结论成立。 ■

例 16.14　用对称差商检测弯曲方向　对 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处计算对称差商，并说明它为何与凸性一致。

解　直接计算

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)-2f(1)}{h^2}=\frac{(1+h)^2+(1-h)^2-2}{h^2}=2.$$

它恒等于 $f''(1)=2>0$，所以每个对称弦的中点都高于函数图像，正是凸函数的几何特征。若把 x^2 换成 $-x^2$，同一计算得到 -2，不等式方向随之反转。 ♦

本讲小结

- 内点局部极值且可导时 $f'(x_0)=0$；逆命题不成立，x^3 在 0 是反例。
- Rolle 定理要求 f 在 $[a,b]$ 连续、在 (a,b) 可导且 $f(a)=f(b)$，结论是某个内点导数为 0。
- 若 f 在 $[a,b]$ 连续、在 (a,b) 可导，中值定理给出 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$；若 $f'\geq 0$ 则 f 非减，若 $f'>0$ 则 f 严格递增；特别有 $e^x\geq 1+x$。
- 在上述连续、可导条件下，若再有 $f'>0$，逆函数 g 连续且可导，且 $g'(y)=1/f'(g(y))$；若还要 g' 连续，需另加条件如 f' 连续。求导点要先换回原变量。
- Cauchy 中值定理给出 $f'(c)(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a))$；L'Hôpital 法则将满足条件的 $0/0$ 或 ∞/∞ 商的极限化为导数之比。
- 若 $f,\dots,f^{(k-1)}$ 在 $[a,b]$ 连续、$f^{(k)}$ 在 (a,b) 存在，Taylor 公式给出 $f(b)=P_{k-1}(b)+\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-a)^k$，其中 $c\in(a,b)$。
- 二阶可导时，f 凸当且仅当 $f''\geq 0$；对称差商是检验这个方向的局部量。

练习

16.1 ★　判断真假并说明理由：若 $f'(x_0)=0$，则 f 在 x_0 取得局部极值。

16.2 ★　对 $f(x)=x^2-4x$ 在 $[0,4]$ 应用 Rolle 定理，求一个符合结论的 c。

16.3 ★　对 $f(x)=x^2+2x$ 在 $[0,2]$ 应用中值定理，求所有可能的 c。

16.4 ★★　用中值定理证明 $e^x\geq 1+x$，并指出等号成立的 x。

16.5 ★★　设 f 在 0 连续、在去心邻域可导且 $f'(x)\to L$。证明 $f'(0)=L$。

16.6 ★★　令 $f(x)=x^2$、$g(x)=x^2+2x+1$，在 $[0,1]$ 上求一个满足 Cauchy 中值定理的 c，并代回验证。

16.7 ★★　用 L'Hôpital 法则求 $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x^2}$；写明每次应用前的未定型。

16.8 ★★　对 e^x 在 0 处用二次 Taylor 多项式表示 e，并给出 Lagrange 余项。

16.9 ★★★　设 f 在开区间 I 上二阶可导且 $f''(x)\geq 0$。用中值定理证明 f 在 I 上凸；特别核对 $f(x)=x^2$ 在 $0,2$ 的中点不等式。

16.10 ★★★　设 $f(0)=0$，且 f 在 0 的某邻域内二阶可导，f'、f'' 连续。令 $g(x)=f(x)/x$ $(x\neq 0)$、

$g(0)=f'(0)$。用 L'Hôpital 法则证明 $g'(0)=f''(0)/2$，并求该邻域内 $x\neq 0$ 时的 $g'(x)$。

练习答案与提示

16.1 假。$f(x)=x^3$ 满足 $f'(0)=0$，但 $x<0$ 时 $f(x)<0$，$x>0$ 时 $f(x)>0$，所以 0 不是局部极值点。

16.2 $f(0)=0=f(4)$，连续可导；$f'(x)=2x-4$，故 $c=2$。

16.3 平均变化率为 $\frac{8-0}{2}=4$；$f'(c)=2c+2=4$，所以 $c=1$，且 $1\in(0,2)$。

16.4 对 $x\neq 0$，中值定理给出 $e^x-1=e^c x$，其中 c 在 $0,x$ 之间。$x>0$ 时 $e^c>1$，$x<0$ 时 $e^c<1$ 且乘以负数反向，均得 $e^x>1+x$；$x=0$ 取等号。

16.5 对 $x\neq 0$，中值定理给出 $[f(x)-f(0)]/x=f'(c_x)$，其中 c_x 位于 $0,x$ 之间。故 $c_x\to 0$，差商趋于 L，所以 $f'(0)=L$。

16.6 增量为 $f(1)-f(0)=1$、$g(1)-g(0)=3$。导数分别是 $2c$、$2c+2$，定理方程为 $2c\cdot 3=(2c+2)\cdot 1$，解得 $c=1/2$；代入两边均为 3。

16.7 第一次得 $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{2x}$，仍为 $0/0$；第二次得 $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2}=1/2$。

16.8 $e=1+1+1/2+e^c/6=5/2+e^c/6$，其中某个 $c\in(0,1)$。

16.9 由 $f''\geq 0$，对任意 $u<v$ 在 $[u,v]$ 上对 f' 用中值定理，得 $f'(v)-f'(u)=f''(\xi)(v-u)\geq 0$，所以 f' 非减。任取 $x_1<z<x_2$，分别在 $[x_1,z]$、$[z,x_2]$ 上用中值定理，得左右割线斜率分别为 $f'(u),f'(v)$，其中 $u<z<v$，故左斜率不大于右斜率。交叉相乘得

$$f(z)\leq \frac{x_2-z}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{z-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

令 $z=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ 即得凸性不等式，端点情形取等号。对 $f(x)=x^2$、$x_1=0,x_2=2,z=1$，两侧为 $1\leq 2$。

16.10 在 0，先写成

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}.$$

对 $x\neq 0$，商法则给出 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$。上式分子、分母均趋于 0；分别从左右应用两次 L'Hôpital，第一次得到 $\lim[f'(x)-f'(0)]/(2x)$，第二次得到 $\lim f''(x)/2=f''(0)/2$。f'、f'' 的连续性保证两次法则的极限条件。

第 17 讲

Taylor 余项与上下和

Taylor Remainders and Upper-Lower Sums

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 17；习题集 8 第 2 题的 Taylor 级数应用、第 4 题的单点例外，习题集 9 第 1 题的积分单调性。

本讲目标

(1) 会用 Lagrange 余项给 Taylor 多项式的误差上界，并理解导数在展开点全为零并不保证函数为零。

(2) 能定义区间的分割、上下和，并从函数在每个小区间上的上确界和下确界计算它们。

(3) 掌握分割加细时下和不减、上和不增的证明，并会构造共同加细。

(4) 理解上积分、下积分和 Darboux 可积性的定义，能用 $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$ 判据判断可积性。

(5) 能识别 Dirichlet 函数等上下和永远分离的反例，并为下一讲连续函数可积的证明准备统一连续性的语言。

第 16 讲的 Taylor 定理给出一个中间点 c，使误差恰好等于 $f^{(k)}(c)(x-a)^k/k!$。本讲先把这个等式变成可计算的误差界，再把「用小矩形逼近面积」的直觉写成上下和。两条线最后在同一个问题上相遇：当分割越来越细时，上和与下和是否能挤到同一个数？

17.1 Taylor 余项的定量控制

用 $1+x+x^2/2$ 近似 $e^{1/2}$，误差能保证小于多少？第 16 讲的 Taylor 公式给出精确的余项表达式；本节把它转成可计算的上界。

设 P_{k-1} 是 f 在 a 处的 Taylor 多项式。Taylor 定理说，对于区间端点 a,b，存在 c 位于两者之间，使

$$f(b)-P_{k-1}(b)=\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-a)^k.$$

因此误差的大小不需要知道 c 的具体位置，只要能在这段区间上控制 $f^{(k)}$。

命题 17.1（Lagrange 余项的误差界）　设展开中心 a 与目标点 x 属于区间 J，$k \geq 1$，$f, f', \dots, f^{(k-1)}$ 在 J 上连续，$f^{(k)}$ 在 J 的内部存在，且对所有内部点 t 都有 $|f^{(k)}(t)| \leq M$。令 P_{k-1} 为 f 在 a 处的 Taylor 多项式。则

$$|f(x) - P_{k-1}(x)| \leq \frac{M}{k!}|x-a|^k.$$

当 $|x-a| \leq r$ 时，进一步有 $|f(x)-P_{k-1}(x)| \leq Mr^k/k!$。这里 J 是包含 a, x 的区间；若 $x = a$，则 $P_{k-1}(a) = f(a)$，误差为 0。

证明　当 $x > a$ 时，Taylor 定理给出某个 $c \in (a, x)$ 使误差等于 $f^{(k)}(c)(x-a)^k/k!$。若 $x < a$，对 $g(t) = f(a-t)$ 在 $[0, a-x]$ 上应用 Taylor 定理，得到同一形式，且中间点对应到 (x, a) 内的 c。取绝对值并使用 $|f^{(k)}(c)| \leq M$ 即得第一式；第二式由 $|x-a|^k \leq r^k$ 得到。 ■

■ **例 17.1　去掉高阶导数界会怎样**　令 $f(x) = x^{3/2}$，$0 \leq x \leq 1$，取 $k = 2$。说明为什么不能得到一个对全区间统一的有限误差常数 M。

解　有 $f(0) = f'(0) = 0$，所以 $P_1(x) = 0$，而 $f''(x) = 3/(4\sqrt{x})$ 在 $(0,1)$ 上无界。若存在有限 M 使 $x^{3/2} \leq Mx^2/2$ 对每个 $x > 0$ 成立，就会有 $1/\sqrt{x} \leq M/2$；令 $x \to 0^+$，左边无界，矛盾。Taylor 定理仍给每个固定 x 一个中间点余项，但没有导数界就不能给出同一个 M 控制整个区间。 ♦

■ **例 17.2　指数函数的二次近似**　用 $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$ 近似 e^x，在 $0 \leq x \leq 1$ 上给出统一误差界。

解　指数函数的三阶导数仍为 e^x，而在 $[0,1]$ 上 $e^x \leq e$。命题 17.1 取 $k = 3$、$M = e$，得到

$$|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)| \leq \frac{e}{6}x^3 \leq \frac{e}{6}.$$

在 $x = 1$ 时，前面得到的 Taylor 公式还给出 $e = 5/2 + e^c/6$，其中 $c \in (0,1)$；因此误差为正且严格小于 $e/6$。这说明「上界」不等于误差恰好取到上界。若展开中心仍为 0、但 x 可以是任意实数，则中间点 c_x 位于 0 与 x 之间，故 $e^{c_x} \leq e^{|x|}$，从而

$$|e^x - P_2(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^3}{6}.$$

特别地，$|x| \leq 1$ 时可统一用 $e/6$ 控制误差；此处对负 x 使用的是命题中允许的反向区间版本。更一般地，对每个 $0 < x \leq 1$，余项为 $e^{c_x}x^3/6$，其中 $0 < c_x < x$。所以

$$\frac{x^3}{6} < e^x - P_2(x) < \frac{e^x x^3}{6} \leq \frac{ex^3}{6}.$$

导数的正号还给出一侧结论 $P_2(x) < e^x$；只知道绝对值误差界时，通常不能判断近似多项式在函数上方还是下方。 ♦

■ **例 17.3　增加阶数如何改善误差**　在 $|x| \leq 1$ 上比较 e^x 的三次 Taylor 多项式 $P_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ 的误差界。

解　四阶导数仍为 e^x，所以 $M=e$、$k=4$。于是

$$|e^x - P_3(x)| \le \frac{e}{4!}|x|^4 \le \frac{e}{24}.$$

相比二次近似的 $e/6$，阶数提高一阶后界缩小为原来的 $1/4$。实际误差通常更小，但这个简单界对所有 $|x|\le 1$ 同时有效。 ♦

从误差界还可以读出两种不同的改进方式。固定阶数 k，把距离 r 减半，界会乘上 2^{-k}。若第 k 阶导数界记为 M_k，则相邻阶的界之比为

$$\frac{M_{k+1}r^{k+1}/(k+1)!}{M_k r^k/k!} = \frac{M_{k+1}}{M_k}\frac{r}{k+1}.$$

这里分别选取正的导数上界 M_k, M_{k+1}。只有在同一个常数 M 同时控制这两阶导数、并用它计算两阶误差界时，比值才是 $r/(k+1)$；此时 $r\le 1$ 会使界继续缩小。一般函数的导数界可能随阶数增大，所以即使 $r\le 1$，增阶也不自动保证这个估计更小。

例如对 e^x，$|e^{(k)}(c)| = e^c$。在 $0\le x\le 1$ 上，余项不超过 $e/k!$；而在 $0\le x\le 2$ 上，简单估计只能给出 $e^2 2^k/k!$。同一个 Taylor 多项式在更远的区间上会有更松的统一界。使用余项时，必须把导数范围和展开距离一同写清楚。

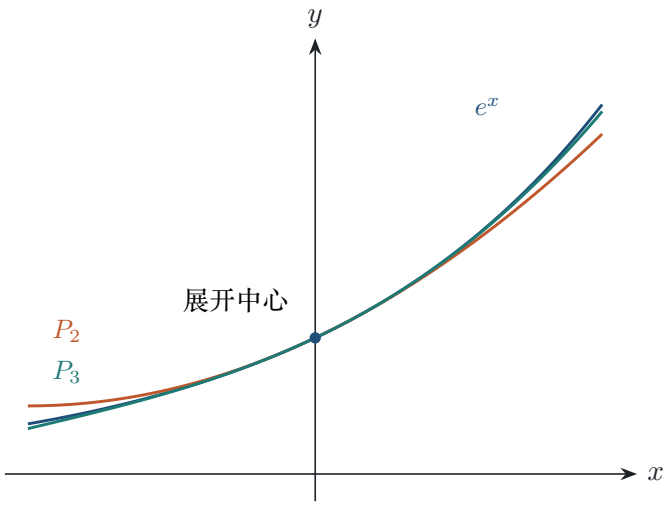


图 17.1　P_3 在展开中心附近比 P_2 更贴近 e^x，余项界随阶数提高而缩小。

图 17.1 中三条曲线在 $x=0$ 处匹配相应阶的导数。离开中心后曲线会分开，但命题给出一个只依赖区间长度和导数上界的保险界。

■ **例 17.4　不等距点上的误差估计**　仍以 e^x 为例，求二次 Taylor 多项式在 $x=1/2$ 处的误差上界，并与在 $x=1$ 处的上界比较。

解　在 $[0,1]$ 上取三阶导数界 $M=e$。当 $x=1/2$ 时，命题给出

$$|e^{1/2} - P_2(1/2)| \le \frac{e}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{e}{48}.$$

而 $P_2(1/2) = 1 + 1/2 + 1/8 = 13/8$，所以这次估计具体给出

$$\frac{13}{8} - \frac{e}{48} \le e^{1/2} \le \frac{13}{8} + \frac{e}{48}.$$

在 $x = 1$ 处则是 $e/6$。距离减半后，三次幂使上界缩为原来的 $1/8$。这比较的是可证明的误差界，并不声称真实误差恰好按 $1/8$ 缩放。 ♦

■ **例 17.5　所有 Taylor 系数为零的平坦函数**　定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^{-1/x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

已知它在 0 处无穷可导且 $f^{(k)}(0) = 0$。说明它在 0 的每个 Taylor 多项式是什么，并判断 $f(1)$。

解　每一阶系数 $f^{(j)}(0)/j!$ 都为零，所以任意有限阶 Taylor 多项式都是恒等于 0 的多项式。但 $f(1) = e^{-1} > 0$，故函数不等于它的 Taylor 多项式。Taylor 多项式是局部数据的有限截断；即使所有有限阶导数都为零，也不能单独推出函数在邻域内恒为零。 ♦

这些导数在 0 处为零，可以从右侧求导形式看出：归纳求导后，每阶导数都是 $p_k(1/x)e^{-1/x^2}$，其中 p_k 是多项式。令 $t = 1/x$，任意多项式 $p(t)$ 都满足 $p(t)e^{-t^2} \to 0$；差商多出的因子 $1/x = t$ 也仍被指数项压到 0。左侧函数恒为 0，于是各阶导数都能在 0 接续为 0。

平坦函数的现象也说明 Taylor 定理和 Taylor 级数要分开看。任取有限阶 k，Taylor 定理都只保证存在一个 c_k，使余项为 $f^{(k)}(c_k)x^k/k!$；它不说这些 c_k 能选成同一个点，也不直接保证当 $k \to \infty$ 时余项趋于零。若能另行证明 $M_k|x|^k/k! \to 0$，才能据此推出 Taylor 多项式收敛到函数值。

对指数函数，$M_k = e$ 在 $[0,1]$ 上可固定，且 $e/k! \to 0$，所以 Taylor 多项式确实收敛到 e^x。例如 $k! \ge 2^{k-1}$，故 $e/k! \le e/2^{k-1} \to 0$。平坦函数则说明「每个固定阶的系数都为零」并没有提供 M_k 如何变化的控制。

■ **例 17.6　周期导数与 Taylor 级数**　设可导函数 $S, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $S' = C$、$C' = S$、$S(0) = 0$、$C(0) = 1$。证明

$$S^{(2k)}(x) = S(x), \qquad S^{(2k+1)}(x) = C(x),$$

并用 Taylor 余项证明 $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}/(2k+1)!$。

解　由 $S' = C$、$C' = S$ 交替求导，归纳得到 $S^{(2k)} = S$、$S^{(2k+1)} = C$。因此偶数阶导数在 0 的值为 0，奇数阶导数在 0 的值为 1，Taylor 多项式只留下奇次项。

若 $x = 0$，结论直接成立。以下固定 $x \ne 0$，令 J_x 为端点 $0, x$ 之间的闭区间。S, C 连续，故

$$M_x = \max_{t \in J_x} \max\{|S(t)|, |C(t)|\} < \infty.$$

对次数 $2N+1$ 的 Taylor 多项式应用余项公式，存在 c_N 位于 $0, x$ 之间，使

$$S(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{S^{(2N+2)}(c_N)}{(2N+2)!} x^{2N+2}.$$

最后一项的绝对值不超过 $M_x|x|^{2N+2}/(2N+2)!$；固定 x 后，这个界随 $N\to\infty$ 趋于 0，因为相邻两项之比为 $x^2/((2N+3)(2N+4))\to 0$。于是 Taylor 多项式的极限就是 $S(x)$。例如在 $x=1$ 处，取到 $N=3$ 的部分和为 $5923/5040$，误差不超过 $M_1/8!$。 ♦

想一想　为什么余项界中出现的是 $|b-a|^k$，而不是 $|b-a|^{k-1}$？

答　Taylor 多项式已经匹配到 $k-1$ 阶导数，前 $k-1$ 个幂次都被消去；第一次未被匹配的项由 k 阶导数控制，因此余项带有 k 次幂。若只写成 $|b-a|^{k-1}$，会丢掉提高阶数所带来的实际收敛速度。

易错提醒　「所有 Taylor 系数为零，所以函数就是零函数」是错误的。平坦函数在 0 的所有导数都为零，但 $f(1)=e^{-1}$；只有在额外知道 Taylor 级数确实收敛到函数时，才能把无限展开当作函数本身。

17.2　分割与上下和

把 $[-2,2]$ 切成 $[-2,-1]$、$[-1,0]$、$[0,1]$、$[1,2]$，对 $f(x)=x^2+1$，每段的最低与最高函数值会给出两种不同的矩形面积。要把这种计算推广到任意有界函数，首先要记录切点，而不只是段数。

定义 17.2（分割）　区间 $[a,b]$ 的一个**分割**（partition）是有限点集

$$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}.$$

第 i 个小区间为 $I_i=[x_{i-1},x_i]$，长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$。

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界。由确界性质，每个小区间上的值集都有上确界和下确界，记为

$$M_i=\sup_{x\in I_i} f(x),\qquad m_i=\inf_{x\in I_i} f(x).$$

定义 f 关于 P 的**上和**（upper sum）和**下和**（lower sum）为

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,\qquad L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i.$$

由于 $m_i\le M_i$ 且 $\Delta x_i>0$，总有 $L(f,P)\le U(f,P)$。再取全区间上的界 $m\le f(x)\le M$，便有

$$m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a).$$

因此下和集合与上和集合都非空且有界，后面取它们的上确界、下确界会得到有限实数。把两和相减可见总差距由各小区间分别贡献：

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i.$$

每项是该段上、下确界之差乘以段长；波动大的区间若更短，对总差距的贡献也会随之减小。若在每段任选一点 $\xi_i \in I_i$，则 $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$，逐项乘以正长度再求和可得

$$L(f,P) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le U(f,P).$$

所以用端点或其他采样点取矩形高度，所得面积和都被上下和夹住；两和足够接近时，采样位置的选择也不会造成大的总误差。

直观理解　每段的上矩形按最高值计面积，下矩形按最低值计面积。两者之间的空隙就是这一段造成的估计误差；总差距把各段空隙相加。因此即使函数在少数位置变化很大，只要把这些位置限制在很短的小区间内，也可能使总差距很小。

■ **例 17.7**　**上确界未必取到**　在 $[0,1]$ 上令 $f(x)=x$（$0 \le x < 1$），并令 $f(1)=0$。对单段分割 $P=\{0,1\}$ 求上下和。

解　函数值集是 $[0,1)$，所以 $m_1=0$、$M_1=1$；其中没有函数值等于 1，故 M_1 不是最大值，而只是上确界。区间长度为 1，因此 $L(f,P)=0$、$U(f,P)=1$。对一般有界函数，用最大值、最小值替换上确界、下确界会漏掉这种情形。 ♦

■ **例 17.8**　**计算 x^2+1 的上下和**　令 $f(x)=x^2+1$，区间为 $[-2,2]$，取分割 $P=\{-2,-1,0,1,2\}$。求 $L(f,P)$ 与 $U(f,P)$。

解　每段长度都是 1。在 $[-2,-1]$ 和 $[1,2]$ 上，最小值为 2、最大值为 5；在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上，最小值为 1、最大值为 2。因此

$$L(f,P) = 2+1+1+2 = 6, \qquad U(f,P) = 5+2+2+5 = 14.$$

上下和之间的差距 8 来自每个小区间中函数波动没有被矩形完全消除。 ♦

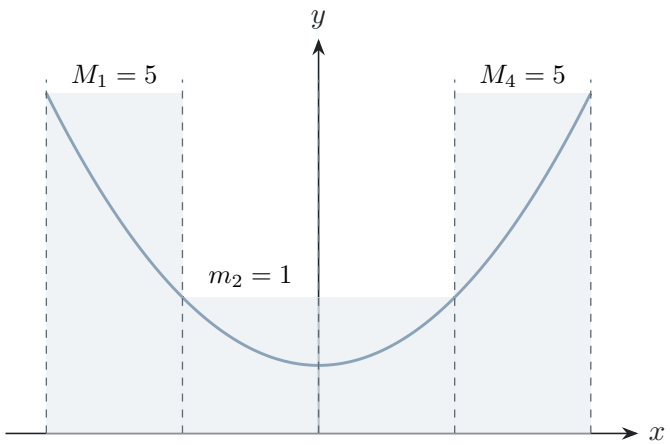


图 17.2　同一分割下，矩形的高由各小区间上的上确界决定；下和矩形的高由下确界决定。

图 17.2 只画出了上矩形的轮廓以保持图面清楚；相应的下矩形把每个高替换为 m_i。因为函数在每段上不恒定，上下矩形之间会留下缝隙。

■ **例 17.9　极值点落在小区间内部**　对 $f(x)=x^2+1$ 在 $[-1,1]$ 上取单段分割 $P=\{-1,1\}$，求上下和。

解　函数在内部点 $x=0$ 取最小值 1，在两个端点取最大值 2；区间长度为 2。所以 $L(f,P)=1\cdot 2=2$、$U(f,P)=2\cdot 2=4$。只检查端点仍能找到最大值，却会漏掉内部最小值；找每段的确界时必须同时检查临界点和端点。 ♦

■ **例 17.10　常数函数的退化情形**　对 $f(x)=3$ 在 $[0,2]$ 上任取分割 P，求上下和。

解　每个小区间上 $m_i=M_i=3$，所以

$$L(f,P)=U(f,P)=\sum_i 3\Delta x_i=3\sum_i \Delta x_i=3(b-a)=6.$$

这里上下和立刻相等，说明「分割细」并不是常数函数可积的必要条件。 ♦

■ **例 17.11　线性函数的均匀分割**　令 $f(x)=x$，在 $[0,1]$ 上取均匀分割 $x_j=j/4\,(j=0,1,2,3,4)$。计算上下和及其差。

解　每段长度 $1/4$，单调性给出第 j 段的下确界为 $(j-1)/4$、上确界为 $j/4$。因此

$$L(f,P)=\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8},$$

$$U(f,P)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+1\right)=\frac{5}{8},\qquad U(f,P)-L(f,P)=\frac{1}{4}.$$

把每段继续等分，差距会按最大段长线性缩小。 ♦

计算上下和时，关键通常不是把每个函数值都积分，而是逐段找出 m_i,M_i。如果函数在一段上单调递增，则左端点给下确界、右端点给上确界；若函数先降后升，极值点落在哪个小区间里就会改变相应的 m_i。因此先把极值点和分割切点画在同一条数轴上，可以避免漏掉内部极小值。

对于 $f(x)=x^2+1$ 的原分割，函数在 $[-2,-1]$ 上递减、在 $[-1,0]$ 上继续递减到内部最低点 0，而在 $[0,1]$ 上递增、在 $[1,2]$ 上继续递增。零点 0 是函数的全局最低点，因此两个中间小区间的下确界都是 1。若误把端点值 2 当作这两段的下确界，就会把下和从 6 错算成 8；图中橙色上矩形的标注和曲线最低点都可以用来核对。

■ **例 17.12　负值函数的上下和**　令 $f(x)=x-1$，在 $[0,1]$ 上取分割 $P=\{0,1/2,1\}$，计算上下和。这个例子里每段的上下确界均为负数或零。

解　函数严格递增，故第一段上下确界为 -1 与 $-1/2$，第二段为 $-1/2$ 与 0。两段长度均为 $1/2$，于是

$$L(f,P)=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4},\qquad U(f,P)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(0)=-\frac{1}{4}.$$

仍有 $L \le U$。负的矩形高度乘正长度不会改变不等式方向；方向来自 $m_i \le M_i$，不来自这些数的正负。 ♦

想一想　为什么定义上下和时使用上确界、下确界，而不是随便挑一个采样点？
答　采样点只产生一个近似值，不能保证它控制整段函数。上确界和下确界分别保证上和在图像上方、下和在图像下方，并且不依赖函数是否在小区间端点取到最大最小值。

17.3　分割加细与上下和的单调性

在分割 $\{-2,-1,0,1,2\}$ 中加入 $-1/2$ 与 $1/2$ 后，上下和会朝哪个方向变化？要回答这个问题，先把「加细」准确地定义为保留旧切点并加入新切点；这样每个新小区间都包含在某个旧小区间中。

定义 17.3（加细）　若分割 P_2 包含分割 P_1 的每一个切点，就称 P_2 是 P_1 的**加细**（refinement），写作 $P_1 \subseteq P_2$。把两个分割的切点合并，得到的分割称为它们的**共同加细**（common refinement）。

引理 17.4（加细不降低下和、不增加上和）　若 P_2 是有界函数 f 的分割 P_1 的加细，则

$$L(f,P_1) \le L(f,P_2) \le U(f,P_2) \le U(f,P_1).$$

思路　只需先处理一个旧小区间中加入一个切点的情形。新小区间上的上确界不超过旧小区间上的上确界；把两个新矩形的面积相加后，旧的上矩形面积仍然更大。下和的不等式方向相反。多个切点逐个加入即可。

证明　设旧小区间为 $[u,v]$，在其中加入 w，得到 $[u,w]$ 与 $[w,v]$。记旧区间的上确界为 M，新两段的上确界为 M_1, M_2。因为新区间包含关系，$M_1, M_2 \le M$，故

$$M_1(w-u) + M_2(v-w) \le M(w-u) + M(v-w) = M(v-u).$$

对所有旧小区间相加，得到 $U(f,P_2) \le U(f,P_1)$。同理，若旧下确界为 m、新下确界为 m_1, m_2，则 $m_1, m_2 \ge m$，从而 $L(f,P_2) \ge L(f,P_1)$。中间不等式是每个小区间上 $m_i \le M_i$ 的总和。 ■

■ **例 17.13　把两个切点加入四段分割**　对 $f(x) = x^2 + 1$ 在 $[-2,2]$ 上考虑分割

$$P_1 = \{-2,-1,0,1,2\}.$$

在此分割中加入切点 $-1/2$ 与 $1/2$，求新分割的上下和。

解　新切点把 $[-1,0]$ 分为 $[-1,-1/2]$、$[-1/2,0]$，把 $[0,1]$ 分为 $[0,1/2]$、$[1/2,1]$。各段长度分别为 $1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1$；对应的 (m_i, M_i) 为

$$(2,5),\ (5/4,2),\ (1,5/4),\ (1,5/4),\ (5/4,2),\ (2,5).$$

因此

$$L(f,P_2) = \frac{25}{4}, \qquad U(f,P_2) = \frac{53}{4}.$$

这里的 P_2 若只加入 $-1/2, 1/2$，确实是 P_1 的加细；但它的上下和仍未必接近积分值，继续加细才会逐步缩小差距。 ♦

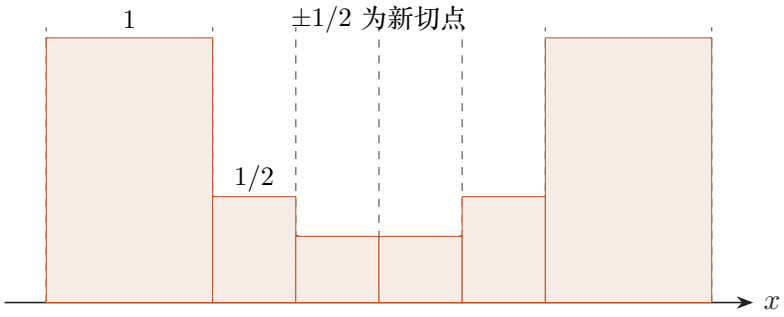


图 17.3　加入 $-1/2$ 与 $1/2$ 后，小区间变多，上矩形总面积不增。

图 17.3 中原来的大矩形被拆成几个小矩形；每个小矩形的高不会超过所属旧矩形的高。下矩形则相反，拆分只会把原来保守的低估抬高。

如果一次加进多个切点，可以把它们按从左到右排序后逐个加入。每加入一个点，分割仍然细化前一分割，所以反复应用单点情形，得到相同的单调性结论。这个逐步过程也解释了为什么加细引理不要求新切点等距。

■ **例 17.14　只细化一段**　对 $P_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$，只在 $[-1, 0]$ 中加入 $-1/2$。求 $f(x) = x^2 + 1$ 的新下和，并与原下和比较。

解　未改动的三段下确界仍为 $2, 1, 2$，长度均为 1。被拆开的两段分别是 $[-1, -1/2]$ 和 $[-1/2, 0]$，下确界分别为 $5/4$ 和 1，长度各为 $1/2$。因此

$$L(f, P_2) = 2 + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{49}{8}.$$

原下和是 $6 = 48/8$，新下和增加 $1/8$，符合加细引理。即使只改动一段，总和也只需替换那一段对应的面积。 ♦

■ **例 17.15　共同加细的用途**　设 $f(x) = x$，$P_1 = \{0, 1/2, 1\}$、$P_2 = \{0, 1/3, 1\}$ 是 $[0, 1]$ 的两个分割。写出共同加细 P，计算三者的上下和，并验证加细引理给出的比较。

解　合并切点得到

$$P = \{0, 1/3, 1/2, 1\}.$$

直接按各段端点计算，得到

$$L(f, P_1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad U(f, P_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$L(f, P_2) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \qquad U(f, P_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9},$$

$$L(f, P) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{36}, \qquad U(f, P) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{36}.$$

共同加细的下和高于两个原下和，上和低于两个原上和。这里 P_1 与 P_2 互不包含，不能直接套用加细引理；合并切点后，四个和才有可逐项追踪的比较链。 ♦

命题 17.5（任意下和不超过任意上和）　设 f 有界，P_1, P_2 是 $[a,b]$ 的任意两个分割，则

$$L(f,P_1) \le U(f,P_2).$$

证明　令 $R = P_1 \cup P_2$，即把两个分割的切点合并。R 同时加细 P_1 和 P_2，所以由加细引理及 $L(f,R) \le U(f,R)$，

$$L(f,P_1) \le L(f,R) \le U(f,R) \le U(f,P_2).$$

这说明比较不同分割时，不能只看每个分割自身的上下和；共同加细把它们放进同一条链。 ■

易错提醒　加细的定义是「保留旧切点并加入新切点」，不是「重新选一组同样多的切点」。如果删掉旧切点，两个分割之间没有包含关系，就不能直接使用引理 17.4。

17.4　上下积分与 Darboux 判据

对 $f(x) = x$ 在 $[0,1]$ 上取四等分，已经得到下和 $3/8$、上和 $5/8$。继续作均匀加细时，两者会向同一个数靠拢；本节用所有分割的极限位置定义这个数，并给出何时它存在的判据。命题 17.5 说明任意下和都不超过任意上和，因此所有下和有一个共同上界，所有上和有一个共同下界。

定义 17.6（上积分、下积分与可积性）　设 $a < b$ 且 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 有界。定义 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**（upper integral）与**下积分**（lower integral）为

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_P U(f,P), \qquad \underline{\int_a^b} f = \sup_P L(f,P),$$

其中 P 遍历 $[a,b]$ 的所有分割。若上积分与下积分相等，就称 f 在 $[a,b]$ 上**Riemann 可积**（Riemann integrable），公共值记作 $\int_a^b f$。

■ **例 17.16　线性函数的上积分与下积分**　对 $f(x) = x$ 在 $[0,1]$ 上的均匀分割 $x_j = j/n$，求上、下和并确定上积分与下积分。

解　每段上 $m_j = (j-1)/n$、$M_j = j/n$、长度为 $1/n$，故

$$L(f,P_n) = \frac{n-1}{2n}, \qquad U(f,P_n) = \frac{n+1}{2n}, \qquad U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n}.$$

命题 17.5 给出 $L(f,P_n) \le \underline{\int_0^1} f \le \overline{\int_0^1} f \le U(f,P_n)$。令 $n \to \infty$，夹逼得上下积分都等于 $1/2$。这个例子从定义直接算出积分值，不需要先用微积分基本定理。对任意分割 P，有

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_i (\Delta x_i)^2 \le (\max_i \Delta x_i) \sum_i \Delta x_i = \max_i \Delta x_i.$$

所以只要最大段长趋于 0，上下和之差也趋于 0；这里已经能看见后续证明连续函数可积时会用到的估计形式。 ♦

命题 17.7（Darboux 可积判据）　有界函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，当且仅当对每个 $\varepsilon>0$，存在分割 P 使

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

思路　正向从共同积分值的上下分别逼近，之后取共同加细，让两个估计落在同一个分割上。反向利用定义和共同加细比较，把下和、下积分、上积分、上和排成不等式链，再把链两端的差压到任意小。

证明　若 f 可积，令公共积分值为 I。由上积分是所有上和的下确界，可取分割 P_1 使 $U(f,P_1)<I+\varepsilon/2$；由下积分是所有下和的上确界，可取 P_2 使 $L(f,P_2)>I-\varepsilon/2$。取二者共同加细 P，则

$$I-\varepsilon/2<L(f,P)\le U(f,P)<I+\varepsilon/2,$$

所以差小于 ε。

反过来，若对每个 ε 都有这样的 P，由下积分和上积分的定义以及命题 17.5，对任意分割 P 有

$$L(f,P)\le\underline{\int_a^b}f\le\overline{\int_a^b}f\le U(f,P).$$

因此

$$0\le\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f\le U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，两者相等，故 f 可积。 ■

判断可积性的两种做法　要证明可积，就为每个给定的 ε 构造一个上下和差小于 ε 的分割；要证明不可积，就找一个固定的正数 ε_0，说明任何分割的上下和差都至少为 ε_0。前者是构造逼近，后者是排除所有可能的逼近。

■ **例 17.17　一个点上的例外不破坏可积性**　在 $[-1,1]$ 上定义 $f(0)=0$，而 $x\neq0$ 时 $f(x)=1$。证明 f 可积并求积分。

解　给定 $\varepsilon>0$，取 $0<\delta<\min(1,\varepsilon/2)$，并令 $P=\{-1,-\delta,0,\delta,1\}$。异常值 $f(0)=0$ 只影响中间总长为 2δ 的两段；外侧两段上函数恒为 1。因此

$$L(f,P)=2-2\delta,\qquad U(f,P)=2,\qquad U(f,P)-L(f,P)=2\delta<\varepsilon.$$

Darboux 判据说明 f 可积。对任意这样的 δ，下积分至少为 $2-2\delta$，上积分至多为 2；令 $\delta\to0$，再用下积分不超过上积分，得二者都等于 2。单个点处的函数值会扩大局部上下差，但可把这段差距压进任意短的区间。 ♦

■ **例 17.18　Dirichlet 函数不可积**　在 $[0,1]$ 上定义

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q},\\ 1, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

证明它不是 Riemann 可积的。

解　由前几讲的稠密性结论，任意非退化小区间内部同时含有有理数和无理数；两种函数值 0 与 1 都实际取到。因此每段的下确界是 0、上确界是 1。于是对任意分割 P，都有

$$L(f,P)=0,\qquad U(f,P)=\sum_{i}\Delta x_i=1.$$

其中 $\sum_i \Delta x_i = x_n - x_0 = 1$，所以每个分割都有 $L=0$、$U=1$。上下和差恒为 1，不可能小于例如 $\varepsilon = 1/2$。Darboux 判据因此判定 f 不可积。与单点例外不同，这里每段都有同样大小的上下差，任何有限切点都不能把波动限制在短区间里。 ♦

■ **例 17.19**　**上下积分夹住积分**　设 $f \le g$ 且二者都在 $[a,b]$ 上可积。说明积分满足 $\int_a^b f \le \int_a^b g$，并在 $f(x)=x$、$g(x)=x+1$ 的 $[0,1]$ 例子中计算两边。

解　对任意分割，每个小区间上的下确界满足 $m_i(f) \le m_i(g)$，故 $L(f,P) \le L(g,P)$；取上确界得到下积分不等式。因为 f, g 都可积，下积分就是相应的积分值。

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

对 $g(x)=x+1$，每个小区间上的上下确界都比 x 的对应确界大 1。在均匀分割 P_n 上，$L(g,P_n)=1+(n-1)/(2n)$、$U(g,P_n)=1+(n+1)/(2n)$，二者都趋于 $3/2$，故 $\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x = 3/2$，确有 $1/2 \le 3/2$。 ♦

■ **例 17.20**　**为什么要先要求有界**　考虑 $f(x)=1/x$ 在 $(0,1]$。说明它不能直接套用本讲的上下积分定义。

解　在 $(0,1]$ 上，f 没有有限上界：对任意 $M>0$，取足够小的 $x>0$ 就有 $1/x > M$。因此它不是闭区间上的有界函数。上、下确界和有限矩形面积的定义需要每个小区间有有限的上下界；若要研究 $1/x$ 在 $(0,1]$ 的积分，必须先引入反常积分或截断区间 $[\delta,1]$，那是另一套定义。 ♦

想一想　若某一个分割的上下和很接近，是否就能断言函数可积？

答　不能。可积性要求对每个 $\varepsilon>0$ 都能找到分割使差小于 ε。只找到一次小差距只能说明在一个精度下近似较好，不能排除更细精度始终失败的情况；Darboux 判据中的「对每个」不能省略。

易错提醒　「上积分是某个上和、下积分是某个下和」是错误说法。上积分是所有上和的下确界，下积分是所有下和的上确界；只有在可积时二者才合并为同一个积分值。

连续函数在闭区间上的可积性将在后续讲中证明：核心步骤是先得到统一的连续性，再选择所有小区间长度都小于同一个 δ。本讲先把上下和的判据建立起来，后续只需证明其差可以任意小。

本讲小结

- 若 $|f^{(k)}| \le M$，则 Taylor 余项满足 $|f - P_{k-1}| \le M|x-a|^k/k!$；阶数和距离共同控制误差。
- 所有 Taylor 系数为零不保证函数为零；平坦函数 e^{-1/x^2}（$x>0$）在 0 处给出反例。
- 分割 $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ 产生上和 $U(f,P) = \sum M_i \Delta x_i$ 与下和 $L(f,P) = \sum m_i \Delta x_i$。
- 加细时 L 不减、U 不增；合并两个分割的切点得到共同加细。
- 上积分是所有上和的下确界，下积分是所有下和的上确界；二者相等时函数 Riemann 可积。
- Darboux 判据：对每个 $\varepsilon > 0$，存在 P 使 $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$，当且仅当 f 可积。
- Dirichlet 函数每个分割都有 $L = 0, U = 1$，说明有界函数未必可积；连续函数的可积性留待后续证明。

练习

17.1 ★ 对 $f(x) = e^x$ 在 0 处的二次 Taylor 多项式，写出 $|x| \le 1$ 上的 Lagrange 余项界。

17.2 ★ 设 $P = \{0, 1/2, 1\}$，对 $f(x) = x$ 求 $L(f,P)$、$U(f,P)$。

17.3 ★ 证明任意分割 P 都有 $L(f,P) \le U(f,P)$。

17.4 ★★ 对 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数，求任意分割的上下和并说明不可积性。

17.5 ★★ 证明加细引理中上和不增的部分：在一个旧小区间内加入一个切点即可。

17.6 ★★ 写出 $P_1 = \{0, 1/2, 1\}$ 与 $P_2 = \{0, 1/3, 1\}$ 的共同加细。

17.7 ★★ 设 $f(x) = x$ 在 $[0,1]$ 上，取均匀分割 $x_j = j/n$。求上下和之差并说明其趋于 0。

17.8 ★★★ 对平坦函数 $f(x) = 0$（$x \le 0$）、$f(x) = e^{-1/x^2}$（$x > 0$），说明每个 Taylor 多项式及 $f(1)$。

17.9 ★★★ 用 Darboux 判据证明常数函数 $f(x) = 3$ 在任意闭区间上可积，并给出积分值。

17.10 ★★★ 设 $f \le g$ 且二者可积。证明 $\int_a^b f \le \int_a^b g$，并用 x 与 $x+1$ 在 $[0,1]$ 上的例子核对。

练习答案与提示

17.1 $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$；e^x 的三阶导数在 $[-1,1]$ 上不超过 e，故误差不超过 $e|x|^3/6 \le e/6$。

17.2 每段长度 $1/2$，下确界为 $0, 1/2$，上确界为 $1/2, 1$，所以 $L = 1/4$、$U = 3/4$。

17.3 每段 $m_i \le M_i$ 且 $\Delta x_i > 0$，逐项相乘求和即得。

17.4 任意小区间含有有理数和无理数，所以 $L = 0, U = 1$；上下和差不能小于 $1/2$，故不可积。

17.5 加入 $w \in (u,v)$ 后，$M_1, M_2 \le M$，故 $M_1(w-u) + M_2(v-w) \le M(v-u)$；对其余区间求和。

17.6 $P = \{0, 1/3, 1/2, 1\}$。

17.7 $L_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} j/n = (n-1)/(2n)$，$U_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j/n = (n+1)/(2n)$，差为 $1/n \to 0$。

17.8 每阶导数在 0 都为零，所以各 Taylor 多项式恒为 0；但 $f(1) = e^{-1} > 0$。

17.9 任意分割每段上下确界都为 3，所以 $U - L = 0 < \varepsilon$；积分为 $3(b-a)$。

17.10 每个分割都有 $L(f,P) \le L(g,P)$，取上确界得到下积分不等式。再看上和：$U(f,P) \le U(g,P)$，对分割取下确界也保序，因此上积分不等式成立；两函数可积后即得积分单调性。例子中积分分别为 $1/2$ 与 $3/2$。

第 18 讲

一致连续与 Riemann 积分

Uniform Continuity and the Riemann Integral

对应材料：MIT 18.100B Lecture 17 后半（分划、上和与下和、Riemann 积分的定义与可积准则）与 Lecture 18（一致连续、Heine–Cantor 定理、连续函数可积）讲义；习题集 8 第 4 题，习题集 9 第 1 题第 (1) 问、第 2 题；参考 Thomson–Bruckner–Bruckner *Elementary Real Analysis* 第 8 章。

本讲目标

(1) 会对给定分划计算上和 $U(f,P)$ 与下和 $L(f,P)$，并理解它们是「从上方」和「从下方」逼近面积的两组矩形。

(2) 掌握加细引理：分点越多，下和不减、上和不增；由此得到任意下和不超过任意上和。

(3) 理解上积分、下积分和 Riemann 可积的定义，知道 Dirichlet 函数为什么不可积。

(4) 会用可积准则「存在分划使 $U-L<\varepsilon$」判断可积，并从定义出发算出 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$。

(5) 分清连续与一致连续的量词顺序，会证明一个函数一致连续，也会用两个序列证明它不一致连续。

(6) 读懂 Heine–Cantor 定理的证明，知道闭、有界、连续三个条件各用在哪里；用它证明闭区间上的连续函数可积。

18.1 从面积到上和与下和

18.1.1 问题：面积是什么

我们从小就说「$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲线下的面积」。可是对一块边界弯曲的区域，「面积」本身还没有定义。我们真正会算的只有矩形的面积：长乘宽。

古希腊人求抛物线弓形的面积时，用内接和外切的多边形从两边去夹。Riemann 积分沿用同一个想法：把 $[a,b]$ 切成若干小段，每一段上放一个「偏高」的矩形和一个「偏低」的矩形。偏高的矩形加起来是面积的上估计，偏低的加起来是下估计。切得越细，两者越接近；如果它们能夹到同一个数，这个数就定义为积分。

这一讲前半部分把这个想法写成严格的定义。后半部分回答一个问题：哪些函数能被这样夹住？答案之一是闭区间上的连续函数。要证明它，需要一个比连续更强的概念，叫做一致连续。

18.1.2 分划

定义 18.1（分划）　设 $a<b$。$[a,b]$ 的一个**分划**（partition）是有限个点

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\},\qquad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1,\dots,n$），它是第 i 个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度。数 $\|P\|=\max_i \Delta x_i$ 叫做 P 的**网距**（mesh）。

各段长度之和总是 $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=x_n-x_0=b-a$，这个「望远镜求和」后面会反复用。最常用的分划是**等分分划**：$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$，此时每个 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$，网距也是 $\frac{b-a}{n}$。

18.1.3 上和与下和

定义 18.2（上和与下和）　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，$P=\{x_0,\dots,x_n\}$ 是 $[a,b]$ 的分划。令

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\qquad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x).$$

称

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\,\Delta x_i,\qquad L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\Delta x_i$$

分别为 f 关于 P 的**上和**（upper sum）与**下和**（lower sum）。

关于这个定义，有三点要看清楚。

- f 有界，所以每个子区间上的函数值集合非空且有界，由确界原理（第 3 讲），M_i 和 m_i 都是实数。
- 用的是上确界和下确界，而不是最大值和最小值。f 不必连续，最大值可能取不到，但上确界总存在。
- 当 $f\ge 0$ 时，$M_i\Delta x_i$ 是一个盖住这一段图像的矩形的面积，$m_i\Delta x_i$ 是一个藏在图像下面的矩形的面积。f 取负值时，这些矩形面积带符号，后面的推理照样成立。

例 18.1　一个具体的上和与下和　设 $f(x)=x^2+1$，$[a,b]=[-2,2]$，$P=\{-2,-1,0,1,2\}$。求 $U(f,P)$ 与 $L(f,P)$。

解　四个子区间的长度都是 1。f 在 $[-2,0]$ 上递减、在 $[0,2]$ 上递增，所以每个子区间上的上确界和下确界都在端点处取到：

子区间	$[-2,-1]$	$[-1,0]$	$[0,1]$	$[1,2]$
m_i	$f(-1)=2$	$f(0)=1$	$f(0)=1$	$f(1)=2$
M_i	$f(-2)=5$	$f(-1)=2$	$f(1)=2$	$f(2)=5$

于是

$$L(f,P)=(2+1+1+2)\cdot 1=6,\qquad U(f,P)=(5+2+2+5)\cdot 1=14.$$

第 19 讲有了微积分基本定理以后可以算出 $\int_{-2}^{2}(x^2+1)\,\mathrm{d}x=\frac{28}{3}\approx 9.33$，它确实夹在 6 与 14 之间，但这两个估计还很粗。图 18.1 的右图把分点加密一倍，夹得就紧多了。 ♦

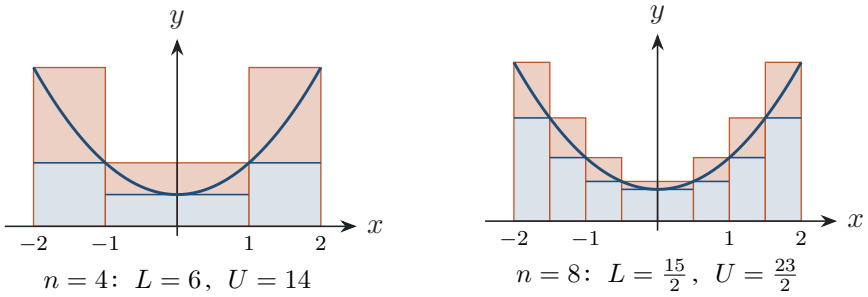


图 18.1　$f(x)=x^2+1$ 在 $[-2,2]$ 上的下和（蓝色矩形）与上和（蓝色加橙色，即橙色边框的矩形）。橙色带子的总面积等于 $U(f,P)-L(f,P)$。左图为 4 等分，右图为 8 等分，$U-L$ 从 8 降到 4。

引理 18.3　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，$m\le f(x)\le M$ 对所有 $x\in[a,b]$ 成立。则对任意分划 P，

$$m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a).$$

证明　在每个子区间上，m 是函数值的一个下界，而 m_i 是最大的下界，所以 $m\le m_i$；同理 $M_i\le M$。又 $m_i\le f(x_i)\le M_i$。于是 $m\le m_i\le M_i\le M$。乘以 $\Delta x_i>0$ 再对 i 求和，并用 $\sum\Delta x_i=b-a$，即得结论。 ■

注 18.1　在每个子区间里任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，和式 $S(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 叫做 **Riemann 和**（Riemann sum）。微积分课上的左端点和、右端点和、中点和都是它的特例。因为 $m_i\le f(\xi_i)\le M_i$，总有

$$L(f,P)\le S(f,P,\xi)\le U(f,P).$$

所以下和与上和是同一个分划下所有 Riemann 和的两个「极端」。只要 U 与 L 夹到一起，不管 ξ_i 怎么取，Riemann 和都被夹住。第 6 节会用到这一点。

想一想　上和与下和的定义要求 f 有界。去掉这个条件会怎样？考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(0)=0$，$f(x)=\frac{1}{x}$ $(0<x\le 1)$。

答　对任何分划 P，第一个子区间 $[0,x_1]$ 上 f 没有上界（$x\to 0^+$ 时 $\frac{1}{x}\to\infty$），所以 M_1 不存在，$U(f,P)$ 根本没有定义。Riemann 积分只处理有界函数。$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 这类无界情形要用反常积分，即先在 $[\eta,1]$ 上积分，再令 $\eta\to 0^+$。

18.2　加细、上积分与下积分

18.2.1　加细

在图 18.1 中，从 4 等分换成 8 等分，下和变大，上和变小。原因很简单：把一个子区间切成两段，每一段上的上确界都不超过整段上的上确界，因为它是在更小的集合上取的上确界。下确界的情形正好相反。

定义 18.4（加细）　若 $P \subseteq P'$ 都是 $[a,b]$ 的分划，称 P' 是 P 的一个**加细**（refinement）。对任意两个分划 P, Q，并集 $P \cup Q$ 同时是二者的加细，叫做它们的**公共加细**（common refinement）。

■ **例 18.2　加细后重新计算**　仍取 $f(x) = x^2 + 1$ 和例 18.1 中的 $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$。添加分点 $-\frac{3}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$，得到加细 $P' = \{-2, -\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$。求 $L(f, P')$ 与 $U(f, P')$。

解　新分点处 $f(-\frac{3}{2}) = \frac{13}{4}$，$f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$。仍由单调性在端点处读出确界：

子区间	$[-2, -\frac{3}{2}]$	$[-\frac{3}{2}, -1]$	$[-1, 0]$	$[0, \frac{1}{2}]$	$[\frac{1}{2}, 1]$	$[1, 2]$
Δx_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
m_i	$\frac{13}{4}$	2	1	1	$\frac{5}{4}$	2
M_i	5	$\frac{13}{4}$	2	$\frac{5}{4}$	2	5

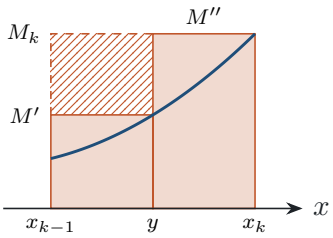
所以

$$L(f, P') = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{13}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot 2 + 1\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{4} + 1\cdot 2 = \tfrac{27}{4} = 6.75,$$
$$U(f, P') = \tfrac{1}{2}\cdot 5 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{13}{4} + 1\cdot 2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot 2 + 1\cdot 5 = \tfrac{51}{4} = 12.75.$$

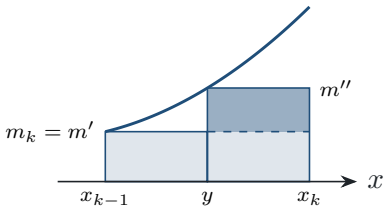
与例 18.1 比较，L 从 6 增加到 6.75，U 从 14 减少到 12.75。变化只发生在被切开的两个子区间上。在 $[-2,-1]$ 上，下和的贡献从 2 变为 $\frac{13}{8} + 1 = \frac{21}{8}$；在 $[0,1]$ 上，从 1 变为 $\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$。两处共增加 $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$，正是 $6.75 - 6$。另外两个子区间的贡献原封不动。　♦

引理 18.5（加细引理）　设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 有界，P' 是 P 的加细。则

$$L(f, P) \le L(f, P') \le U(f, P') \le U(f, P).$$



上和：斜线部分被去掉



下和：深蓝部分被添上

图 18.2　在子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 中插入一点 y。左：上和里原来高为 M_k 的矩形（虚线）换成两个不更高的矩形。右：下和里原来高为 m_k 的矩形换成两个不更矮的矩形。图中 f 递增，所以 $M'' = M_k$，$m' = m_k$。

思路　P' 比 P 多出有限个点。一次加一个点，加完一个再加下一个，所以只需证明「添加一个点」的情形。添加一个点只把一个子区间切成两段（图 18.2），其余子区间不动，只要比较这一段上的贡献。

证明　添加一个点。设 $P = \{x_0, \dots, x_n\}$，$P' = P \cup \{y\}$，其中 $x_{k-1} < y < x_k$。记

$$M' = \sup_{[x_{k-1}, y]} f, \quad M'' = \sup_{[y, x_k]} f, \qquad m' = \inf_{[x_{k-1}, y]} f, \quad m'' = \inf_{[y, x_k]} f.$$

$[x_{k-1}, y]$ 和 $[y, x_k]$ 都包含于 $[x_{k-1}, x_k]$。M_k 是 f 在大区间上的一个上界，自然也是在小区间上的上界，而 M' 是小区间上最小的上界，所以 $M' \le M_k$；同理 $M'' \le M_k$，$m' \ge m_k$，$m'' \ge m_k$。$U(f, P)$ 与 $U(f, P')$ 除第 k 段外各项相同，于是

$$\begin{aligned} U(f, P) - U(f, P') &= M_k(x_k - x_{k-1}) - M'(y - x_{k-1}) - M''(x_k - y) \\ &= (M_k - M')(y - x_{k-1}) + (M_k - M'')(x_k - y) \ge 0. \end{aligned}$$

同样 $L(f, P') - L(f, P) = (m' - m_k)(y - x_{k-1}) + (m'' - m_k)(x_k - y) \ge 0$。中间的不等式 $L(f, P') \le U(f, P')$ 就是引理 18.3。

一般情形。设 $P' = P \cup \{y_1, \dots, y_r\}$。令 $P_0 = P$，$P_j = P_{j-1} \cup \{y_j\}$，则 $P_r = P'$。对每一步用上面的结论，

$$L(f, P_0) \le L(f, P_1) \le \cdots \le L(f, P_r) \le U(f, P_r) \le \cdots \le U(f, P_1) \le U(f, P_0). \qquad \blacksquare$$

推论 18.6　设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 有界。对 $[a, b]$ 的**任意两个**分划 P, Q，有 $L(f, P) \le U(f, Q)$。

证明　令 $R = P \cup Q$，它同时是 P 和 Q 的加细。对 $P \subseteq R$ 和 $Q \subseteq R$ 分别用引理 18.5：

$$L(f, P) \le L(f, R) \le U(f, R) \le U(f, Q). \qquad \blacksquare$$

这里 P 和 Q 可以毫无关系，一个很粗、一个很细，分点也可以完全不同。推论说：**任何一个下估计都不超过任何一个上估计**。这和第 3 讲里「集合中的每个元素都不超过它的每个上界」是同一种结构，下一小节正是利用它来取上确界和下确界。

18.2.2 上积分、下积分与可积

由推论 18.6，固定任一分划 Q，数 $U(f,Q)$ 是全体下和组成的集合的一个上界；固定任一 P，$L(f,P)$ 是全体上和组成的集合的一个下界。由确界原理，下面的定义有意义。

定义 18.7（上积分与下积分）　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界。定义 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**（upper integral）和**下积分**（lower integral）为

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_P U(f,P), \qquad \underline{\int_a^b} f = \sup_P L(f,P),$$

其中 inf 和 sup 取遍 $[a,b]$ 的所有分划。

命题 18.8　对有界函数 f，总有 $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$。

证明　固定分划 Q。由推论 18.6，$U(f,Q)$ 是所有下和的上界，而下积分是所有下和的最小上界，所以 $\underline{\int_a^b} f \le U(f,Q)$。这对每个 Q 成立，说明下积分是所有上和的一个下界；上积分是最大的下界，所以 $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$。 ■

定义 18.9（Riemann 可积）　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界。若 $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$，称 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**（Riemann integrable），这个公共值记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad\text{或}\quad \int_a^b f.$$

$[a,b]$ 上全体 Riemann 可积函数的集合记作 $\mathcal{R}([a,b])$。

把定义和引理 18.3 合起来：若 $f\in\mathcal{R}([a,b])$，则对每个分划 P，

$$L(f,P) \le \int_a^b f \le U(f,P).$$

积分是唯一一个夹在所有下和与所有上和之间的数。

注 18.2　用上和、下和来定义积分的写法通常归功于 Darboux。Riemann 原来的定义用点值和 $S(f,P,\xi)$ 的极限来引入积分。本讲采用上下和的定义；两种定义的等价性需要进一步证明，后面的练习会说明连续函数情形下的一个误差估计。

最简单的例子是常数函数 $f\equiv c$。每个子区间上 $M_i=m_i=c$，所以 $U(f,P)=L(f,P)=c(b-a)$ 对所有 P 成立，上下积分都等于 $c(b-a)$，于是 $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$。下一个例子说明并非所有有界函数都可积。

■ **例 18.3　Dirichlet 函数不可积**　定义 $D:[a,b]\to\mathbb{R}$，$D(x)=1$（$x\in\mathbb{Q}$），$D(x)=0$（$x\notin\mathbb{Q}$）。

证明 D 有界但不 Riemann 可积。

解　按定义，每个点处的函数值都是 0 或 1，所以 $0 \le D \le 1$，D 有界。任取分划 P 和其中一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$，其中 $x_{i-1} < x_i$。由有理数和无理数的稠密性（第 4 讲），这个子区间里既有有理数，也有无理数。所以 D 在这个子区间上取到 1，也取到 0，从而 $M_i = 1$，$m_i = 0$。于是对每个分划 P，

$$U(D,P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a, \qquad L(D,P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

取下确界和上确界，$\overline{\int_a^b} D = b - a$，$\underline{\int_a^b} D = 0$。二者不等，所以 $D \notin \mathcal{R}([a,b])$。 ♦

易错提醒　「D 不可积」不是说「D 的积分等于 0」或「等于 $b-a$」，也不是说「积分是无穷大」。它的意思是：Riemann 的办法给不出这个函数的积分，上估计和下估计之间始终隔着 $b-a$。以后学 Lebesgue 积分会看到，那里 D 可积且积分为 0，因为有理数集「很小」。在本课程里只说：D 有界，但不 Riemann 可积。

18.3　Riemann 可积准则

18.3.1　只需找到一个好分划

按定义判断可积，要对所有分划取下确界和上确界，很不方便。下面的准则把它化成：对每个 ε，只要找到一个分划就够了。

定理 18.10（Riemann 可积准则）　设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 有界。则 $f \in \mathcal{R}([a,b])$ 当且仅当：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的分划 P 使

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

思路　记 $\overline{I}$、$\underline{I}$ 为上积分和下积分。「⇐」：两个积分都被夹在 $L(f,P)$ 和 $U(f,P)$ 之间，它们的距离小于任意 ε，只能相等。「⇒」：$\overline{I}$ 是下确界，所以有上和离它不到 $\frac{\varepsilon}{2}$；$\underline{I}$ 是上确界，所以有下和离它不到 $\frac{\varepsilon}{2}$。这两个和来自不同的分划，用公共加细把它们放到同一个分划上。

证明　「⇐」。对任意 $\varepsilon > 0$，取满足条件的 P。由定义，$\overline{I} \le U(f,P)$，$\underline{I} \ge L(f,P)$；由命题 18.8，$\underline{I} \le \overline{I}$。所以

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

一个非负数小于任意正数，只能是 0。所以 $\overline{I} = \underline{I}$，$f$ 可积。

「⇒」。设 f 可积，记 $I = \overline{I} = \underline{I}$，任给 $\varepsilon > 0$。因为 $I = \inf_P U(f,P)$，$I + \frac{\varepsilon}{2}$ 不是上和的下界，所以存在分划 P_1 使 $U(f,P_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}$。同样，因为 $I = \sup_P L(f,P)$，存在 P_2 使 $L(f,P_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}$。令 $P = P_1 \cup P_2$。由加细引理，

$$U(f,P) - L(f,P) \le U(f,P_1) - L(f,P_2) < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$ ■

直观理解　$U(f,P)-L(f,P)=\sum_i (M_i-m_i)\Delta x_i$。$M_i-m_i$ 是 f 在第 i 段上的**振幅**(oscillation)，即函数值上下摆动的幅度。所以 $U-L$ 是一串「振幅小方框」的总面积，也就是图 18.1 里橙色带子的面积。这些方框把整条图像盖住。可积准则说：**f 可积，当且仅当能用总面积任意小的一串小方框盖住它的图像。**

实际计算时，常用的是准则的下面这个序列形式。

推论 18.11　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界。若有一列分划 P_n 使 $U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0$，则 $f\in\mathcal{R}([a,b])$，并且

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n).$$

证明　可积性由定理 18.10 立即得到。记 $I=\int_a^b f$，则 $L(f,P_n)\le I\le U(f,P_n)$，所以

$$0\le U(f,P_n)-I\le U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0,\qquad 0\le I-L(f,P_n)\le U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0.$$

由夹逼定理（第 5 讲），$U(f,P_n)\to I$，$L(f,P_n)\to I$。 ■

18.3.2　两个例子

■ **例 18.4　改变一个点的值；习题集 8 第 4 题**　设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$，$f(0)=0$，其余点 $f(x)=1$。证明 $f\in\mathcal{R}([-1,1])$ 且 $\int_{-1}^1 f=2$。

解　只有一个「坏点」$x=0$。办法是用一个很窄的子区间把它单独围起来。任取 $0<\delta<1$，令 $P_\delta=\{-1,-\delta,\delta,1\}$。三个子区间上的确界为：

子区间	$[-1,-\delta]$	$[-\delta,\delta]$	$[\delta,1]$
Δx_i	$1-\delta$	2δ	$1-\delta$
m_i	1	0（在 $x=0$ 取到）	1
M_i	1	1	1

所以 $U(f,P_\delta)=2(1-\delta)+2\delta=2$，$L(f,P_\delta)=2(1-\delta)+0=2-2\delta$，

$$U(f,P_\delta)-L(f,P_\delta)=2\delta.$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta<\min\{1,\frac{\varepsilon}{2}\}$，就有 $U-L<\varepsilon$。由准则，f 可积。又对每个 δ 都有 $2-2\delta\le\int_{-1}^1 f\le 2$，令 $\delta\to 0^+$ 得 $\int_{-1}^1 f=2$。 ♦

这个例子说明两件事。第一，**可积不要求连续**：f 在 0 处不连续，照样可积。第二，改变一个点的函数值不影响积分：f 与常数 1 只差一个点，积分都是 2。第 19 讲会把这个想法推广到有限个间断点。

■ **例 18.5**　从定义出发计算 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$　证明 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上可积，并求 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$。

解　取 n 等分分划 $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}$，$\Delta x_i=\frac{1}{n}$。$f$ 在 $[0,1]$ 上递增，所以在 $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ 上

$$M_i=f\Big(\frac{i}{n}\Big)=\frac{i^2}{n^2},\qquad m_i=f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)=\frac{(i-1)^2}{n^2}.$$

用平方和公式 $\sum_{i=1}^n i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$（对 n 归纳即可证明），

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^n\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2},$$

$$L(f,P_n)=\sum_{i=1}^n\frac{(i-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

两者之差可以不展开就看出来：$U-L=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n\big(i^2-(i-1)^2\big)$ 是望远镜求和，等于 $\frac{1}{n^3}\cdot n^2=\frac{1}{n}$。所以 $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{1}{n}\to 0$。由推论 18.11，$f$ 可积，且

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{3}.$$

下表列出几个 n 的数值，可以看到 L 和 U 从两边向 $\frac{1}{3}=0.3333\cdots$ 靠拢：

n	1	2	4	10	100	1000
$L(f,P_n)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{32}$	0.285	0.32835	0.3328335
$U(f,P_n)$	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{32}$	0.385	0.33835	0.3338335
$U-L$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0.1	0.01	0.001

♦

同样的计算（用 $\sum_{i=1}^n i=\frac{n(n+1)}{2}$）给出 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$：此时 $U(x,P_n)=\frac{n+1}{2n}$，$L(x,P_n)=\frac{n-1}{2n}$（练习 18.1）。下面的「想一想」要用到这个结果。

想一想　设 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$，$g(x)=x$（$x\in\mathbb{Q}$），$g(x)=0$（$x\notin\mathbb{Q}$）。g 可积吗？它的上积分和下积分各是多少？

答　不可积。每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中有无理数，那里 $g=0$，而 $g\ge 0$，所以 $m_i=0$，$L(g,P)=0$，下积分为 0。另一方面 $g(x)\le x\le x_i$，且有理数可以任意接近 x_i，所以 $M_i=x_i$。于是 $U(g,P)$ 与 $h(x)=x$ 的上和完全相同，上积分等于 $\overline{\int_0^1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$。$0\neq\frac{1}{2}$。

想一想　准则只要求「存在」一个分划 P 使 $U-L<\varepsilon$。如果 P 满足这个不等式，P 的加细 P' 也满足吗？

答　满足。由加细引理，$L(f,P)\le L(f,P')\le U(f,P')\le U(f,P)$，所以 $U(f,P')-L(f,P')\le U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$。找到一个好分划之后，再往里添点只会更好。这也是证明「$\Rightarrow$」时可以放心取公共加细的原因。

18.4　一致连续

18.4.1　动机：需要一个对所有点都管用的 δ

我们想证明：$[a,b]$ 上的连续函数可积。按准则，要对每个 $\varepsilon>0$ 找一个分划 P，使

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon.$$

因为 $\sum\Delta x_i=b-a$，一个自然的办法是让每一段的振幅都小于 $\frac{\varepsilon}{b-a}$，这样总和就小于 $\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$。要让振幅小，子区间要短。问题是：短到什么程度？

连续性说的是：对每个点 x 和每个 ε，有 δ 使 $|y-x|<\delta$ 时 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$。但这个 δ 依赖于 x。在函数陡峭的地方，δ 必须很小。如果有无穷多个点，所需的 δ 越来越小、趋于 0，就找不到一个统一的子区间长度。我们需要的是一个对所有点同时管用的 δ。

18.4.2　定义

定义 18.12（一致连续）　设 $S\subseteq\mathbb{R}$，$f:S\to\mathbb{R}$。若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 $x,y\in S$ 都有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

则称 f 在 S 上一致连续（uniformly continuous）。

表 18.1 把两个定义并排写出来，区别只在量词的顺序：

在 S 上连续	$\forall x\in S\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall y\in S:\ \ |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
在 S 上一致连续	$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in S\ \ \forall y\in S:\ \ |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
δ 依赖于	连续：ε 和 x；　一致连续：只依赖 ε
性质的类型	连续：逐点的（局部）；　一致连续：整个集合 S 上的（整体）

表 18.1　连续与一致连续：$\forall x$ 从 $\exists\delta$ 的前面挪到了后面。

在连续的定义里，先给定 x，再找 δ，所以 δ 可以因点而异。在一致连续的定义里，δ 在 x 出现之前就要选好，所以同一个 δ 必须对所有 x 管用。一致连续的函数当然连续（同一个 δ 拿来对每个 x 用即可），反过来不对，下面会看到。

直观理解　在图像上一点 $(x_0,f(x_0))$ 处放一个宽 2δ、高 2ε 的「窗口」。$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 的意思是：图像在窗口宽度范围内只从左右两边穿出，不从上下两边穿出。连续：每个点都能找到一个合适宽度的窗口。一致连续：一个固定宽度的窗口沿着图像滑到哪里都合适。

18.4.3 一致连续的例子

■ **例 18.6　几个一致连续的函数**　证明：(1) $f(x)=3x+1$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续；(2) $f(x)=x^2$ 在 $[0,2]$ 上一致连续；(3) $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续。

解　三个证明的格式相同：给定 $\varepsilon>0$，写出一个只依赖 ε 的 δ，再对任意 x,y 验证。

(1) 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$。若 $|x-y|<\delta$，则 $|f(x)-f(y)|=3|x-y|<3\delta=\varepsilon$。

(2) 对 $x,y\in[0,2]$，$|x+y|\le 4$，所以 $|x^2-y^2|=|x+y|\,|x-y|\le 4|x-y|$。取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$，则 $|x-y|<\delta$ 时 $|x^2-y^2|<4\delta=\varepsilon$。这里用到了 x,y 不超过 2，这正是定义域有界的作用。

(3) 先证明：对 $x,y\ge 0$，

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt{|x-y|}.$$

不妨设 $x\ge y$。两边非负，只需比较平方：$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x-2\sqrt{xy}+y\le x-2y+y=x-y$，这里用了 $\sqrt{xy}\ge\sqrt{y\cdot y}=y$。于是取 $\delta=\varepsilon^2$：若 $|x-y|<\delta$，则 $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt{|x-y|}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$。 ♦

(1) 和 (2) 里都出现了不等式 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$，它值得单独起个名字。

> **定义 18.13（Lipschitz 函数）**　若存在常数 $K\ge 0$，使对所有 $x,y\in S$ 有 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$，称 f 在 S 上是 **Lipschitz 的**（Lipschitz），K 叫做 Lipschitz 常数。

> **命题 18.14**　(1) Lipschitz 函数一致连续。(2) 若 f 在区间 I 上可导且 $|f'(x)|\le K$ 对所有 $x\in I$ 成立，则 f 在 I 上是 Lipschitz 的，常数为 K。

证明　(1) $K=0$ 时，对任意 x,y 都有 $|f(x)-f(y)|=0$，故任取 $\delta>0$ 都满足定义。$K>0$ 时，给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$，则 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|<K\delta=\varepsilon$。

(2) 设 $x<y$ 都在 I 中。f 在 $[x,y]$ 上可导，从而连续。由中值定理（第 15 讲），存在 $c\in(x,y)$ 使 $f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$，于是 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$。 ■

例如 $|(\sin x)'|=|\cos x|\le 1$，所以 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$，sin 在整个 $\mathbb{R}$ 上一致连续。反过来，一致连续不一定 Lipschitz：$\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上一致连续（例 18.6），但取 $y=0$，比值 $\frac{|\sqrt{x}-0|}{|x-0|}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x\to 0^+$ 时无界，找不到常数 K。

18.4.4 怎样证明不一致连续

把定义否定一次：f 在 S 上不一致连续，当且仅当

$$\exists\varepsilon_0>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists x,y\in S:\quad |x-y|<\delta\ \text{且}\ |f(x)-f(y)|\ge\varepsilon_0.$$

也就是说，有一个固定的 ε_0，不管 δ 多小，都能找到两个距离小于 δ 的点，函数值相差至少 ε_0。取 $\delta=\frac{1}{n}$，就得到一个好用的序列形式。

命题 18.15（不一致连续的序列判别法）　$f:S\to\mathbb{R}$ 在 S 上不一致连续，当且仅当存在 $\varepsilon_0>0$ 和 S 中的两个序列 $\{x_n\},\{y_n\}$，使

$$|x_n-y_n|\to 0,\qquad \text{但}\quad |f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0\ \text{对所有}n.$$

证明　「⇒」。由上面的否定式取 ε_0。对每个 n，以 $\delta=\frac{1}{n}$ 代入，得到 $x_n,y_n\in S$，满足 $0\le|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$。夹在 0 与 $1/n$ 之间的距离趋于 0。

「⇐」。反设 f 一致连续。对 ε_0 取出相应的 $\delta>0$。因为 $|x_n-y_n|\to0$，存在 n 使 $|x_n-y_n|<\delta$，于是 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon_0$，与假设矛盾。 ■

■ **例 18.7**　x^2 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续　证明 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续。

解　直观上，x^2 越往右越陡，固定宽度的窗口滑到右边总会失败。取 $\varepsilon_0=1$，$x_n=n$，$y_n=n+\frac{1}{n}$。则 $|x_n-y_n|=\frac{1}{n}\to0$，而

$$|f(y_n)-f(x_n)|=\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2=2+\frac{1}{n^2}\ge1=\varepsilon_0.$$

由命题 18.15，f 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续。

也可以直接对着定义写：任给 $\delta>0$，取 $x=\frac{1}{\delta}$，$y=x+\frac{\delta}{2}$，则 $|x-y|<\delta$，但 $y^2-x^2=\delta x+\frac{\delta^2}{4}=1+\frac{\delta^2}{4}>1$。 ♦

与例 18.6(2) 对比：**同一个函数 x^2，在 $[0,2]$ 上一致连续，在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续**。一致连续是「函数加上定义域」的性质。

■ **例 18.8**　$\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不一致连续　证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上连续但不一致连续，并求出在每个点 x_0 处能用的最大 δ。

解　连续性来自第 11 讲（商的连续性）。取 $\varepsilon_0=1$，$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=\frac{1}{2n}$，它们都在 $(0,1]$ 中，$|x_n-y_n|=\frac{1}{2n}\to0$，而 $|f(y_n)-f(x_n)|=2n-n=n\ge1$。由命题 18.15，$f$ 不一致连续。

再看 δ 怎样随 x_0 变化。固定 $\varepsilon>0$ 和 $x_0\in(0,1]$。$\frac{1}{x}$ 在 x_0 左侧比右侧变化快：对 $x_0-\delta<x\le x_0$（要求 $\delta<x_0$），

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}<\frac{1}{x_0-\delta}-\frac{1}{x_0}=\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)},$$

右侧的差 $\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}<\frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)}$ 更小。所以只要 $\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)}\le\varepsilon$，整理得

$$\delta\le\delta^*(x_0)=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}.$$

任取 $\delta>\delta^*(x_0)$。因为 $0<\delta^*(x_0)<x_0$，点 $x=x_0-\delta^*(x_0)$ 仍在 $(0,1]$ 中，且 $|x-x_0|=\delta^*(x_0)<\delta$，但 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}=\varepsilon$。因此任何更大的 δ 都不满足严格不等式要求；前面的估计则说明 $\delta^*(x_0)$ 本身可用，所以它确实是最大值。取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，有 $\delta^*(1)=\frac{1}{3}$，$\delta^*(0.8)=\frac{8}{35}\approx0.229$，$\delta^*(0.4)=\frac{1}{15}\approx0.067$，$\delta^*(0.1)=\frac{1}{210}$，$\delta^*(0.01)=\frac{1}{20100}$。$x_0\to0^+$ 时 $\delta^*(x_0)\to0$，所以没有一个正数 δ 能对所有 x_0 都管用（图 18.3）。 ♦

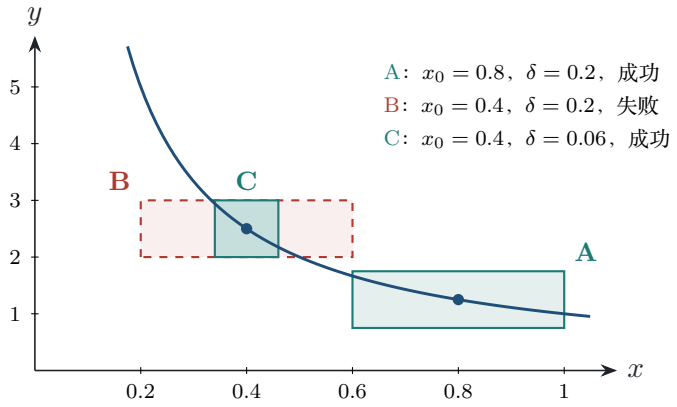


图 18.3　$f(x) = \frac{1}{x}$，$\varepsilon = \frac{1}{2}$，窗口宽 2δ、高 $2\varepsilon = 1$。在 $x_0 = 0.8$ 处，宽 $\delta = 0.2$ 的窗口 A 合适：图像只从左右两边穿出。同样宽度的窗口滑到 $x_0 = 0.4$（B）就失败了，图像从顶边穿出。在那里必须把 δ 缩到 $\delta^*(0.4) = \frac{1}{15}$ 以下，例如窗口 C。x_0 越接近 0，所需的窗口越窄。

■ 例 18.9　有界也不够：$\sin\frac{1}{x}$　证明 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上不一致连续。

解　令 $x_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$，$y_n = \dfrac{1}{2\pi n}$（$n \geq 1$），都在 $(0, 1]$ 中。则 $f(x_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$，$f(y_n) = \sin(2\pi n) = 0$，且

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi n\,(2\pi n + \frac{\pi}{2})} < \frac{1}{8\pi n^2} \to 0.$$

取 $\varepsilon_0 = 1$，由命题 18.15，f 不一致连续。例如 $n = 10$ 时两点相距约 0.00039，函数值却相差 1。 ♦

$\sin\frac{1}{x}$ 的值始终在 $[-1, 1]$ 中，问题不在于函数值变大，而在于 $x \to 0^+$ 时振荡越来越快：在任意短的区间 $(0, \eta)$ 里，函数值都要从 -1 走到 1 无穷多次。

18.5　紧致区间上的一致连续：Heine–Cantor 定理

在 $\mathbb{R}$ 上，x^2 连续却不一致连续；把定义域缩到 $[0, 2]$，同一个函数就一致连续。两者的差别来自定义域：闭区间的紧致性（compactness）允许我们从任意序列中抽出收敛子列。

定理 18.16（Heine–Cantor 定理）　设 $a < b$，$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续。则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续。

思路　反设一致连续性失败，固定一个误差 $\varepsilon_0 > 0$，对每个 n 找到距离小于 $1/n$、函数值却相差至少 ε_0 的点对。由 $[a, b]$ 的紧致性，第一列有收敛子列；点对距离趋于 0，第二列沿同一子列也收敛到同一点。连续性使两列函数值趋于同一个数，和固定的误差矛盾。

证明　反设 f 不一致连续。由命题 18.15，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $x_n, y_n \in [a, b]$，使

$$|x_n - y_n| \to 0, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{对每个} n.$$

闭区间 $[a,b]$ 紧致，故 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $x_{n_k}\to x\in[a,b]$。同一子列中，

$$|y_{n_k}-x|\le|y_{n_k}-x_{n_k}|+|x_{n_k}-x|\to 0,$$

所以 $y_{n_k}\to x$。由 f 在 x 连续，

$$f(x_{n_k})\to f(x),\qquad f(y_{n_k})\to f(x),$$

从而 $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\to 0$，这与它对每个 k 都不小于 ε_0 矛盾。 ■

证明只在两处用到条件：紧致性给出收敛子列，连续性把输入的收敛传到函数值。三个条件都不能任意删去。

- 去掉闭性：$\sin(1/x)$ 在有界但不闭的 $(0,1]$ 上连续，却由例 18.9 知不一致连续。
- 去掉有界性：x^2 在闭且无界的区间 $[0,\infty)$ 上连续，但取 $x_n=n$、$y_n=n+1/n$，函数值差为 $2+1/n^2\ge 2$。
- 去掉连续性：令 $h(0)=0$、$h(x)=1$ $(0<x\le 1)$。取 $x_n=0$、$y_n=1/n$，两点距离趋于 0，函数值差恒为 1。

■ **例 18.10　导数界给出的统一邻域**　证明 e^x 在 $[0,1]$ 上一致连续，并给出一个可用的 δ。

解　对任意 $x,y\in[0,1]$，中值定理给出介于二者之间的 c，使

$$|e^x-e^y|=e^c|x-y|\le e|x-y|.$$

给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/e$，便有 $|x-y|<\delta\Rightarrow|e^x-e^y|<\varepsilon$。定理保证结论成立；导数界还给出具体的邻域宽度。 ♦

18.6　闭区间连续函数的 Riemann 可积性

连续性先给出闭区间上的一致连续性，再给上下和一个统一的振幅控制。两步合起来，就能把总上下和差压到任意小。

定理 18.17（闭区间连续函数可积）　设 $a<b$，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续。则 $f\in\mathcal{R}([a,b])$。

思路　第 11 讲的最值定理先保证 f 有界。给定总误差 ε，用 Heine–Cantor 定理令每个足够短的小区间上的振幅不超过 $\varepsilon/[2(b-a)]$，再把各段振幅乘长度求和。

证明　由闭区间上的最值定理，f 有界，故 Riemann 可积准则适用。给定 $\varepsilon>0$，由定理 18.16，存在 $\delta>0$，使

$$|x-y|<\delta\implies|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\qquad(x,y\in[a,b]).$$

取等分分划 P，使每段长度 $\Delta x_i<\delta$。同一小区间内任意两点的距离小于 δ，所以其振幅满足

$$M_i-m_i\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

这里从逐点的严格不等式取上确界、下确界后得到非严格不等式。于是

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_i (M_i-m_i)\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_i \Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由 Riemann 可积准则，f 在 $[a,b]$ 上可积。 ■

方法：先统一控制振幅　遇到上下和差 $\sum_i (M_i-m_i)\Delta x_i$，若能让每段的振幅都不超过同一个 η，总差就不超过 $\eta(b-a)$。连续函数在闭区间上一致连续，正好能对所有小区间同时提供这个控制。

■ **例 18.11　正弦函数的上下和差**　用分段长度估计证明 $\sin x$ 在 $[0,1]$ 上可积，并给出 n 等分时的上下和差上界。

解　令 $P_n=\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$。由中值定理，任取 $x,y\in[0,1]$ 都有 $|\sin x-\sin y|\le |x-y|$。在 n 等分的每一段上，振幅不超过 $1/n$，总长度为 1，因此

$$0\le U(\sin,P_n)-L(\sin,P_n)\le \frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$，由序列形式的可积判据，$\sin x$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积。 ♦

本讲小结

- 对有界函数，$L(f,P)=\sum_i m_i\Delta x_i$、$U(f,P)=\sum_i M_i\Delta x_i$；任意 Riemann 和都满足 $L\le S\le U$。
- 若 P' 加细 P，则 $L(f,P)\le L(f,P')\le U(f,P')\le U(f,P)$；两个分划可用并集得到公共加细。
- 上积分是所有上和的下确界，下积分是所有下和的上确界；二者相等时 f Riemann 可积。
- Darboux 判据：有界 f 可积，当且仅当对每个 $\varepsilon>0$，存在分划 P 使 $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$。
- 一致连续的量词顺序是 $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in S$；不一致连续等价于存在两列点距离趋于 0、函数值差却不小于固定 $\varepsilon_0>0$。
- 连续函数在闭区间上一致连续；闭区间连续函数有界且 Riemann 可积。x^2 在 $\mathbb{R}$ 上、$1/x$ 在 $(0,1]$ 上、$\sin(1/x)$ 在 $(0,1]$ 上都不一致连续。

练习

18.1 ★　对 $f(x)=x^2+1$ 在 $[-2,2]$ 上取 $P=\{-2,-1,0,1,2\}$，求 $L(f,P)$、$U(f,P)$。

18.2 ★　设 f 有界，证明任一分划 P 都有 $L(f,P)\le U(f,P)$。

18.3 ★　对 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上取 n 等分，求 L_n、U_n 和 U_n-L_n，再求积分。

18.4 ★★　设 $a<b$，在 $[a,b]$ 上定义 $D(x)=1$（$x\in\mathbb{Q}$）、$D(x)=0$（$x\notin\mathbb{Q}$）。求任意分划的上下和并说明它为何不可积。

18.5 ★★ 在旧分划的一段 $[u,v]$ 内加入 w（$u<w<v$），证明这次加细不会增加上和，也不会减少下和。

18.6 ★★ 设 $P_1=\{0,\tfrac12,1\}$、$P_2=\{0,\tfrac13,1\}$。写出公共加细，并计算 $f(x)=x$ 关于该分划的上下和。

18.7 ★★ 用 $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt{|x-y|}$ 证明 $\sqrt{x}$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续。

18.8 ★★ 令 $h(0)=0$、$h(x)=1$（$0<x\le1$）。用两列点证明 h 在 $[0,1]$ 上不一致连续。

18.9 ★★★ 设 f,g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积且 $f\le g$。证明 $\int_a^b f\le\int_a^b g$，并用 $f(x)=x$、$g(x)=x+1$ 在 $[0,1]$ 上核对。

18.10 ★★★ 设 f 连续于 $[0,1]$。证明存在 $c\in[0,1]$ 使 $f(c)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。若另有 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 存在且 $|f'(x)|\le M$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac1n\sum_{j=1}^{n}f(j/n)\right|\le M/n$。

练习答案与提示

18.1 每段长为 1。各段的下确界为 $2,1,1,2$，上确界为 $5,2,2,5$，故 $L=6$、$U=14$。

18.2 在每段上 $m_i\le M_i$，且 $\Delta x_i>0$。逐项乘以 Δx_i 再求和，得到 $L(f,P)\le U(f,P)$。

18.3 因 x 递增，$L_n=\frac1n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{j}{n}=\frac{n-1}{2n}$，$U_n=\frac1n\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}=\frac{n+1}{2n}$，故差为 $1/n\to0$。可积判据给出 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\lim L_n=\lim U_n=\frac12$。

18.4 每个非退化小区间都含有有理数和无理数，所以每段 $m_i=0$、$M_i=1$。因此 $L(D,P)=0$、$U(D,P)=b-a$，对任何分划都相差 $b-a>0$，故 D 不可积。

18.5 旧段的上确界记为 M，新段上确界 M_1,M_2 都不超过 M，所以 $M_1(w-u)+M_2(v-w)\le M(v-u)$。新段下确界 m_1,m_2 都不小于旧段下确界 m，故 $m_1(w-u)+m_2(v-w)\ge m(v-u)$；其他段不变。

18.6 公共加细为 $R=P_1\cup P_2=\{0,\tfrac13,\tfrac12,1\}$。对递增函数 x，下和为 $\tfrac13\cdot\tfrac16+\tfrac12\cdot\tfrac12=\tfrac{11}{36}$，上和为 $\tfrac13\cdot\tfrac13+\tfrac12\cdot\tfrac16+1\cdot\tfrac12=\tfrac{25}{36}$。

18.7 不妨设 $x\ge y\ge0$。因 $\sqrt{xy}\ge y$，有 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le x-y$，故 $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt{|x-y|}$。给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^2$，便得到 $|x-y|<\delta\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon$。

18.8 取 $x_n=0$、$y_n=1/n$。则 $|x_n-y_n|=1/n\to0$，但 $|h(x_n)-h(y_n)|=1$，由不一致连续的序列判别法，h 不一致连续。

18.9 对任意分划 P，由 $f\le g$ 得 $U(f,P)\le U(g,P)$。对所有 P 取下确界，得到 $\int_a^b f\le\int_a^b g$。对 x，等分上下和趋于 $\frac12$；对 $x+1$，对应上下和各增加 1，积分为 $\frac32$。

18.10 (1) 由连续函数可积定理和上下积分夹逼，$m=\min f\le\int_0^1 f\le M=\max f$。介值定理说明 f 取遍 $[m,M]$，故存在 c 使 $f(c)=\int_0^1 f$。若 $m=M$，任取 c 即可。(2) 在每个小区间 $[(j-1)/n,j/n]$ 上，中值定理给出 $|f(x)-f(j/n)|\le M/n$，所以 $U(f,P_n)-L(f,P_n)\le M/n$。积分和右端点 Riemann 和都夹在这两个和之间，故二者之差的绝对值不超过 M/n。

第 19 讲

积分基本定理与应用

Fundamental Theorem of Calculus and Applications

对应材料：MIT 18.100B Lecture 19（积分基本性质、微积分基本定理、弧长与反常积分）；习题集 9 第 1–4 题。

本讲目标

(1) 会用积分的线性、保序和区间可加性化简积分，并证明绝对值积分不等式。

(2) 理解微积分基本定理的两个方向，能分别说明连续性与可积性在哪一步使用。

(3) 会用原函数计算定积分，使用换元公式，并从乘积求导推出分部积分公式。

(4) 会证明连续函数的积分平均值结论，并估计右端点 Riemann 和的误差。

(5) 会写出参数曲线的弧长积分，并判断常见反常积分收敛还是发散。

19.1 积分可以怎样运算？

在 $[0,1]$ 上，$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，而 $\int_0^1(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$。两者相差 1，正是常数函数 1 的积分。这个计算来自积分的线性；下面把线性、大小比较和分段积分写成一般结论。

Lecture 19 先指出闭区间上的连续函数可积。第 18 讲已经用一致连续性和 Darboux 判据证明了这一点；本讲的第一部分定理会用到这项结论。

命题 19.1（积分的基本性质） 设 $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$，$\lambda\in\mathbb{R}$。则：

(1) λf 可积，且 $\displaystyle\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f$；

(2) $f+g$ 可积，且 $\displaystyle\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$；

(3) 若 $f(x)\le g(x)$ 对所有 $x\in[a,b]$ 成立，则 $\displaystyle\int_a^b f\le\int_a^b g$；

(4) 若 $a<c<b$，则 f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上可积，且 $\displaystyle\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f$。

思路　线性从上下和的逐项估计得到；保序直接比较下和。区间可加性要先把分点 c 加入分划，再利用左右两段的和恰好拼成整段的和。

证明　数乘。若 $\lambda\ge 0$，每段的上确界、下确界都乘以 λ，所以 $U(\lambda f,P)=\lambda U(f,P)$、$L(\lambda f,P)=$

$\lambda L(f,P)$。若 $\lambda<0$，最大值与最小值交换位置：$U(\lambda f,P)=\lambda L(f,P)$、$L(\lambda f,P)=\lambda U(f,P)$。两种情形下上下和差都是原差的 $|\lambda|$ 倍；再由积分是上下积分的公共值，得到 $\int \lambda f=\lambda\int f$。$\lambda=0$ 时函数恒为零，等式也成立。

加法。给定 $\varepsilon>0$，取 f,g 各自上下和差小于 $\varepsilon/2$ 的分划，再取它们的公共加细 R。加细不增大上下和差。每段上 $\sup(f+g)\le\sup f+\sup g$、$\inf(f+g)\ge\inf f+\inf g$，故 $U(f+g,R)-L(f+g,R)<\varepsilon$，所以 $f+g$ 可积。

再看积分值。$\int(f+g)$ 与 $\int f+\int g$ 都落在区间 $[L(f,R)+L(g,R),\,U(f,R)+U(g,R)]$ 中；该区间长度小于 ε。ε 任意，二者相等。

保序。对任意分划 P，$f\le g$ 给出 $L(f,P)\le L(g,P)$。对所有分划取上确界，即得 $\int f\le\int g$。

原 Lecture 18/19 在这里把上和的比较方向写反；正确关系是 $U(f,P)\le U(g,P)$。下和比较同样直接，并可按上确界得到积分不等式。

区间可加。给定 $\varepsilon>0$，取 $[a,b]$ 上上下和差小于 ε 的分划，并加入 c 得到 R。加细不增大差，且左右两段的上和之和等于整段上和，下和也如此。因此两段限制函数都可积。$\int_a^b f$ 与 $\int_a^c f+\int_c^b f$ 同落在 $[L(f,R),U(f,R)]$ 中；令 $\varepsilon\to0$ 得相等。 ■

定理 19.1(3) 也给出绝对值估计。若 f 与 $|f|$ 都可积，则 $f\le|f|$ 且 $-f\le|f|$，分别积分并用数乘公式，得到

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这个不等式来自正、负面积的抵消。令 $f_+(x)=\max(f(x),0)$、$f_-(x)=\max(-f(x),0)$，则 $\int f=\int f_+-\int f_-$，而 $\int|f|=\int f_++\int f_-$。若 f 连续且在区间上既取正值又取负值，连续性使两种符号各自出现在正长度的小区间上，故两部分面积都为正，绝对值不等式严格；反过来，若 f 在整段不变号，等号成立。因而连续情形下，等号恰好说明函数没有正负抵消。

■ **例 19.1　保序与绝对值估计**　验证 $f(x)=x\le g(x)=x+1$ 在 $[0,1]$ 上的积分不等式；再在 $[-1,1]$ 上比较 $\int x$ 与 $\int|x|$。

解　$f\le g$，且 $\int_0^1 f=1/2$、$\int_0^1 g=3/2$，所以保序不等式成立。对称区间上的奇函数积分为零，故 $\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x=0$。而 $|x|$ 在两侧均非负，分段计算得 $\int_{-1}^1|x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=1$。于是 $0\le1$，且绝对值不等式严格。 ♦

■ **例 19.2　分段积分的核对**　把 $\int_{-1}^1(2x+1)\,\mathrm{d}x$ 在 0 处分成两段，分别计算再相加。

解　原函数是 x^2+x。左段积分为 $[x^2+x]_{-1}^0=0$，右段积分为 $[x^2+x]_0^1=2$；相加得 2，也等于整段端点差 $[x^2+x]_{-1}^1=2$。 ♦

> **定理 19.2（连续函数的积分刚性）**　设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f\le g$。若 $\int_a^b f=\int_a^b g$，则 $f(x)=g(x)$ 对每个 $x\in[a,b]$ 成立。

证明　令 $h=g-f$。则 h 连续、非负，且 $\int_a^b h=0$。若某点 x_0 满足 $h(x_0)>0$，由连续性存在

一段正长度区间使 $h(x) > h(x_0)/2$；若 x_0 是端点，就取区间内侧的一段。保序性给出 $\int_a^b h > 0$，矛盾。因此 $h = 0$，即 $f = g$。 ■

例 19.3　积分相等能说明什么　在 $[0,1]$ 上，令 $f(x) = 0$，$g(0) = 1$ 且 $g(x) = 0$（$x > 0$）。这两个函数的积分相等吗？

解　g 只在一个点与零函数不同，因此 Riemann 可积且积分为零；f 的积分也为零。可是 $f(0) = 0 \neq 1 = g(0)$。所以逐点相等结论需要连续性，积分本身不会记录单点处的函数值。 ♦

图 19.1 画出这个反例：蓝色曲线是零函数，橙点把 $g(0)$ 改成 1。

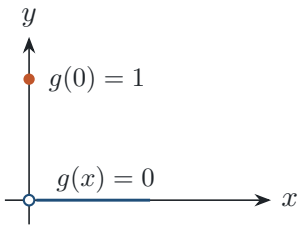


图 19.1　单点处改变函数值，不改变 Riemann 积分，但会破坏逐点相等。

图中蓝线与橙点下方的面积都为零；单个点没有宽度，因此不会给积分增加面积。

想一想　如果 $f \le g$ 且两者积分相等，去掉连续性后还能推出 $f = g$ 吗？
答　不能。取 $f \equiv 0$，令 $g(0) = 1$、$g(x) = 0$（$x > 0$）。两者积分都为 0，但 $f(0) \neq g(0)$。连续性保证了一个正值会扩展到一段正长度区间，正是刚性证明所需的条件。

19.2　累积量为何可导？

取 $f(s) = 2s$，从 0 累积到 x 得 $F(x) = \int_0^x 2s\,\mathrm{d}s = x^2$，所以 $F'(1) = 2 = f(1)$。下面的定理说明这不是巧合：连续的被积函数总是累积函数的导数。

定理 19.3（微积分基本定理，第一部分）　设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续，并令 $F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$。则 F 在 (a,b) 可导，且 $F'(x) = f(x)$。在端点处相应的单侧导数也存在。

直观理解　商 $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ 是短区间上的平均函数值。区间越短，连续函数在里面越接近 $f(x)$；平均值也因此趋近 $f(x)$。

思路　将差商写成 $[x, x+h]$ 上 f 的平均值。减去 $f(x)$ 后，用连续性控制区间内所有 $f(s) - f(x)$；这个估计对正、负的 h 都成立。

证明　固定 $x \in (a,b)$，取足够小的 $h \neq 0$ 使 $x + h \in [a,b]$。由积分区间可加性，

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(s) - f(x)\big)\,\mathrm{d}s.$$

因此

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \le \sup_{\min(x,x+h)\le s\le \max(x,x+h)} |f(s)-f(x)|.$$

当 $h\to 0$ 时，右侧由 f 在 x 连续而趋于 0，所以差商趋于 $f(x)$。端点处用同一估计令 h 从区间内侧趋于 0，得到相应单侧导数。 ■

连续性不能去掉。令 $f(x)=0$（$x<0$）、$f(x)=1$（$x\ge 0$）于 $[-1,1]$，则 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s$ 在 $x\le 0$ 时为 0，在 $x\ge 0$ 时为 x。左右差商分别为 0 与 1，故 $F'(0)$ 不存在。

证明还揭示了一个局部版本：若 f 在整个 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，并在内点 x_0 连续，那么 $F(x)=\int_a^x f$ 仍在 x_0 可导且 $F'(x_0)=f(x_0)$。差商估计只涉及 x_0 附近的函数值，因此证明这个逐点结论时，只需 f 在目标点连续；全区间连续则是方便而常用的充分条件。

■ **例 19.4　直接由积分构造原函数**　设 $f(s)=2s$（$0\le s\le 2$），令 $F(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$。求 $F(1)$、$F'(1)$，并用 $h=\pm\frac{1}{10}$ 检查差商。

解　先计算原函数：$F(x)=\int_0^x 2s\,\mathrm{d}s=x^2$。所以 $F(1)=1$，而定理 19.3 给出 $F'(1)=f(1)=2$。有限差商为

$$\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1}{h}=2+h,$$

在 $h=\frac{1}{10}$ 与 $h=-\frac{1}{10}$ 时分别为 $\frac{21}{10}$、$\frac{19}{10}$，两者夹住极限 2。 ♦

图 19.2 展示 $F(1)$：它是曲线 $f(s)=2s$ 在 $[0,1]$ 上方的三角形面积。

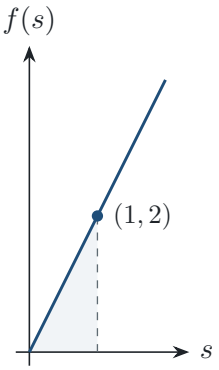


图 19.2　$F(x)=\int_0^x 2s\,\mathrm{d}s=x^2$ 是累积面积，且 $F'(1)=f(1)=2$。

阴影三角形的底和高均为 1、2，面积为 1；曲线在 $s=1$ 的高度则给出累积量的瞬时变化率。

方法：差商化为局部平均　遇到 $F(x)=\int_a^x f$ 的导数，先用积分可加性把差商写成短区间上的平均值，再用连续性让这个平均值靠近 $f(x)$。

19.3　导数如何恢复积分？

第 18 讲用上下和定义积分；现在若已知一个函数的导数，能否直接算出积分？例如 x^2 的原函数是 $x^3/3$，端点相减得到 $1/3$。下面的定理说明这种计算对所有可积导数都成立。

定理 19.4（微积分基本定理，第二部分）　设 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $F'=f\in\mathcal{R}([a,b])$。则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

直观理解　在每个小区间上，导数乘区间长度给出函数值的改变量。把这些改变量相加时，中间端点的函数值会两两抵消，只留下 $F(b)-F(a)$。

思路　取上下和差很小的分划。在每个子区间用中值定理把 F 的改变量写成 $f(\xi_i)\Delta x_i$；它夹在下和与上和之间。令上下和差趋于零，即可把端点差与积分识别为同一个数。

证明　给定 $\varepsilon>0$。因为 f 可积，取分划 $P=\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}$ 使 $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$。记 m_i,M_i 为 f 在第 i 段的下、上确界。由中值定理，存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，使

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i.$$

因此 $m_i\Delta x_i\le F(x_i)-F(x_{i-1})\le M_i\Delta x_i$。对各段求和，望远镜消去中间项：

$$L(f,P)\le F(b)-F(a)\le U(f,P).$$

积分 $\int_a^b f$ 也在同一上下和之间，故二者相差小于 ε。ε 任意，等式成立。 ∎

■ **例 19.5　多项式积分**　计算 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1(3x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x$。

解　先分别写出原函数 $x^3/3$ 与 x^3-x^2+x，再代入端点。第一项为 $1/3-0=1/3$；第二项为 $(1-1+1)-0=1$。这些结果也与积分的线性相符。 ♦

把乘积求导公式 $(FG)'=F'G+FG'$ 积分，就得到分部积分：

推论 19.5（分部积分）　若 F,G 在 $[a,b]$ 上可导且 F',G' 连续，则

$$\int_a^b F'(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b F(x)G'(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明　乘积 FG 的导数连续，应用定理 19.4 得

$$F(b)G(b)-F(a)G(a)=\int_a^b (F'G+FG')\,\mathrm{d}x.$$

由积分线性移项即得公式。 ∎

Pset 9 第 4 题给出的换元公式可以直接由微积分基本定理推出。后面第 20 讲还会用到导数在端点为零的情形，因此这里允许导数为零，但仍要求参数严格递增。

定理 19.6（换元公式）　设 $a<b$、$A<B$，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，且 $\varphi:[A,B]\to[a,b]$ 连续可导、严格递增。若 $\varphi(A)=a$、$\varphi(B)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

证明　令 $H(y)=\int_a^{\varphi(y)} f(x)\,\mathrm{d}x$。严格递增性使 $\varphi(y)\in(a,b)$（$A<y<B$）；由微积分基本定理第一部分和链式法则，$H'(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y)$。右侧在闭区间连续，故可积；对 H 应用第二部分：

$$\int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y=H(B)-H(A)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

∎

Pset 9 的假设 $\varphi'>0$ 蕴含严格递增；这里的版本也允许端点处 $\varphi'=0$。例如第 20 讲的 $\varphi(s)=s^2$ 在 $[0,1]$ 上严格递增，但 $\varphi'(0)=0$。

例 19.6　分部积分的一个具体计算　计算 $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$。

解　按推论的记号取 $F(x)=e^x$、$G(x)=x$，于是 $F'=e^x$、$G'=1$。分部积分给出

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=e-(e-1)=1.$$

选择一个因子求导，另一个因子保留为原函数，是这类题的关键。 ♦

方法：端点差　看到被积函数是某个导数，先找原函数，再计算 $F(b)-F(a)$；看到乘积，优先把 $(FG)'$ 展开，必要时使用分部积分。

例 19.7　可积导数不必连续　令 $F(0)=0$，$F(x)=x^2\sin(1/x)$（$0<x\le 1$）。说明 F' Riemann 可积但不连续，并计算 $\int_0^1 F'(x)\,\mathrm{d}x$。

解　在 0 处，$F'(0)=\lim_{h\to0} h\sin(1/h)=0$；对 $x>0$，

$$F'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x).$$

沿 $x_n=1/(2n\pi)$ 取值时，$F'(x_n)=-1$；沿 $y_n=1/((2n+1)\pi)$ 取值时，$F'(y_n)=1$。两列都趋于 0，所以导数在 0 没有极限。它有界，在 $(0,1]$ 连续；由第 18 讲的单点可积例子，$F'\in\mathcal{R}([0,1])$。第二部分给出 $\int_0^1 F'=F(1)-F(0)=\sin 1\approx 0.841471$。这说明第二部分不要求导数连续。 ♦

想一想　第二部分定理要求 F' Riemann 可积，是否还必须连续？

答　不必。上例的导数有界，除 0 外连续，因而 Riemann 可积；它在 0 处不连续，但端点差公式仍成立。连续性是第一部分构造累积函数时所需的条件，第二部分只需要导数可积。

19.4　积分的平均值与右端点近似

连续函数在闭区间上会取到最小值 m 与最大值 M。保序性给出 $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$；介值定理于是能把平均积分值还原成某个点的函数值。

定理 19.7（积分平均值定理）　设 $a<b$，且 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续。则存在 $c\in[a,b]$ 使

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明　设 $m=\min_{[a,b]}f$、$M=\max_{[a,b]}f$。由 $m\le f\le M$ 和保序性，$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f\le M$。连续函数在 $[a,b]$ 上取遍 $[m,M]$，故介值定理给出所需 c。若 $m=M$，函数为常数，任取 c 即可。 ■

连续性不能去掉。令 $h(x)=0$（$0\le x<1/2$）、$h(x)=1$（$1/2\le x\le 1$）。它可积且平均值为 $1/2$，但只取 0 和 1，没有点 c 使 $h(c)=1/2$。

■ **例 19.8　求平均值点**　在 $[0,1]$ 上取 $f(x)=x^2$。求积分平均值及一个满足定理的点 c。

解　由前面的计算，平均值是 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=1/3$。令 $c^2=1/3$，取 $c=1/\sqrt{3}\in[0,1]$，便有 $f(c)=1/3$。 ♦

定理 19.8（右端点和的误差估计）　设 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $|f'(x)|\le M$。对每个 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(j/n)\right|\le\frac{M}{n}.$$

证明　在每个 $I_j=[(j-1)/n,\,j/n]$ 上，中值定理给出 $|f(x)-f(j/n)|\le M/n$。积分后并对 j 求和，得到

$$\left|\int_{I_j}f(x)\,\mathrm{d}x-f(j/n)/n\right|\le M/n^2.$$

将 n 个不等式相加，三角不等式给出总误差不超过 $n\cdot M/n^2=M/n$。 ■

图 19.3 对比 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上的积分面积与 $n=4$ 的右端点矩形。

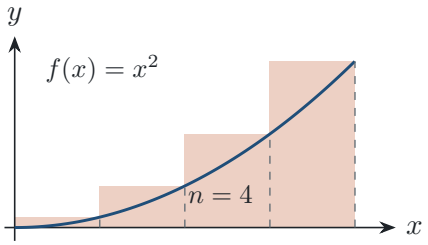


图 19.3　右端点矩形都覆盖对应小区间中的曲线，误差由每段的斜率界控制。

矩形总面积为 $\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(j/4)^2 = 15/32$，而精确积分是 $1/3$，误差为 $13/96 < 1/2$；定理给出的界比较粗，但随 n 线性趋于零。

误差的方向还取决于函数的单调性。若 f 递增，则在每个小区间 I_j 上都有 $f(x) \le f(j/n)$，所以右端点矩形在曲线上方，右端点和不小于积分；若 f 递减，方向相反。导数绝对值的界只限制误差大小，本身不能判断误差符号。以 $f(x) = 1 - x$、$n = 4$ 为例，精确积分是 $1/2$，右端点和是 $3/8$，误差为 $-1/8$；这里 $f' = -1$，定理只保证误差绝对值不超过 $1/4$。

对 $f(x) = x^2$ 还可算出任意 n 的右端点和。利用 $1^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$，

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

所以 $R_n - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1/(2n) + 1/(6n^2) > 0$，既核对了递增函数时右端点和偏大的方向，也显示实际误差约为 $1/(2n)$，小于定理给出的 $2/n$。

19.5　积分如何测量弧长?

直线段的长度由勾股定理计算。若曲线由 $s \mapsto (f(s), g(s))$ 给出，短时间内的水平、竖直位移分别约为 $f'(s)\,\mathrm{d}s$ 和 $g'(s)\,\mathrm{d}s$，所以短弧长约为速度 $\sqrt{f'(s)^2 + g'(s)^2}$ 乘以参数增量。

定义 19.9（光滑曲线的弧长）　设 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 可导且导数连续。参数曲线 $s \mapsto (f(s), g(s))$ 的**弧长**（arc length）定义为

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(s)^2 + g'(s)^2}\,\mathrm{d}s.$$

■ **例 19.9　抛物线的一段弧**　求曲线 (s, s^2)（$0 \le s \le 1$）的弧长积分式，并给出数值近似。

解　两坐标的导数是 1 与 $2s$，故速度为 $\sqrt{1 + 4s^2}$，弧长是

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4s^2}\,\mathrm{d}s \approx 1.478943.$$

数值由 Simpson 求积核对。第 20 讲将从内接折线证明弧长公式，并进一步算出这个积分的精确值。 ♦

图 19.4 标出这段曲线的两个端点；小箭头表示参数增加时的运动方向。

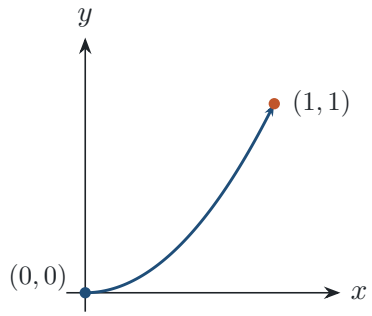


图 19.4　曲线 (s, s^2) 从 $(0, 0)$ 走到 $(1, 1)$，其弧长由速度积分给出。

弧长公式将每一小段的速度累加起来。参数范围与端点已标在图中，具体数值由积分核验。

在单位圆上，取上半圆参数 $\gamma(s)=(s,\sqrt{1-s^2})$。对 $-1<s<1$，速度为

$$\sqrt{1+\left(\frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

从 $(1,0)$ 到 $(x,\sqrt{1-x^2})$ 的弧长因此是 $\int_x^1(1-s^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}s$。同一速度从顶点 $(0,1)$ 积到横坐标 x，定义**反正弦函数**（inverse sine）：

$$\arcsin x:=\int_0^x\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}},\qquad -1<x<1.$$

被积函数在每个内部闭区间上连续，所以微积分基本定理给出 $\arcsin'(x)=1/\sqrt{1-x^2}$。积分上下限的方向也决定符号：$x>0$ 时 $\arcsin x$ 等于从圆顶向右走到横坐标 x 的弧长；$x<0$ 时积分为负，几何上的无向弧长是 $-\arcsin x$。端点的积分按下一节的反常积分定义理解；第 20 讲会继续用弧长定义 $\arccos$ 与 π。

图 19.5 展示 $x=1/2$ 时从圆顶到对应点的弧，弧长由 arcsin 的积分定义给出。

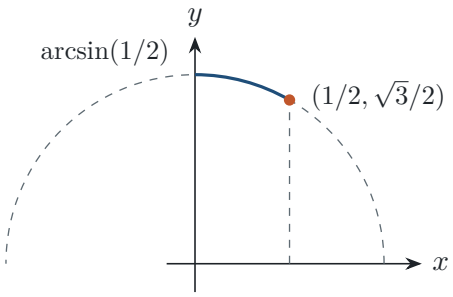


图 19.5　单位圆上从 $(0,1)$ 到 $(1/2,\sqrt{3}/2)$ 的弧长等于积分定义的 $\arcsin(1/2)$。

圆弧的速度在参数 s 上等于 $1/\sqrt{1-s^2}$；图中标出的横坐标范围是 $[0,1/2]$，所以弧长就是定义中的积分。

19.6　区间无界或函数无界时怎么办?

普通 Riemann 积分要求函数在闭区间上有界。对 $[1,\infty)$ 上的 $1/x^2$，我们可以先算有限区间 $[1,c]$，再让 c 变大；端点附近无界的情形也可以先避开奇点，再取极限。这样的极限若存在且有限，就给出**反常积分**（improper integral）。

定义 19.10（无穷区间上的反常积分）　设 f 在每个 $[a,c]$（$c>a$）上 Riemann 可积。若有限极限 $A=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并定义其值为 A。

■ **例 19.10　无穷区间上的两个对照**　判断 $\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x$ 是否收敛。

解　先在有限区间上计算：

$$\int_1^c\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c=1-\frac{1}{c}\longrightarrow 1.$$

故第一个反常积分收敛且等于 1。另一方面，

$$\int_1^c \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln c \longrightarrow +\infty,$$

没有有限极限，第二个积分发散。 ♦

截断积分不一定单调，也可能有界却没有极限。例如 $f(x)=\sin x$ 在每个有限区间都可积，但

$$\int_0^c \sin x \, \mathrm{d}x = 1 - \cos c.$$

当 $c = 2k\pi$ 时这个值为 0，当 $c=(2k+1)\pi$ 时为 2；两列截断点都趋于无穷，而积分值趋向不同的数。因此反常积分的定义要求 $c\to\infty$ 时存在同一个有限极限，光有界不足以满足要求。

表 19.1 把两个截断积分放在一起。有限的计算能显示趋势，但只有取极限才能决定反常积分是否收敛。

截断点 c	$\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x$	$\int_1^c x^{-1}\,\mathrm{d}x$
2	$1/2$	$\ln 2 \approx 0.693147$
4	$3/4$	$\ln 4 \approx 1.386294$
8	$7/8$	$\ln 8 \approx 2.079442$

表 19.1　$1/x^2$ 的截断积分逐渐接近 1，而 $1/x$ 的截断积分持续增大。

定义 19.11（端点处无界的反常积分）　设 f 在每个 $[c,b]$（$a<c<b$）上 Riemann 可积。若有限极限 $A=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$，并称该反常积分收敛。

■ **例 19.11　端点无界也可能有有限积分**　比较 $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x$。

解　先从 $c>0$ 积起：

$$\int_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2-2\sqrt{c} \longrightarrow 2 \quad (c\to 0^+), \qquad \int_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln c \longrightarrow +\infty.$$

所以第一个反常积分收敛且等于 2，第二个发散。$x^{-1/2}$ 在 0 附近无界，却仍有有限的反常积分。 ♦

同样的比较说明 §5 中 $\arcsin x$ 的端点积分也有限。对 $0\le s<1$，$1/\sqrt{1-s^2}\le 1/\sqrt{1-s}$，而右侧在 $[c,1]$ 上的积分为 $2\sqrt{1-c}$。对 $-1<s\le 0$，有 $1/\sqrt{1-s^2}\le 1/\sqrt{1+s}$，右侧在 $[-1,c]$ 上的积分为 $2\sqrt{1+c}$。两端的截断尾积分都趋于零，因此把 arcsin 的定义延伸到 $x=\pm 1$ 时仍得到有限值；这里不能把奇点处的被积函数直接代入普通积分公式。

易错提醒　函数趋于 0 不足以保证无穷区间上的反常积分收敛：$1/x\to 0$，但 $\int_1^c 1/x\,\mathrm{d}x = \ln c\to+\infty$。判定时必须检查积分的极限，不能只看被积函数的极限。

图 19.6 只画出 $[1,4]$ 上的曲线；两条尾部从 4 继续向右延伸。

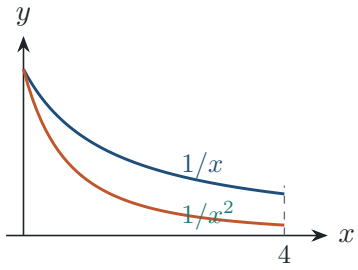


图 19.6　$1/x^2$ 的无穷尾积分有限，而 $1/x$ 的无穷尾积分发散。

有限窗内 $\int_1^4 x^{-2}\,\mathrm{d}x = 3/4$，但 $\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x = 1$；另一条曲线的面积 $\int_1^c 1/x\,\mathrm{d}x = \ln c$ 随 c 无界增长。

想一想　如果 $f(x)\to 0$（$x\to\infty$），能否断定 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛？

答　不能。$1/x\to 0$，但其截断积分为 $\ln c$，没有有限极限；$1/x^2$ 也趋于 0，截断积分却趋于 1。是否收敛取决于整个尾部的累积，而不只取决于函数值最后趋向什么。

前后联系　第 20 讲将继续讨论弧长、由弧长定义的角度，以及函数列的一致收敛；习题集 10 中交换一致极限与积分的题留在第 21 讲处理。

本讲小结

- 积分线性：$\int_a^b (cf+g) = c\int_a^b f + \int_a^b g$；若 $f\le g$，则 $\int_a^b f \le \int_a^b g$。
- 区间可加：$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$；且 $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$。
- FTC 第一部分：$F(x)=\int_a^x f$ 且 f 连续时，$F'(x)=f(x)$。
- FTC 第二部分：$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续、在 (a,b) 可导且 $F'=f\in\mathcal{R}([a,b])$ 时，$\int_a^b f = F(b)-F(a)$；若 f 连续、$\varphi:[A,B]\to[a,b]$ 连续可导且严格递增、端点对应，则 $\int_a^b f = \int_A^B f(\varphi)\varphi'$。
- 积分平均值定理：连续函数取到积分平均值；若 $|f'|\le M$，右端点和误差不超过 M/n。递增函数的右端点和偏大，递减函数的偏小；x^2 的误差精确为 $1/(2n)+1/(6n^2)$。
- 参数曲线的弧长是 $\int_a^b \sqrt{(f')^2+(g')^2}$；$\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$（$|x|<1$）。
- 反常积分按截断积分取极限；只有有限极限存在时才收敛。截断积分即使有界，也须趋于唯一的有限值才能收敛。

练习

19.1 ★　设 $\int_a^b f = 2$、$\int_a^b g = -1$，求 $\int_a^b (2f-3g)$。

19.2 ★　用奇偶性和区间可加性计算 $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$。

19.3 ★★　证明 Pset 9 第 1 题 (2) 的积分刚性结论，并举反例说明连续性不可删。

19.4 ★　令 $F(x)=\int_0^x (3s^2-2s)\,\mathrm{d}s$。求 $F(x)$ 并计算 $F'(1)$。

19.5 ★ 用微积分基本定理计算 $\int_0^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x$。

19.6 ★★ 用分部积分计算 $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$。

19.7 ★★ 对 $f(x)=2x+1$（$0\le x\le 2$），求积分平均值并给出满足定理的 c。

19.8 ★★ 判断 $\int_2^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性，并求前者的值。

19.9 ★ 用弧长公式求线段参数曲线 $\gamma(t)=(3t,4t)$（$0\le t\le 1$）的长度。

19.10 ★★ 用换元公式计算 $\int_1^3 x(x-1)\,\mathrm{d}x$，取 $\varphi(y)=2y+1$，写出换元后的积分。

练习答案与提示

19.1 由线性，$\int(2f-3g)=2\cdot 2-3(-1)=7$。

19.2 x^3 是奇函数，故 $\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x=0$。拆开计算也有 $\int_{-1}^0 x^3\,\mathrm{d}x=-1/4$、$\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=1/4$，两段相加为 0。

19.3 令 $h=g-f$，则 h 连续、非负且 $\int_a^b h=0$。若 $h(x_0)>0$，连续性给出一个相对区间 $J\subseteq[a,b]$，其长度为正且 $h>h(x_0)/2$；于是 $\int_a^b h\ge (h(x_0)/2)|J|>0$，矛盾。反例取 $f\equiv 0$、$g(0)=1$ 且 $g(x)=0$（$x>0$）；g Riemann 可积，两积分同为 0，但 $f(0)\ne g(0)$。

19.4 直接积分得 $F(x)=x^3-x^2$，所以 $F'(x)=3x^2-2x$。第一部分也给出 $F'(1)=3-2=1$，且 $F(1)=1-1=0$。

19.5 原函数是 x^2+x，故 $\int_0^2(2x+1)\,\mathrm{d}x=[x^2+x]_0^2=(4+2)-0=6$。

19.6 取 $F(x)=e^x$、$G(x)=x$。则 $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=e-(e-1)=1$。

19.7 平均值为 $\frac{1}{2-0}\int_0^2(2x+1)\,\mathrm{d}x=6/2=3$。令 $2c+1=3$，得 $c=1\in[0,2]$。

19.8 $\int_2^c x^{-2}\,\mathrm{d}x=1/2-1/c\to 1/2$，故前者收敛且值为 $1/2$；$\int_1^c x^{-1}\,\mathrm{d}x=\ln c\to+\infty$，故后者发散。

19.9 $\gamma'(t)=(3,4)$，速度恒为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$。因此长度为 $\int_0^1 5\,\mathrm{d}t=5$。

19.10 $\varphi'(y)=2>0$，且 $\varphi(0)=1$、$\varphi(1)=3$。换元后

$$\int_1^3 x(x-1)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (2y+1)(2y)\cdot 2\,\mathrm{d}y=\int_0^1 (8y^2+4y)\,\mathrm{d}y=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}.$$

第 20 讲

积分的应用：弧长与角度；函数列的一致收敛

Applications of the Integral: Arclength and Angle; Uniform Convergence

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 20 讲义（弧长、用弧长定义角度与 arccos、逐点收敛与一致收敛、Weierstrass M 判别法、幂级数的一致收敛）；弧长的折线定义与积分公式在 Lecture 19 讲义末尾已出现。例 20.9 改编自习题集 10 第 3 题，练习 20.9 改编自习题集 10 第 5 题；求反函数导数用到习题集 8 第 3 题，换元公式见习题集 9 第 4 题。

本讲目标

(1) 理解曲线长度的定义：内接折线长度的上确界；知道「加细不减」和「长度可加」这两条基本性质。

(2) 掌握连续可导曲线的弧长公式 $\ell(\gamma)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$，能看懂用中值定理和一致连续性给出的证明，并会计算具体曲线的长度。

(3) 理解怎样用弧长定义角度：由反常积分定义 arccos 和 π，把 cos 定义为 arccos 的反函数，并用单位圆纵坐标定义 sin，推出 $\cos'=-\sin$、$\sin'=\cos$。

(4) 分清函数列的逐点收敛（pointwise convergence）与一致收敛（uniform convergence）：会写出两者的量词，会用 $\sup|f_n-f|\to 0$ 判别一致收敛，会用介值定理说明 x^n 在 $[0,1]$ 上不一致收敛。

(5) 掌握 Weierstrass M 判别法，并用它证明幂级数在 $[-L,L]$（$L<R$）上一致收敛。

本讲分两部分。前半部分是积分的一个几何应用：怎样定义并计算曲线的长度。有了长度，就能严格地定义「角度」，进而定义 π、cos 与 sin，这填补了我们一直悬而未决的一个漏洞。后半部分转向函数列：当 $f_n\to f$ 时，f_n 的连续性、积分、导数能否传给 f？回答这些问题需要一种比逐点收敛更强的收敛方式，即一致收敛。本讲给出定义、判别方法和主要例子，下一讲用它证明极限与积分、求导的交换定理。

20.1 曲线的长度：用内接折线逼近

线段的长度是两端点的距离。对弯曲的曲线，最自然的想法是：在曲线上取一串点，用线段依次连起来，得到一条内接折线，折线的长度可以直接算；点取得越密，折线越贴近曲线。

先把「曲线」说清楚。本讲中，平面上的一条**曲线**（curve）是指一个连续映射

$$\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2,\qquad \gamma(t)=\big(x(t),\,y(t)\big),$$

其中 $x(t),y(t)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数。t 可以想成时间，$\gamma(t)$ 是动点在时刻 t 的位置。对平面上的点 $p=(p_1,p_2)$，记 $|p|=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$，于是 $|p-q|$ 就是 p,q 两点的距离。它满足三角不等式 $|p-r|\le|p-q|+|q-r|$。

定义 20.1（曲线的长度）　设 $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是曲线，$P=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$ 是 $[a,b]$ 的分划。称

$$\ell(\gamma,P)=\sum_{i=1}^{n}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$$

为对应于 P 的**内接折线长度**（inscribed polygonal length）。曲线的**长度**（length）定义为

$$\ell(\gamma)=\sup_{P}\,\ell(\gamma,P)\in[0,\infty],$$

上确界取遍 $[a,b]$ 的所有分划。若 $\ell(\gamma)<\infty$，称 γ **可求长**（rectifiable）。

直观理解　图 20.1 画出了一条曲线和它的一条内接折线。折线的每一段都是「抄近路」，所以直觉上折线不会比曲线长；点取得越多，近路抄得越少。这正是定义中取上确界的原因。

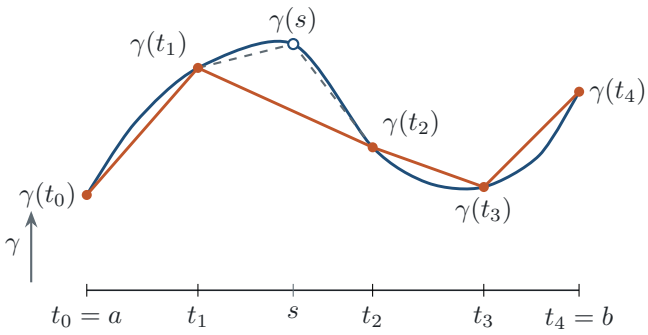


图 20.1　曲线 γ（蓝）与分划 $P=\{t_0,\dots,t_4\}$ 对应的内接折线（橙）。在 t_1,t_2 之间插入新分点 s，橙色线段 $\gamma(t_1)\gamma(t_2)$ 被两条虚线代替；由三角不等式，折线只会变长。

引理 20.2（加细不减与长度可加）　设 $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是曲线。

(1) 若分划 $P'\supseteq P$（P' 是 P 的加细），则 $\ell(\gamma,P)\le\ell(\gamma,P')$。

(2) 对 $a<c<b$，有 $\ell(\gamma)=\ell(\gamma|_{[a,c]})+\ell(\gamma|_{[c,b]})$（允许两边为 ∞）。

(3) $\ell(\gamma)\ge|\gamma(b)-\gamma(a)|$：两点之间线段最短。

证明　(1) 只需看加入一个分点 $s\in(t_{i-1},t_i)$ 的情形，一般情形重复这一步即可。加入 s 后，和式中只有一项 $|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$ 被换成 $|\gamma(s)-\gamma(t_{i-1})|+|\gamma(t_i)-\gamma(s)|$，由三角不等式后者不小于前者。

(2) 若 P_1, P_2 分别是 $[a,c]$、$[c,b]$ 的分划，则 $P_1 \cup P_2$ 是 $[a,b]$ 的分划，且 $\ell(\gamma|_{[a,c]}, P_1) + \ell(\gamma|_{[c,b]}, P_2) = \ell(\gamma, P_1 \cup P_2) \le \ell(\gamma)$。对 P_1、P_2 分别取上确界，得「$\ge$」。反过来，对 $[a,b]$ 的任一分划 P，由 (1)，$\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma, P \cup \{c\})$，而 $P \cup \{c\}$ 恰好拆成 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 各一个分划，故 $\ell(\gamma, P) \le \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]})$。对 P 取上确界，得「$\le$」。

(3) 取最粗的分划 $P = \{a, b\}$ 即可。 ■

由 (1)，「分点越多折线越长」，所以定义中用上确界而不用「网格趋于 0 时的极限」：上确界对任何曲线都有意义（可能是 ∞），不必先证明极限存在。对连续可导曲线，下一节会顺带证明这个极限确实存在，并且等于上确界。

注 20.1 [长度与参数的选取无关] 设 $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ 是严格单调的连续满射。那么 $\gamma \circ \varphi$ 与 γ 的长度相同。理由：φ 把 $[c,d]$ 的分划一一对应地变成 $[a,b]$ 的分划（φ 递减时次序反过来），而两者在曲线上取的是同一组点、连成同一条折线，所以 $\ell(\gamma \circ \varphi, Q) = \ell(\gamma, \varphi(Q))$。对两边取上确界即得。长度只依赖于**走过的路径和经过的先后次序**，与走得多快无关。

■ **例 20.1　抛物线的内接折线**　设 $\gamma(t) = (t, t^2)$，$t \in [0,1]$，即抛物线 $y = x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段。把 $[0,1]$ 等分成 n 份，计算内接折线的长度，并观察 n 增大时的变化。

解　取 $t_i = i/n$。第 i 段的水平增量是 $1/n$，竖直增量是 $\frac{i^2-(i-1)^2}{n^2} = \frac{2i-1}{n^2}$，所以

$$\ell(\gamma, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{(2i-1)^2}{n^4}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{2i-1}{2n}\right)^2}.$$

$n = 1$ 时是弦长 $\sqrt{2}$；$n = 2$ 时是 $\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{4}$。数值如下表。

n	1	2	4	8	16	100
$\ell(\gamma, P_n)$	1.414214	1.460405	1.474280	1.477778	1.478652	1.478935

$n = 1, 2, 4, 8, 16$ 的分划一个比一个细，长度一个比一个大，与引理 20.2(1) 一致。再看上面和式的形状：$\frac{2i-1}{2n}$ 正是第 i 个小区间的中点，所以 $\ell(\gamma, P_n)$ 是函数 $\sqrt{1+4x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一个黎曼和。它夹在这个函数的下和与上和之间，而连续函数的上、下和在网格趋于 0 时趋于同一个积分（第 18 讲），所以

$$\lim_{n\to\infty} \ell(\gamma, P_n) = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, \mathrm{d}x.$$

下一节将证明这个积分就是 $\ell(\gamma)$，并算出它等于 $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \approx 1.478943$。 ♦

易错提醒

- 连续曲线不一定可求长。练习 20.6 构造了一个 $[0,1]$ 上的连续函数，它的图像长度是 ∞。所以定义里必须允许 $\ell(\gamma) = \infty$。
- 长度属于映射 γ，不属于像集 $\gamma([a,b])$。例如 $\gamma(t) = (1 - |t-1|, 0)$，$t \in [0,2]$，从原点走到 $(1,0)$ 再走回来，像集是长为 1 的线段，而 $\ell(\gamma) = 2$。

20.2　连续可导曲线的弧长公式

对光滑的曲线，长度可以用积分算出来。直观上，在很短的时间 $\mathrm{d}t$ 内，动点几乎沿直线走，位移约为 $\big(x'(t)\,\mathrm{d}t,\ y'(t)\,\mathrm{d}t\big)$，走过的路程约为 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$，即「速率乘以时间」。把这些小段加起来就是积分。

定理 20.3（弧长公式）　设 $x(t),y(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导（导数在 $[a,b]$ 上存在且连续），$\gamma(t)=(x(t),y(t))$。则 γ 可求长，并且

$$\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

此外，当分划 P 的网格 $\operatorname{mesh}(P)=\max_i(t_i-t_{i-1})\to 0$ 时，$\ell(\gamma,P)\to\ell(\gamma)$。

思路　记速率 $v(t)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$，它是连续函数，因而可积；记 $L=\int_a^b v$。对每一小段用中值定理，把弦长写成「某点的导数乘以 Δt_i」，于是 $\ell(\gamma,P)$ 很接近 v 的一个黎曼和。难点在于：对 x 和 y 分别用中值定理，得到的中间点一般不是同一个。好在两个中间点落在同一个小区间里，用 y' 的一致连续性就能控制这点差别。

证明　设 $P=\{t_0<\cdots<t_n\}$，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$。对 x 和 y 在 $[t_{i-1},t_i]$ 上分别用中值定理，存在 $\xi_i,\eta_i\in(t_{i-1},t_i)$，使

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i)\,\Delta t_i,\qquad y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\eta_i)\,\Delta t_i.$$

于是第 i 段弦长为 $\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}\,\Delta t_i$。对 $\mathbb{R}^2$ 中的向量 $p=(x'(\xi_i),y'(\eta_i))$ 与 $q=(x'(\xi_i),y'(\xi_i))$ 用三角不等式 $\big||p|-|q|\big|\le|p-q|$，得

$$\Big|\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}-v(\xi_i)\Big|\le|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|.$$

给定 $\varepsilon>0$。y' 与 v 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，因而一致连续（第 18 讲），所以存在 $\delta>0$，当 $|s-t|<\delta$ 时 $|y'(s)-y'(t)|<\varepsilon$ 且 $|v(s)-v(t)|<\varepsilon$。下设 $\operatorname{mesh}(P)<\delta$。

第一步，比较折线与黎曼和。ξ_i,η_i 在同一个小区间中，距离小于 δ，所以

$$\Big|\ell(\gamma,P)-\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i\Big|\le\sum_{i=1}^{n}|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\,\Delta t_i\le\varepsilon\,(b-a).$$

第二步，比较黎曼和与积分。记 m_i,M_i 为 v 在 $[t_{i-1},t_i]$ 上的最小值与最大值，则 $M_i-m_i\le\varepsilon$。黎曼和 $\sum v(\xi_i)\Delta t_i$ 与积分 L 都夹在下和 $\sum m_i\Delta t_i$ 与上和 $\sum M_i\Delta t_i$ 之间，而上下和之差 $\sum(M_i-m_i)\Delta t_i\le\varepsilon(b-a)$，所以 $\big|\sum v(\xi_i)\Delta t_i-L\big|\le\varepsilon(b-a)$。

两步合起来：只要 $\operatorname{mesh}(P)<\delta$，就有 $|\ell(\gamma,P)-L|\le 2\varepsilon(b-a)$。这就证明了 $\ell(\gamma,P)\to L$。

最后证明 $\ell(\gamma)=L$。任给分划 P，把它加细成网格小于 δ 的 P'，由引理 20.2(1)，$\ell(\gamma,P)\le\ell(\gamma,P')\le L+2\varepsilon(b-a)$，所以 $\ell(\gamma)\le L+2\varepsilon(b-a)$。另一方面，取一个网格小于 δ 的分划，得 $\ell(\gamma)\ge L-2\varepsilon(b-a)$。由 ε 的任意性，$\ell(\gamma)=L$。 ■

易错提醒　不能对向量值的 γ 直接用中值定理，即一般不存在同一个 $\xi\in(a,b)$ 使 $\gamma(b)-\gamma(a)=\gamma'(\xi)(b-a)$。例如 $\gamma(t)=(t^2,t^3)$，$t\in[-1,1]$。若存在这样的 ξ，则 $(0,2)=2(2\xi,3\xi^2)$；第一坐标迫使 $\xi=0$，第二坐标却不成立。所以证明中必须分别处理两个坐标，中间点一般不同。

取 $\gamma(t)=(t,f(t))$，立即得到函数图像的弧长公式。

推论 20.4（函数图像的长度）　若 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，则 $y=f(x)$ 的图像长度为 $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$。

例 20.2　抛物线的精确长度　求 $y=x^2$ 在 $0\le x\le 1$ 上的长度，与例 20.1 的表格对照。

解　由推论 20.4，长度为 $\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$。换元 $u=2x$，它等于 $\frac12\int_0^2\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$。令

$$F(u)=\frac12\Big(u\sqrt{1+u^2}+\ln\big(u+\sqrt{1+u^2}\big)\Big).$$

直接求导验证 $F'(u)=\sqrt{1+u^2}$：

$$\Big(u\sqrt{1+u^2}\Big)'=\sqrt{1+u^2}+\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}},\qquad \Big(\ln\big(u+\sqrt{1+u^2}\big)\Big)'=\frac{1+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{u+\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

两者相加得 $\sqrt{1+u^2}+\frac{u^2+1}{\sqrt{1+u^2}}=2\sqrt{1+u^2}$，乘以 $\frac12$ 即是 $\sqrt{1+u^2}$。（这里用到 $(\ln u)'=\frac1u$。第 21 讲将借助一致收敛严格证明 $(e^x)'=e^x$，再由反函数求导法则得到它；本讲的例题先借用这两个公式。）由微积分基本定理，

$$\ell=\frac12\big(F(2)-F(0)\big)=\frac12\Big(\sqrt5+\frac12\ln(2+\sqrt5)\Big)=\frac{\sqrt5}{2}+\frac14\ln(2+\sqrt5)$$
$$\approx 1.118034+0.360909=1.478943.$$

例 20.1 中 $n=100$ 的折线长 1.478935 只比它小 8×10^{-6}。 ♦

例 20.3　半立方抛物线　求 $y=x^{3/2}$ 在 $0\le x\le 4$ 上的长度。

解　$f'(x)=\frac32x^{1/2}$ 在 $[0,4]$ 上连续（在 $x=0$ 处右导数为 0），所以可用推论 20.4：

$$\ell=\int_0^4\sqrt{1+\tfrac94x}\,\mathrm{d}x.$$

函数 $G(x)=\frac{8}{27}\big(1+\frac94x\big)^{3/2}$ 满足 $G'(x)=\frac{8}{27}\cdot\frac32\cdot\frac94\big(1+\frac94x\big)^{1/2}=\big(1+\frac94x\big)^{1/2}$，所以

$$\ell=G(4)-G(0)=\frac{8}{27}\big(10^{3/2}-1\big)=\frac{8}{27}\big(10\sqrt{10}-1\big)\approx 9.0734.$$

作为对照，两端点 $(0,0)$ 与 $(4,8)$ 之间的弦长是 $\sqrt{80}\approx 8.9443$，比弧长短，与引理 20.2(3) 一致。 ♦

历史与背景　Descartes 在《几何学》（1637）中断言，直线与曲线长度之比不为人所知，恐怕也无法被人发现。二十年后，Neile（1657）和 van Heuraet（1659）各自算出了半立方抛物线 $y^2=x^3$ 的弧长，这是第一条被精确求长的代数曲线，所用的思路与例 20.3 相同。随后 Newton 与 Leibniz 的微积分把这类计算变成了常规操作。

■ **例 20.4　悬链线**　悬链线 $y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是两端固定、自然下垂的链子的形状。求它在 $-\ln 2\le x\le \ln 2$ 上的长度。

解　$f'(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$。由 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{4}=1$，得 $1+f'(x)^2=\cosh^2 x$；又 $\cosh x>0$，所以 $\sqrt{1+f'(x)^2}=\cosh x$，被积函数里的根号恰好消掉：

$$\ell=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\cosh x\,\mathrm{d}x=\sinh(\ln 2)-\sinh(-\ln 2)=2\sinh(\ln 2)=e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

两端点都在高度 $\cosh(\ln 2)=\frac{2+1/2}{2}=\frac{5}{4}$ 处，它们的距离是 $2\ln 2\approx 1.3863$，链长 1.5 比跨度长约 8%。 ♦

在一般情形下，记 $\gamma'(t)=(x'(t),y'(t))$，于是速率是 $v(t)=|\gamma'(t)|$。注 20.1 说长度与参数无关；对弧长积分，这一点也可以直接验证。

命题 20.5（弧长积分与参数无关）　设 γ 满足定理 20.3 的条件，$\varphi\colon[c,d]\to[a,b]$ 连续可导，$\varphi'\ge 0$，$\varphi(c)=a$，$\varphi(d)=b$。令 $\tilde\gamma=\gamma\circ\varphi$，则

$$\int_c^d|\tilde\gamma'(s)|\,\mathrm{d}s=\int_a^b|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

证明　由链式法则，$\tilde\gamma'(s)=\varphi'(s)\,\gamma'(\varphi(s))$，又 $\varphi'\ge 0$，所以 $|\tilde\gamma'(s)|=v(\varphi(s))\,\varphi'(s)$。令 $V(t)=\int_a^t v(u)\,\mathrm{d}u$，由微积分基本定理 $V'=v$，再由链式法则 $(V\circ\varphi)'(s)=v(\varphi(s))\varphi'(s)$，这是连续函数。对 $V\circ\varphi$ 用微积分基本定理：

$$\int_c^d|\tilde\gamma'(s)|\,\mathrm{d}s=V(\varphi(d))-V(\varphi(c))=V(b)-V(a)=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$ ■

若 $\varphi'\le 0$，$\varphi(c)=b$，$\varphi(d)=a$（反向走），则 $|\tilde\gamma'|=-v(\varphi)\varphi'$，同样的计算给出同样的结果。

■ **例 20.5　同一条抛物线，换一种走法**　比较 $\tilde\gamma(s)=(s^2,s^4)$ 与 $\gamma(t)=(t,t^2)$：它们走过的曲线是否相同，速度和长度又有什么区别？

解　曲线 $\tilde\gamma(s)=(s^2,s^4)$，$s\in[0,1]$，走过的也是 $y=x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段，只是速度不同：$\tilde\gamma'(s)=(2s,4s^3)$，在 $s=0$ 时动点静止，在 $s=1$ 时速率为 $2\sqrt{5}$，是原参数化 $\gamma(t)=(t,t^2)$ 末速率 $\sqrt{5}$ 的两倍。它的长度为

$$\int_0^1\sqrt{4s^2+16s^6}\,\mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{1+4(s^2)^2}\cdot 2s\,\mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x\approx 1.478943,$$

最后一步是换元 $x=s^2$，即命题 20.5 取 $\varphi(s)=s^2$、$\gamma(t)=(t,t^2)$ 的情形。结果与例 20.2 相同。 ♦

想一想　如果把速率换成 $|x'(t)|+|y'(t)|$，对 $y=x^2$（$0\le x\le 1$）会算出什么？这个数是哪条「路」的长度？

答　$\int_0^1 (1+2x)\,\mathrm{d}x = 2$。这是只许横着走、竖着走的「台阶路」的长度：任何从 $(0,0)$ 单调地走到 $(1,1)$ 的台阶路，横向共走 1、纵向共走 1，总长都是 2。台阶分得越细，台阶路离抛物线越近，但长度始终是 2，不会趋于 1.4789。曲线彼此靠近，长度不一定靠近，§20.4 的移动峰例子也显示，函数值的逐点接近不能替代整体控制。

易错提醒

- 图像公式里是 $\sqrt{1+f'(x)^2}$，不是 $\sqrt{1+f(x)^2}$，也不是 $1+|f'(x)|$。
- 弧长积分算的是「走过的路程」。$(\cos t,\sin t)$ 在 $[0,4\pi]$ 上把圆周走两遍，积分给出 4π，而不是圆周长 2π。
- 定理 20.3 要求导数在闭区间上连续。导数在端点处趋于无穷时（例如下一节的半圆），要先在内部的闭子区间上用公式，再取极限。

20.3　用弧长定义角度：arccos 与 π

微积分课上，角度 θ 是单位圆上从 $(1,0)$ 到 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的弧长。可是 cos、sin 本身又是借助角度定义的，这就绕成了一个圈。本课程至今没有严格定义过 π、cos、sin。现在有了弧长，可以按如下顺序走出这个圈：

$$\text{弧长} \implies \text{角度，即}\arccos\ \text{与}\pi \implies \cos,\ \sin\ \text{（作为反函数）}.$$

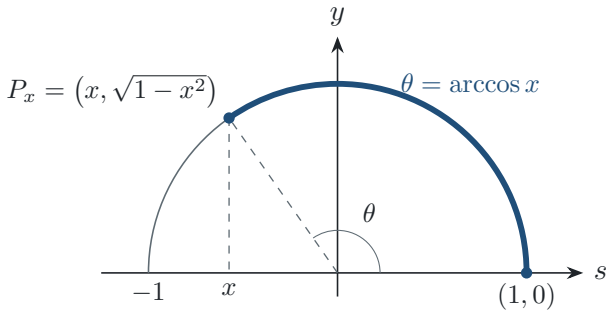


图 20.2　单位上半圆周。角度 θ 定义为从 $(1,0)$ 到 P_x 的弧（蓝色）的长度。用 s 作参数，这段弧是 $s\mapsto(s,\sqrt{1-s^2})$，$s\in[x,1]$。

图 20.2 的横坐标就是参数。对 $-1<s<1$，上半圆可写成 $(s,\sqrt{1-s^2})$，其速度大小为

$$\sqrt{1+\left(\frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

端点 $s=\pm1$ 处导数无界，但积分仍收敛。例如 $0\le s<1$ 时 $1/\sqrt{1-s^2}\le 1/\sqrt{1-s}$，右边在 $[0,1]$ 上的反常积分为 2；左端点由对称性处理。取 s 到 1 的截断弧，再令截断点趋于 1，末段弧长不超过其水平变化量与竖直变化量之和，故趋于 0。因此反常积分确实给出整段弧长。

定义 20.6（由弧长定义角度）　对 $x \in [-1,1]$，定义

$$\arccos x := \int_x^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \pi := \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}.$$

这里端点处的积分按反常积分理解。$\arccos x$ 是上半圆上从 $(1,0)$ 到 $(x,\sqrt{1-x^2})$ 的弧长；π 是整个上半圆的长度。

被积函数为正，所以 arccos 严格递减。在 $(-1,1)$ 上，被积函数连续，由微积分基本定理，arccos 连续。

端点处，反常积分收敛保证相应的尾积分趋于 0，所以连续性延伸到 $[-1,1]$。端点值为

$$\arccos 1 = 0, \qquad \arccos(-1) = \pi.$$

被积函数关于 s 为偶函数，故

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \arccos(-x) + \arccos x = \pi \quad (-1 \le x \le 1).$$

定义 20.7（正弦与余弦）　令 $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ 为 arccos 的反函数。对 $0 \le \theta \le \pi$，定义

$$\sin\theta := \sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

这个定义取非负平方根，正好对应单位上半圆的纵坐标。于是 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，且端点值为 $\cos 0 = 1$、$\cos\pi = -1$、$\cos(\pi/2) = 0$，以及 $\sin 0 = \sin\pi = 0$、$\sin(\pi/2) = 1$。

定理 20.8（正弦与余弦的导数）　在 $-1 < x < 1$ 与 $0 < \theta < \pi$ 上，分别有

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \cos'(\theta) = -\sin\theta, \qquad \sin'(\theta) = \cos\theta.$$

证明　在 $(-1,1)$ 上，被积函数连续，微积分基本定理给出 $\arccos'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$。这个导数不为 0，所以反函数求导公式适用。对 $\arccos(\cos\theta) = \theta$ 求导，得到

$$\cos'(\theta) = \frac{1}{\arccos'(\cos\theta)} = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sin\theta.$$

又因 $0 < \theta < \pi$ 时 $\sin\theta > 0$，对 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 求导并代入 $\cos' = -\sin$，得 $2\sin\theta\,\sin'\theta = 2\sin\theta\,\cos\theta$，约去非零的 $2\sin\theta$ 即得 $\sin' = \cos$。 ∎

例 20.6　上半圆的四分之一弧　求单位圆上从 $(1,0)$ 到 $(0,1)$ 的上半圆弧长，并计算 $\arccos'(0)$、$\cos'(\pi/2)$ 与 $\sin'(\pi/2)$。

解　从定义看，这段弧长是 $\arccos 0$。被积函数关于 s 为偶函数，所以 $\arccos 0 = \pi/2$。再代入导数公式：

$$\arccos'(0) = -1, \qquad \cos'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1, \qquad \sin'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0.$$

因此定义所得的角度与熟悉的四分之一圆弧相符，导数也由弧长参数推出。 ♦

想一想 为什么定义 $\sin\theta$ 时要取 $\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 的非负平方根？

答　本节用的是单位上半圆，纵坐标非负；圆的方程给出 $y^2=1-x^2$，故 $y=\sqrt{1-x^2}$。若要描述下半圆，需要取负平方根，但这不在当前角度区间 $[0,\pi]$ 的定义范围内。

易错提醒 把 arccos 的积分上下限写反，会把导数符号弄错。例如定义 $A(x)=\int_1^x(1-s^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}s$ 时，$A'(0)=1$，而本讲的 $\arccos'(0)=-1$；正确公式是 $\arccos'(x)=-1/\sqrt{1-x^2}$。

20.4　逐点收敛与一致收敛

固定 $x<1$ 时，x^n 越来越接近 0；在 $x=1$ 时，它却始终等于 1。若 x 还可以随 n 改变，怎样表达「整段区间上的函数都接近极限」？

定义 20.9（逐点收敛） 设 $I\subseteq\mathbb{R}$，$f_n,f\colon I\to\mathbb{R}$。若对每个 $x\in I$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(x,\varepsilon)$，使得 $n\geq N$ 时 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，就称 f_n 在 I 上逐点收敛到 f。

定义 20.10（一致收敛） 在上述记号下，若对每个 $\varepsilon>0$，存在一个不依赖 x 的 $N=N(\varepsilon)$，使得 $n\geq N$ 时对所有 $x\in I$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，就称 f_n 在 I 上一致收敛到 f。

两种定义只差一个量词的位置：逐点收敛允许 N 随 x 变化；一致收敛要求同一个 N 同时控制区间内所有点。固定 x 后，一致收敛的条件当然仍成立，因此一致收敛必推出逐点收敛。

记

$$M_n:=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\in[0,\infty].$$

则 $f_n\to f$ 在 I 上一致收敛，当且仅当 $M_n\to 0$。上确界不一定在某个点取到；只要它趋于 0，就足以控制每一点的误差。

引理 20.11（一致收敛蕴含逐点收敛） 若 $f_n\to f$ 在 I 上一致收敛，则对每个固定的 $x\in I$，$f_n(x)\to f(x)$。

证明 给定 $x\in I$ 与 $\varepsilon>0$。一致收敛给出一个 N，使 $n\geq N$ 时对所有 $y\in I$ 都有 $|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon$。取 $y=x$ 即得逐点收敛。 ■

■ **例 20.7**　x^n 在 $[0,1]$ 上的极限　令 $f_n(x)=x^n$。求其逐点极限，并判断收敛是否一致。

解　先固定 x。当 $0\leq x<1$ 时，几何数列 $x^n\to 0$；当 $x=1$ 时，$x^n=1$。因此极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

逐点收敛成立。现在检验一致收敛：对每个 n，介值定理给出 $x_n \in (0,1)$ 使 $x_n^n = 1/2$。由于 $f(x_n) = 0$，有 $\sup_{[0,1]} |f_n - f| \geq 1/2$，误差不趋于 0，故不一致收敛。事实上，上确界等于 1，但在 $x = 1$ 处并未取到：当 $x \uparrow 1$ 时，$|f_n(x) - f(x)| = x^n \uparrow 1$。 ♦

图 20.3 画出 x^2, x^4, x^8 与高度 $1/2$ 的水平线。幂次增大后，曲线在大部分区间更贴近 0，但靠近 1 的窄区域仍会越过这条水平线；其宽度随 n 改变，正是逐点收敛却不能一致控制的地方。

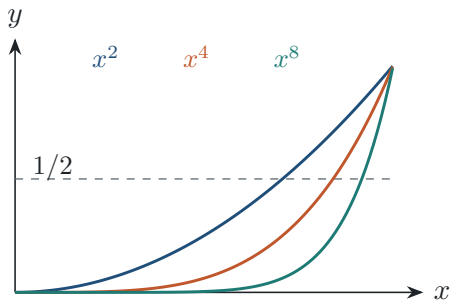


图 20.3　幂函数逐点趋于阶跃极限，但每条曲线在靠近 1 处仍超过高度 1/2。

若区间缩到 $[0, b]$，其中 $0 < b < 1$，同一列函数却一致收敛到 0：

$$\sup_{0 \leq x \leq b} |x^n| = b^n \longrightarrow 0.$$

差别来自端点 1 是否属于区间；在 $[0,1]$ 上，误差可在端点附近保持较大，而在 $[0,b]$ 上，所有点都受同一个上界 b^n 控制。

■ **例 20.8　峰值移向零点**　在 $[0,1]$ 上令 $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$。求逐点极限，并判断收敛是否一致。

解　固定 $x = 0$ 时 $g_n(0) = 0$。若 $x > 0$，则

$$0 \leq g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \longrightarrow 0,$$

所以 $g_n \to 0$ 逐点收敛。另一方面，$1 + n^2x^2 \geq 2nx$，故 $g_n(x) \leq 1/2$；等号在 $x = 1/n$ 处成立。因此 $\sup_{[0,1]} |g_n| = 1/2$ 对每个 n 都成立，收敛不一致。这个例子中每个 g_n 和极限函数都连续，单凭连续性无法保证一致收敛。 ♦

想一想　一致收敛的定义里，N 能否依赖 ε？能否依赖 x？

答　N 可以依赖 ε，但不能依赖 x。逐点收敛允许 $N = N(x, \varepsilon)$；一致收敛要求对固定的 ε 选出一个 N，同时适用于整个 I。x^n 在 $[0,1]$ 上正是因 x 靠近 1 时需要更大的 N，而无法统一选择。

易错提醒　逐点极限不一定保留连续性。x^n 在 $[0,1]$ 上的每个函数都连续，但极限函数在 $x = 1$ 处跳跃；要把连续性传给极限，需要一致收敛，下一讲将证明这一结论。

20.5　Weierstrass 判别法与幂级数

逐点控制每一项还不够；若能用一列可求和的常数同时控制所有 x，就能控制整个函数级数的尾和。这是**Weierstrass M 判别法**（Weierstrass M-test）的核心。

定理 20.12（Weierstrass M 判别法）　设 $f_k\colon I\to\mathbb{R}$，且存在常数 $M_k\ge 0$，使所有 $x\in I$ 都满足 $|f_k(x)|\le M_k$。若数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}M_k$ 收敛，则函数级数 $\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ 在 I 上一致收敛。

证明　记 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k(x)$。若 $m>n$，则

$$|S_m(x)-S_n(x)|\le\sum_{k=n+1}^{m}M_k.$$

给定 $\varepsilon>0$，由 $\sum M_k$ 收敛，存在 N，使 $n\ge N$ 时 $\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k<\varepsilon$。固定 x，上式说明 $S_n(x)$ 是柯西列，故有极限 $S(x)$。令 $m\to\infty$，得到对所有 $x\in I$ 同时成立的估计

$$|S(x)-S_n(x)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k<\varepsilon\qquad(n\ge N)$$

所以 $S_n\to S$ 一致收敛。 ∎

核心思想　证明一致收敛时，优先寻找一个不依赖 x 的误差上界。对函数级数，若每项都由 M_k 控制且 $\sum M_k$ 收敛，尾和便能同时对所有 x 变小。

例 20.9　指数级数在有界区间上一致收敛　令 $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$，并令 $E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$。证明 $E_n\to E$ 在每个 $[-L,L]$ 上一致收敛，并求 $\int_{-L}^{L}E(x)\,\mathrm{d}x$ 的级数表达式。

解　固定 $L>0$。对 $x\in[-L,L]$，有

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right|\le\frac{L^k}{k!}=:M_k,\qquad\frac{M_{k+1}}{M_k}=\frac{L}{k+1}\longrightarrow 0.$$

故 $\sum M_k$ 收敛，由定理 20.12 得 $E_n\to E$ 一致收敛。若记 $T_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}L^k/k!$，则 $\sup_{[-L,L]}|E-E_n|\le T_n\to 0$。

各 E_n 是多项式，而 E 在第 9 讲已证连续。由积分的估计，

$$\left|\int_{-L}^{L}(E-E_n)\,\mathrm{d}x\right|\le 2L\sup_{[-L,L]}|E-E_n|\le 2LT_n\longrightarrow 0.$$

对有限和逐项积分，奇次幂的积分为 0；偶次幂给出

$$\int_{-L}^{L}E(x)\,\mathrm{d}x=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{L^{2j+1}}{(2j+1)(2j)!}.$$

例如 $L=1$ 且取 E_4 时，积分为 $2(1+1/6+1/120)=47/20$。这一步只用一致尾误差的积分估计；下一讲会把它推广为一般的极限与积分交换定理。

一致收敛只在有界区间上成立。对任意固定的 n 和 $x \geq 0$，$E(x) - E_n(x) \geq x^{n+1}/(n+1)!$，右边随 $x \to \infty$ 无界，所以 $E_n \to E$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上不一致。它仍在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛，因为固定 x 后级数项之比 $|x|/(k+1)$ 趋于 0。 ♦

定理 20.13（幂级数在收敛半径内一致收敛）　设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为 R。对每个有限的 L 满足 $0 \leq L < R$，该级数在 $[-L, L]$ 上一致收敛。

证明　若 $L = 0$，则区间只有 $x = 0$，且 $S_n(0) = a_0$ 对每个 n 都成立，结论成立。设 $L > 0$，并令 $\rho = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 1/R$（$R = \infty$ 时 $\rho = 0$）。因为 $L < R$，有 $L\rho < 1$。由根值判别法，数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| L^k$ 收敛。对 $|x| \leq L$，$|a_k x^k| \leq |a_k| L^k$；再用定理 20.12，幂级数在 $[-L, L]$ 上一致收敛。 ■

■ **例 20.10　几何级数的统一余项**　证明 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ 在 $[-L, L]$ 上一致收敛，其中 $0 < L < 1$，并给出前 $N+1$ 项的误差界。

解　对每个 $x \in [-L, L]$，有 $|x^k| \leq L^k$，而 $\sum_{k=0}^{\infty} L^k = 1/(1-L)$ 收敛。由 M 判别法，几何级数一致收敛；由有限几何和公式，其极限为 $1/(1-x)$。余项满足

$$\sup_{|x| \leq L} \Big| \sum_{k=N+1}^{\infty} x^k \Big| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} L^k = \frac{L^{N+1}}{1-L} \longrightarrow 0.$$

例如 $L = 1/2$、$N = 4$ 时，上界是 $1/16$。这说明 M 判别法不只给出一致收敛，也常直接提供可计算的误差估计。 ♦

易错提醒　幂级数的一致收敛定理只覆盖 $L < R$，不能把闭区间直接扩到 $L = R$。例如几何级数的收敛半径为 1，但在端点 $x = -1$ 处，项 $(-1)^k$ 不趋于 0，级数甚至不收敛；边界要另行检查。

本讲小结

- 曲线长度定义为 $\ell(\gamma)=\sup_P \ell(\gamma,P)$；分划加细不减长度，且长度对相邻参数区间可加。
- 若 $x,y\in C^1([a,b])$，则 $\ell(\gamma)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$；连续可导图像的长度为 $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$。
- $\arccos x=\int_x^1 (1-s^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}s$，$\pi=\int_{-1}^1 (1-s^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}s$；在 $0<\theta<\pi$ 上，$\cos'=-\sin$、$\sin'=\cos$。
- 逐点收敛允许 $N=N(x,\varepsilon)$；一致收敛要求 $N=N(\varepsilon)$ 同时适用于所有 x。
- 一致收敛等价于 $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\to 0$，并且一致收敛必推出逐点收敛；反向一般不成立。
- 若 $|f_k(x)|\le M_k$ 对所有 x 成立且 $\sum M_k<\infty$，则 $\sum f_k$ 一致收敛。
- 收敛半径为 R 的幂级数在每个有限区间 $[-L,L]$（$L<R$）上一致收敛；边界 $L=R$ 需另行判断。

练习

20.1 ★ 求曲线 $\gamma(t)=(3t,4t)$，$0\le t\le 2$ 的长度，并与两端点的距离比较。

20.2 ★ 由本讲的积分定义证明 $\arccos 0=\pi/2$，并求 $\arccos'(0)$、$\cos'(\pi/2)$ 与 $\sin'(\pi/2)$。

20.3 ★ 令 $f_n(x)=x^n$，$0\le x\le 1/2$。证明 f_n 一致收敛到 0，并求使 $|f_n(x)|<1/8$ 对所有 x 成立的最小 N。

20.4 ★★ 令 $f_n(x)=x^n$，$0\le x\le 1$。求逐点极限，并证明收敛不一致。

20.5 ★★ 在 $[0,1]$ 上令 $g_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$。证明 g_n 逐点收敛到 0，但不一致收敛。

20.6 ★★★ 令 $a_n=1/(n+1)$、$b_n=1/n$、$c_n=(a_n+b_n)/2$。设 $f(0)=0$，并在每个 $[a_n,b_n]$ 上令 f 为分段线性函数，使 $f(a_n)=f(b_n)=0$、$f(c_n)=1/\sqrt{n}$。证明 f 连续，但其图像长度为 ∞。

20.7 ★★ 证明几何级数 $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ 在 $[-1/2,1/2]$ 上一致收敛。给出 $S_4(x)=\sum_{k=0}^{4}x^k$ 的统一余项上界，并计算 $S_4(1/2)$。

20.8 ★★★ 令 $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k/k!$、$E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$。证明 $E_n\to E$ 在每个 $[-L,L]$ 上一致、在 $\mathbb{R}$ 上不一致，并求 $\int_{-L}^{L}E(x)\,\mathrm{d}x$ 的级数表达式。

20.9 ★★★ 设 f_n 定义在闭区间 $[a,b]$ 上，且都满足同一个 Lipschitz 条件 $|f_n(x)-f_n(y)|\le K|x-y|$。若 f_n 逐点收敛到 f，证明 f 也满足该条件，且 $f_n\to f$ 一致收敛。再说明若各 f_n 只有各自的 Lipschitz 常数，结论可能失败。

练习答案与提示

20.1 $\gamma'(t)=(3,4)$，速率恒为 5，所以长度为 $\int_0^2 5\,\mathrm{d}t=10$。端点是 $(0,0)$ 与 $(6,8)$，距离 $\sqrt{6^2+8^2}=10$；直线段的弧长等于弦长。

20.2 被积函数为偶函数，因此 $\arccos 0=\frac12\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}s=\pi/2$。由导数公式，$\arccos'(0)=-1$；

又 $\cos(\pi/2)=0$、$\sin(\pi/2)=1$，故 $\cos'(\pi/2)=-1$、$\sin'(\pi/2)=0$。

20.3 $\sup_{0\le x\le 1/2} x^n=(1/2)^n\to 0$，所以一致收敛到 0。要有 $2^{-n}<1/8=2^{-3}$，必须 $n>3$；最小 $N=4$。

20.4 极限为 $f(x)=0$（$0\le x<1$），$f(1)=1$。对每个 n 取 $x_n=2^{-1/n}\in(0,1)$，则 $f_n(x_n)=1/2$、$f(x_n)=0$，故 $\sup_{[0,1]}|f_n-f|\ge 1/2$，不一致收敛。

20.5 对固定 $x>0$，$0\le g_n(x)\le 1/(nx)\to 0$，且 $g_n(0)=0$，所以逐点极限为 0。由 $(nx-1)^2\ge 0$ 得 $1+n^2x^2\ge 2nx$，于是 $g_n(x)\le 1/2$；在 $x=1/n$ 取等号，故误差上确界恒为 $1/2$。

20.6 各帐篷在端点的函数值都是 0，所以相邻定义相容；在 $x\to 0$ 时，所在区间指标 $n\to\infty$，且 $0\le f(x)\le 1/\sqrt{n}\to 0$，故 f 连续。对 $[0,1]$ 取分划 $P_N=\{0,a_N,c_N,b_N,c_{N-1},b_{N-1},\dots,c_1,b_1\}$。每个帐篷的竖直变化量为 $2/\sqrt{n}$，所以对应折线长度至少为 $2\sum_{n=1}^{N}1/\sqrt{n}\to\infty$。因此图像长度为无穷。

20.7 几何级数的余项满足 $\sup_{|x|\le 1/2}|\sum_{k=5}^{\infty}x^k|\le\sum_{k=5}^{\infty}(1/2)^k=1/16$。此外 $S_4(1/2)=1+1/2+1/4+1/8+1/16=31/16$。

20.8 固定 x 时，级数项之比 $|x|/(k+1)\to 0$，故逐点收敛。对 $|x|\le L$，有 $|x^k/k!|\le L^k/k!$，且数项级数收敛，M 判别法给出一致收敛。对每个固定 n，当 $x\ge 0$ 时 $E(x)-E_n(x)\ge x^{n+1}/(n+1)!$，故全实轴上的误差上确界无穷。再由 $|\int_{-L}^{L}(E-E_n)|\le 2L\sup_{[-L,L]}|E-E_n|\to 0$，可逐项积分有限部分和，得到 $\displaystyle\int_{-L}^{L}E(x)\,\mathrm{d}x=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{L^{2j+1}}{(2j+1)(2j)!}$。

20.9 取 $n\to\infty$ 的极限，得到 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$。若 $K=0$，各 f_n 都是常数，点态收敛即一致收敛。设 $K>0$，给 $[a,b]$ 取有限分划，网格小于 $\varepsilon/(4K)$。点态收敛在有限个分点上可同时控制：存在 N，使 $n\ge N$ 时每个分点 y 都有 $|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon/2$。任取 x，选距它小于网格的分点 y，则

$$|f_n(x)-f(x)|\le K|x-y|+|f_n(y)-f(y)|+K|x-y|<\varepsilon.$$

这个 N 不依赖 x，故收敛一致。若没有公共 Lipschitz 常数，可取 $f_n(x)=x^n$ 于 $[0,1]$：由中值定理，f_n 的 Lipschitz 常数可取 n；其逐点极限在 $x=1$ 不连续，且前面的例子已证明收敛不一致。

第 21 讲

连续函数列与一致收敛

Sequences of Continuous Functions and Uniform Convergence

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 21 讲义（一致收敛保持连续性、$C([a,b])$ 的完备性、极限与积分交换、极限与求导交换、$E'=E$）；例 21.5 改编自习题集 10 第 3 题，例 21.4 改编自第 2 题，例 21.9 改编自第 1 题，练习 21.9 改编自第 5 题。补充内容参考 Thomson–Bruckner–Bruckner《Elementary Real Analysis》第 9 章与 Rudin《Principles of Mathematical Analysis》第 7 章。

本讲目标

(1) 掌握「一致收敛的连续函数列，极限仍连续」的 $\varepsilon/3$ 证明，能指出这个证明在逐点收敛时断在哪一步。

(2) 理解 $C([a,b])$ 上的最大值距离 $d(f,g)=\max|f-g|$：在这个距离下收敛就是一致收敛；会证明一致 Cauchy 准则和 $C([a,b])$ 的完备性，并知道换一个距离完备性可能丢失。

(3) 掌握极限与积分交换的定理（一致收敛时 $\int f_n\to\int f$），会用「移动的鼓包」说明逐点收敛不够，也知道区间无界时定理失效。

(4) 掌握极限与求导交换的定理：导函数列一致收敛、某一点处函数值收敛；知道导函数连续性如何保证极限导数连续，并会用反例检验锚点与一致性的作用。

(5) 把三个定理用在 $E(x)=\sum_{k\ge0}\frac{x^k}{k!}$ 上，证明 E 连续、计算 $\int E$、证明 $E'=E$，并由此得到 $y'=y$、$y(0)=1$ 的解唯一。

第 20 讲引入了函数列的一致收敛：$f_n\to f$ 在 I 上一致收敛，是指 $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\to0$。当时留下了一个问题：如果每个 f_n 都连续（可积、可导），极限 f 是否也连续（可积、可导）？$\int f_n$ 是否趋于 $\int f$，f_n' 是否趋于 f'？

这些问题有实际用处。我们用级数定义了 $E(x)=\sum\frac{x^k}{k!}$，它是多项式 $E_n(x)=\sum_{k\le n}\frac{x^k}{k!}$ 的极限。多项式的连续性、积分、导数都会算；要把这些性质传给 E，就要回答上面的问题。本讲给出三个定理：一致收敛保持连续性；一致收敛时极限与积分可交换；导函数列一致收敛（再加上一点处收敛）时极限与求导可交换。图 21.1 是本讲的路线图。

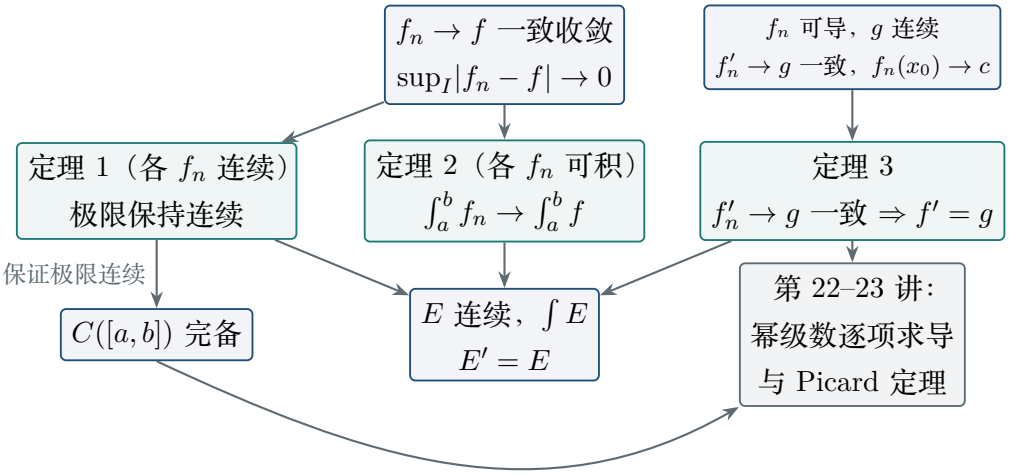


图 21.1　本讲的路线图。三个定理都在回答「极限运算能否交换次序」。右上方单列了定理 3 的附加条件：导函数列一致收敛，并有一点处的函数值收敛。函数列自身一致收敛不能代替这些条件。定理 3 的证明同时用到定理 1（导函数的极限连续）和微积分基本定理；$C([a,b])$ 的完备性是第 23 讲 Picard 定理的出发点。

21.1　回顾：两种收敛与「交换极限」

设 I 是区间，f_n, f 是 I 上的函数。两种收敛的区别只在一个量词的位置，表 21.1 把它们并排列出。

	逐点收敛	一致收敛
定义	对每个 $x \in I$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 N（可以依赖 x），$n \geq N$ 时 $\lvert f_n(x) - f(x)\rvert < \varepsilon$	对每个 $\varepsilon > 0$，存在 N（不依赖 x），$n \geq N$ 时对所有 $x \in I$ 都有 $\lvert f_n(x) - f(x)\rvert < \varepsilon$
等价说法	对每个 x，数列 $f_n(x) \to f(x)$	$M_n := \sup_{x\in I}\lvert f_n(x) - f(x)\rvert \to 0$
几何意义	每条竖线上，f_n 的值最终靠近 f 的值	$n \geq N$ 后 f_n 的整个图像落在 f 的上下宽 ε 的带子里
典型例子	x^n 在 $[0,1]$ 上	x^n 在 $[0,b]$（$b<1$）上；$E_n \to E$ 在 $[-L,L]$ 上

表 21.1　逐点收敛与一致收敛（第 20 讲）。一致收敛 $\Rightarrow$ 逐点收敛，反之不成立。

回忆第 20 讲的例子：$f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛到

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

但由介值定理，每个 f_n 都在某点 $x_n \in (0,1)$ 取值 $\frac{1}{2}$，所以 $M_n \geq \frac{1}{2}$，收敛不一致。在 $[0,b]$（$0<b<1$）上则有 $M_n = b^n \to 0$，收敛是一致的。

这个例子里，每个 f_n 都连续，极限 f 却在 $x=1$ 处间断。换一种写法看得更清楚：

$$\lim_{x\to 1^-}\Big(\lim_{n\to\infty} x^n\Big) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to 1^-} x^n\Big) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

两个极限交换次序后结果不同。f 在 x_0 处连续，说的正是 $\lim_{x\to x_0}\lim_n f_n(x)=\lim_n\lim_{x\to x_0} f_n(x)$（右边等于 $\lim_n f_n(x_0)=f(x_0)$）。同样，积分和导数也都是极限（Riemann 和的极限、差商的极限），「$\int f_n\to\int f$」和「$f_n'\to f'$」也都是交换两个极限的问题。

核心思想　本讲的三个定理都是「交换两个极限」的定理。一般来说两个极限不能随意交换，x^n 就是反例。一致收敛提供了一种控制：它让 f_n 在所有点同时靠近 f，于是对 f_N 成立的极限性质可以「搬」到 f 上，误差处处不超过同一个 ε。

本讲反复用到下面这个简单的事实：若 $|f_n(x)-f(x)|\le M_n$ 对一切 $x\in I$ 成立且 $M_n\to 0$，则 $f_n\to f$ 一致收敛。所以证明一致收敛，只需找到一个不依赖 x 且趋于 0 的上界；不一定要把上确界 M_n 精确地算出来。

21.2　一致收敛保持连续性

定理 21.1（一致极限的连续性）　设 I 是区间，f_n 是 I 上的连续函数。若 $f_n\to f$ 在 I 上一致收敛，则 f 在 I 上连续。

思路　要估计 $|f(x)-f(x_0)|$，但我们对 f 一无所知，只知道 f_N 连续、f_N 与 f 处处接近。于是从 $f(x)$ 出发绕一个圈：先走到 $f_N(x)$，再沿 f_N 走到 $f_N(x_0)$，最后回到 $f(x_0)$。三段各控制在 $\varepsilon/3$ 以内。第一段和第三段用一致收敛，第二段用 f_N 的连续性。

证明　固定 $x_0\in I$ 和 $\varepsilon>0$。由一致收敛，存在 N，使对一切 $x\in I$，

$$|f(x)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由 f_N 在 x_0 处连续，存在 $\delta>0$，使当 $x\in I$、$|x-x_0|<\delta$ 时 $|f_N(x)-f_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$。于是对这样的 x，由三角不等式，

$$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以 f 在 x_0 处连续。x_0 是任意的，故 f 在 I 上连续。 ■

图 21.2 把三段误差放在同一幅图中：两个竖直误差来自一致收敛，中间一段来自固定连续函数 f_N 的连续性。

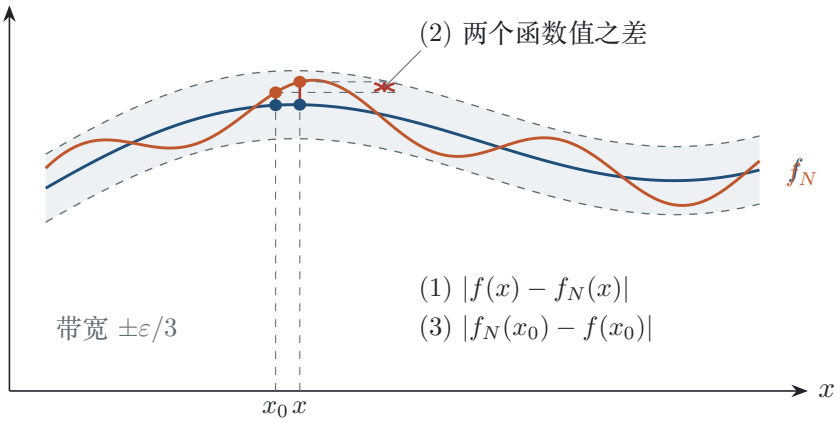


图 21.2　$\varepsilon/3$ 论证。浅蓝带子是 f 上下各 $\varepsilon/3$ 的范围，$n\ge N$ 后 f_N（橙）整个落在带子里。从 $f(x)$ 到 $f(x_0)$ 分三段走：(1)、(3) 是竖直方向的一致收敛误差，(2) 是 f_N 自身的变化，靠 f_N 的连续性控制。当 $|x-x_0|<\delta$ 时 (2) 也小于 $\varepsilon/3$；图中取 $\varepsilon/3=0.3$、$x_0=2.2$、$x=2.4$，三项分别约为 0.2014、0.0934、0.1125，均满足所示界限。(2) 用同一竖线上的双箭头表示高度差，不能把两点之间的斜线长度当作函数值之差。

逐点收敛时，证明断在第一步：对给定的 x_0 能找到 N 使 $|f_N(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon/3$，但这个 N 对 x_0 附近的其他 x 未必管用。δ 是在 N 选定之后才选的，而 x 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中变化，所以第一段的估计必须对这个区间里**所有的 x 同时成立**。对 x^n 和 $x_0=1$，无论 N 多大，总有 $x<1$ 离 1 很近而 $x^N>\frac12$，第一段的误差超过 $\frac12$。

定理 21.1 常以逆否形式使用：**连续函数列的逐点极限若不连续，收敛一定不一致**。这给出了 x^n 在 $[0,1]$ 上不一致收敛的第二个证明。

■ **例 21.1**　**E 在 $\mathbb{R}$ 上连续**　设 $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$，$E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$。证明 E 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

解　第 20 讲用 Weierstrass M 判别法证明了：对每个 $L>0$，$E_n\to E$ 在 $[-L,L]$ 上一致收敛（取 $M_k=\frac{L^k}{k!}$，$\sum M_k$ 收敛）。每个 E_n 是多项式，连续。由定理 21.1，E 限制在 $[-L,L]$ 上连续。

任取 $x_0\in\mathbb{R}$，取 $L=|x_0|+1$。x_0 是 $[-L,L]$ 的内点：当 $|x-x_0|<1$ 时 $x\in[-L,L]$。E 在 $[-L,L]$ 上于 x_0 处连续，即对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使 $x\in[-L,L]$、$|x-x_0|<\delta$ 时 $|E(x)-E(x_0)|<\varepsilon$；把 δ 换成 $\min(\delta,1)$，条件 $x\in[-L,L]$ 就自动满足。所以 E 在 x_0 处连续。

注意 $E_n\to E$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上**不是**一致收敛的：对固定的 n，$E(x)-E_n(x)\ge\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to\infty$ $(x\to+\infty)$，所以 $\sup_{\mathbb{R}}|E-E_n|=\infty$。我们只在每个有界区间上用了一致收敛，这已经够了。 ♦

> **想一想**　上面的例子说明：要证明 f 在区间 I 上连续，可以把一致收敛条件局部化为怎样的条件？
>
> **答**　对每个 $x_0\in I$，只需存在 $\delta>0$，使 $f_n\to f$ 在 $I\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上一致收敛。连续性是**局部**性质，定理 21.1 用在这个相对邻域上即可。例如 x^n 在 $[0,1)$ 上不一致收敛到 0（$\sup_{[0,1)}x^n=1$），但它在每个 $[0,b]$（$b<1$）上一致收敛，所以极限 0 在 $[0,1)$ 上连续，这与事实相符。第 22 讲处理幂级数时，总是用这种「在每个 $[-L,L]$ 上一致收敛」的方式。

定理 21.1 的逆命题不成立：极限连续，收敛也可以不一致。

例 21.2　极限连续但不一致收敛　设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，$x\in[0,1]$。证明 $f_n\to 0$ 逐点收敛但不一致收敛。

解　$f_n(0)=0$。对 $x>0$，$0\le f_n(x)\le \frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}\to 0$。所以 $f_n\to 0$ 逐点收敛，极限 0 连续。

另一方面，由 $1+n^2x^2\ge 2nx$（即 $(1-nx)^2\ge 0$），$f_n(x)\le\frac12$，等号在 $x=\frac1n$ 时成立。所以 $\sup_{[0,1]}|f_n-0|=f_n\!\left(\frac1n\right)=\frac12\not\to 0$，收敛不一致。

图像上，f_n 是一个高度固定为 $\frac12$ 的鼓包，顶点 $\frac1n$ 向 0 移动、宽度变窄。每个固定的 $x>0$ 最终被鼓包「甩在后面」，所以逐点收敛；但鼓包从不变矮，所以不一致。在 $[\delta,1]$（$\delta>0$）上，$n>\frac1\delta$ 时 f_n 在 $[\delta,1]$ 上递减（$f_n'(x)=\frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}<0$），最大值 $f_n(\delta)\le\frac{1}{n\delta}\to 0$，收敛又是一致的。 ♦

图 21.3 把固定输入与随 n 移动的峰顶分开标出。

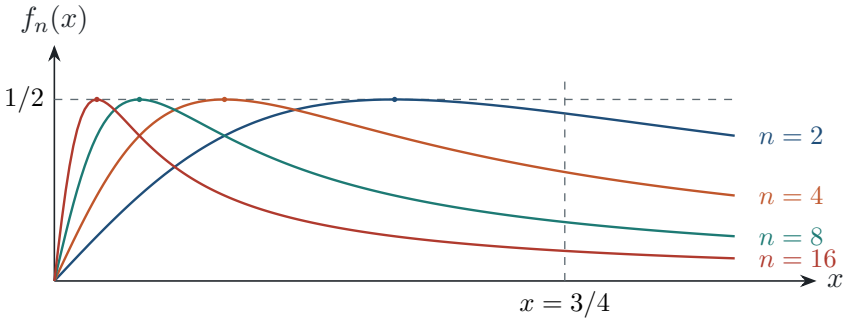


图 21.3　$f_n(x)=nx/(1+n^2x^2)$ 的峰顶始终位于 $(1/n,1/2)$。固定 $x=3/4$ 时高度趋于零，而在移动输入 $x_n=1/n$ 处误差始终为 $1/2$，故收敛不一致。

图中峰顶向左靠近原点，却从未降低；原点本身的函数值始终为零。因此不能把峰顶趋向原点理解成函数在原点出现了非零极限。

历史与背景　Cauchy 在 1821 年的《分析教程》中断言：连续函数组成的收敛级数，和函数也连续。1826 年 Abel 指出级数 $\sin x-\frac12\sin 2x+\frac13\sin 3x-\cdots$ 是一个「例外」：它在 $(-\pi,\pi)$ 内收敛到 $\frac{x}{2}$，在 $x=\pi$ 处每项都是 0，和为 0，所以和函数在 π 处有跳跃。缺失的条件就是一致收敛。19 世纪 40 年代 Stokes 与 Seidel 分别注意到这一点，后来 Weierstrass 把「一致收敛」作为基本概念系统地用于分析。

21.3　$C([a,b])$ 在最大值距离下完备

第 12 讲已经给 $C([a,b])$ 定义了最大值距离。若一列连续函数在这个距离下是柯西列，它的逐点极限是否还连续？一致 Cauchy 条件正好能把这个问题化成「实数列逐点收敛，再用一个共同误差控制全部点」。

命题 21.2（最大值距离就是一致收敛）　设 $f_n, f \in C([a,b])$，并令

$$d_\infty(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|.$$

则 $f_n \to f$ 在度量 d_∞ 下，当且仅当 $f_n \to f$ 一致收敛。

证明　函数 $|f_n - f|$ 在闭区间上连续，故最大值存在。由定义，

$$d_\infty(f_n,f) = \max_{t\in[a,b]} |f_n(t)-f(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)-f(t)|.$$

右边趋于零，正是 $f_n \to f$ 一致收敛的定义。 ■

现在取 $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k/k!$。第 20 讲已知它在 $[0,1]$ 上一致收敛，所以由命题 21.2，它在 d_∞ 下收敛。我们要证明的不只是这个例子，而是每个 d_∞-柯西列都能在 $C([a,b])$ 中找到极限。

定理 21.3（$C([a,b])$ 的完备性）　对 $a \le b$，度量空间 $(C([a,b]), d_\infty)$ 完备。

思路　先固定 t，用 $\mathbb{R}$ 的完备性定义候选极限 $f(t) = \lim_n f_n(t)$。这只给逐点收敛，尚不能保证 f 连续。再把一致 Cauchy 估计中的一个指标取极限，得到统一误差界；最后用定理 21.1 把连续性传给 f。

证明　设 (f_n) 是 $C([a,b])$ 中的 Cauchy 列。固定 $t \in [a,b]$。因为

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le d_\infty(f_n, f_m),$$

数列 $(f_n(t))$ 是实数 Cauchy 列。由 $\mathbb{R}$ 完备，存在实数 $f(t)$ 使 $f_n(t) \to f(t)$。这样对每个 t 都定义了函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$。

给定 $\varepsilon > 0$。由 (f_n) 是 Cauchy 列，存在 N，使 $m, n \ge N$ 时

$$d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon/2.$$

固定 $n \ge N$ 和任意 $t \in [a,b]$，令 $m \to \infty$，便得到

$$|f_n(t) - f(t)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

这个 N 不依赖 t，所以 $f_n \to f$ 一致收敛。

每个 f_n 连续。由定理 21.1，一致极限 f 也连续，故 $f \in C([a,b])$。再由命题 21.2，$d_\infty(f_n, f) \to 0$。因此每个 Cauchy 列都收敛到空间中的函数，空间完备。 ■

想一想　逐点极限已经存在，是否就说明函数列在 d_∞ 下是 Cauchy 列？

答　不说明。取 $f_n(t) = t^n$ 于 $[0,1]$。它逐点收敛，但若 $n = 2m$，令 $t_m = 2^{-1/m}$，则

$$|f_{2m}(t_m) - f_m(t_m)| = |\frac{1}{4} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}.$$

所以尾部两项的最大值距离不能任意小。逐点收敛控制每个固定输入；度量 Cauchy 条件要求同一个阈值控制全部输入。

■ **例 21.3　连续函数空间换距离后不完备**　在 $C([0,1])$ 上定义 $d_1(f,g)=\int_0^1 |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$。构造一个 d_1-Cauchy 列，并证明它在 $C([0,1])$ 中没有极限。

解　用越来越窄的线性斜坡逼近阶跃函数。对 $n\ge 2$，令

$$u_n(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \frac12-\frac1n,\\ \frac{n}{2}\left(t-\frac12+\frac1n\right), & \frac12-\frac1n<t<\frac12+\frac1n,\\ 1, & \frac12+\frac1n\le t\le 1.\end{cases}$$

三段在连接点取值相同，所以 u_n 连续。令 $H(t)=0\,(t<1/2)$、$H(1/2)=1/2$、$H(t)=1\,(t>1/2)$。虽然 H 不连续，但它 Riemann 可积。两侧的误差各是底为 $1/n$、高为 $1/2$ 的三角形，因此

$$\int_0^1 |u_n-H|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}.$$

由三角不等式，

$$d_1(u_n,u_m)\le\int_0^1|u_n-H|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|H-u_m|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}\longrightarrow 0,$$

故 (u_n) 是 d_1-Cauchy 列。

若它在 $C([0,1])$ 中收敛到连续函数 g，则

$$\int_0^1|g-H|\,\mathrm{d}t\le d_1(g,u_n)+\int_0^1|u_n-H|\,\mathrm{d}t\longrightarrow 0.$$

于是 $g=H$ 几乎处处。在任一侧的开区间内，若连续函数在一点偏离该侧的常值，它就在一个邻域内偏离，和几乎处处相等矛盾。因此 $g=0$ 在 $[0,1/2)$ 上成立、$g=1$ 在 $(1/2,1]$ 上成立，这与 g 在 $1/2$ 连续矛盾。故该 Cauchy 列在此空间没有极限。 ♦

这个例子没有推翻定理 21.3：d_1 与最大值距离不同。最大值距离不允许窄斜坡把一个固定高度的跳跃「藏」在越来越短的区间里；积分距离只累计面积，因而能忽略极限的单点跳跃。

21.4　一致收敛与积分

$[a,b]$ 上若每个 f_n 都 Riemann 可积，且 $f_n\to f$ 一致，f 会不会仍可积？即使可积，积分能否交换极限？关键估计只有区间长度乘以统一误差；有限长度不能省略。

定理 21.4（一致极限与 Riemann 积分）　设 $a<b$，每个 f_n 都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $f_n\to f$ 一致收敛。则 f Riemann 可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

思路　先证明 f 可积：选一个与 f 一致接近的可积函数 f_N，再沿用使 f_N 上下和之差很小的分划。上下和各自只改变至多「统一误差 $\times(b-a)$」。可积性成立后，同一误差估计直接控制积分之差。

证明　记 $\ell = b-a > 0$。一致收敛还说明 f 有界：取一个 N 使 $\sup|f-f_N|<1$，而 f_N 有界，故 f 有界。给定 $\varepsilon>0$，选 N 使

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{6\ell}.$$

由于 f_N 可积，存在分划 P 使

$$U(f_N,P)-L(f_N,P) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

在每个小区间上，f 的上确界不超过 f_N 的上确界加 $\varepsilon/(6\ell)$，f 的下确界不低于 f_N 的下确界减 $\varepsilon/(6\ell)$。乘以各小区间长度并求和，得到

$$U(f,P)-L(f,P) \le U(f_N,P)-L(f_N,P)+\frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

故 f 满足 Riemann 可积准则。

再设 $\delta_n = \sup_{[a,b]}|f_n-f|$。由 $|f_n-f|\le\delta_n$ 及积分的单调性，

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n-f| \le (b-a)\delta_n \longrightarrow 0.$$

因此积分与极限可交换。 ∎

例 21.4　**一致极限下的变限积分**　设 $g_n\to g$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且每个 g_n 连续。令

$$F_n(x)=\int_a^x g_n(s)\,\mathrm{d}s, \qquad F(x)=\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s.$$

证明 $F_n\to F$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

解　先由定理 21.1 知 g 连续，所以 F 有定义。对任意 $x\in[a,b]$，积分误差估计给出

$$|F_n(x)-F(x)| \le \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} |g_n(s)-g(s)|\,\mathrm{d}s \le (b-a)\sup_{s\in[a,b]}|g_n(s)-g(s)|.$$

右侧不依赖 x 且趋于零，故 $F_n\to F$ 一致。这正是习题集 10 第 2 题所要求的统一估计。 ♦

例 21.5　**积分指数级数**　令 $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$，$E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$。求 $\int_0^1 E(x)\,\mathrm{d}x$，并计算 $\int_0^1 E_3(x)\,\mathrm{d}x$。

解　第 20 讲已由 M 判别法证明 $E_n\to E$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。应用定理 21.4，再对有限和逐项积分：

$$\int_0^1 E(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!} = E(1)-1.$$

前三次非零项给出

$$\int_0^1 E_3(x)\,\mathrm{d}x = 1+\frac12+\frac16+\frac{1}{24}=\frac{41}{24}.$$

同样在 $[-L,L]$ 上应用定理 21.4。奇次幂的积分为零，偶次幂给出

$$\int_{-L}^{L} E(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{L^{2j+1}}{(2j+1)(2j)!}.$$

取 $L=1$ 并积分 E_4，得到 $2(1+1/6+1/120)=47/20$。这里先证明一致收敛，再交换积分与极限；不能只凭每个固定 x 处的级数收敛就逐项积分。 ♦

把有限区间换成 $[0,\infty)$ 后，统一误差不再给出有限的积分误差上界。图 21.4 中的三角脉冲越来越矮、越来越宽；它们的面积仍相同。

易错提醒　「一致收敛总能把极限移入积分号」是错误的。令 $q_n(x)=\frac{1}{n}(1-\frac{x}{n})$ $(0\le x\le n)$，并令 $q_n(x)=0$ $(x>n)$。则 $\sup_{x\ge 0} q_n(x)=1/n\to 0$，但 $\int_0^\infty q_n(x)\,\mathrm{d}x=1/2$，而极限函数 0 的积分是 0。有限区间定理中的因子 $b-a$ 在这里没有统一上界。

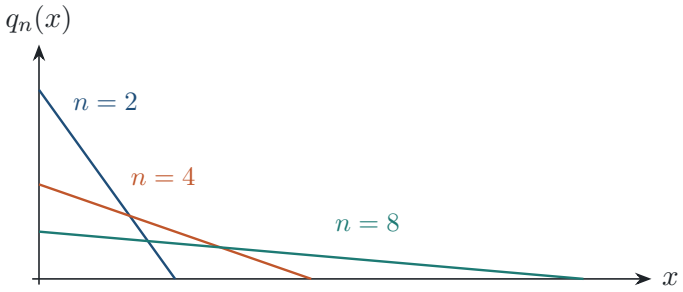


图 21.4　q_n 的峰高为 $1/n$、底长为 n，每个三角形面积均为 $1/2$；因此一致收敛到零并不保证无界区间上的积分收敛。

图中的三个面积相同，说明一致误差趋于零仍可能被不断扩大的定义域抵消。有限区间上只需乘固定长度 $b-a$；无界区间没有这样的常数。

想一想　若定义域仍是有限区间，但只知道 $f_n\to f$ 逐点，能否直接交换极限和积分？

答　不能。对 $n\ge 4$，令

$$v_n(x)=\begin{cases} n^2(x-1/n), & 1/n\le x\le 2/n,\\ n^2(3/n-x), & 2/n<x\le 3/n,\\ 0, & \text{其他} x\in[0,1]. \end{cases}$$

每个 v_n 连续。固定 $x\in[0,1]$，当 $n>3/x$ 时（$x=0$ 时始终如此），$v_n(x)=0$，故 $v_n\to 0$ 逐点；但每个三角形的底长 $2/n$、高 n，所以 $\int_0^1 v_n(x)\,\mathrm{d}x=1$。一致收敛定理不能只换成逐点收敛。

21.5　一致收敛与求导

指数多项式 E_n 在 $[-L,L]$ 上一致收敛，而 $E_n'=E_{n-1}$ 也一致收敛到 E。这次能否把「求导」和「取极限」交换？只知道函数列收敛不够；需要导函数列的统一控制和一个确定极限函数高度的锚点。

定理 21.5（极限与求导交换）　设 $a<b$，f_n 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，$x_0\in[a,b]$，且

(1) $f_n(x_0)\to c$；

(2) $f_n'\to g$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；

(3) g 在 $[a,b]$ 上连续。

令 $f(x)=c+\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$。则 $f_n\to f$ 一致收敛，f 可导且 $f'=g$；并且 $f_n'\to f'$ 一致收敛。

思路　连续函数 g 的积分给出一个候选函数 f，微积分基本定理说明 $f'=g$。对每个 x，将 $f_n(x)-f(x)$ 拆成锚点误差与从 x_0 到 x 的变化量；中值定理把后者压到区间长度乘以导数误差。

证明　由 g 连续及微积分基本定理，f 可导且 $f'=g$。给定 $\varepsilon>0$，由条件 (1)、(2)，可取 N 使 $n\ge N$ 时

$$|f_n(x_0)-c|<\varepsilon/2,\qquad \sup_{t\in[a,b]}|f_n'(t)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

固定 $x\in[a,b]$，令 $h_n=f_n-f$。在 x_0 与 x 之间，h_n 可导，且

$$\sup_{t\in[a,b]}|h_n'(t)|=\sup_{t\in[a,b]}|f_n'(t)-g(t)|.$$

若 $x\neq x_0$，中值定理给出某个 ξ 介于两点之间，使

$$|h_n(x)-h_n(x_0)|=|x-x_0|\,|h_n'(\xi)|\le(b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n'(t)-g(t)|<\varepsilon/2.$$

当 $x=x_0$ 时左边为零，同一上界仍成立。又 $h_n(x_0)=f_n(x_0)-c$，故对所有 $x\in[a,b]$，

$$|f_n(x)-f(x)|=|h_n(x)|<\varepsilon.$$

所以 $f_n\to f$ 一致收敛。最后 $f_n'\to g=f'$ 已由条件 (2) 给出。 ■

MIT 原讲义要求每个 f_n' 连续；由定理 21.1，它们的一致极限 g 连续，所以满足定理 21.5 的条件。这里把条件直接写成「g 连续」，也说明了证明真正需要的是什么。

■ **例 21.6　锚点不可缺少**　在 $[0,1]$ 上令 $f_n(x)=n+x$。检查导数列是否满足定理 21.5 的收敛条件，并说明锚点假设的作用。

解　导数序列恒为 1，所以导数的一致收敛条件满足。可是 $f_n(0)=n\to+\infty$，违反锚点收敛条件；而任意固定 $x\in[0,1]$ 都有 $f_n(x)=n+x\to+\infty$，因此函数列没有实值逐点极限。导数决定变化率，却无法控制不断漂移的常数项。 ♦

■ **例 21.7　导函数只逐点收敛仍会失败**　在 $[0,1]$ 上，对 $n\ge4$ 令

$$p_n(x)=\begin{cases} n^2(x-1/n), & 1/n\le x\le 2/n,\\ n^2(3/n-x), & 2/n<x\le 3/n,\\ 0, & \text{其他}x. \end{cases}$$

定义 $F_n(x)=\int_0^x p_n(t)\,\mathrm{d}t$。证明 $F_n(0)\to 0$、$F_n'\to 0$ 逐点，但 F_n 的逐点极限不连续。

解　每个 p_n 连续，所以 F_n 可导且 $F_n'=p_n$。固定 $x\in[0,1]$：若 $x=0$，则 $p_n(x)=0$；若 $x>0$，当 $n>3/x$ 时 $p_n(x)=0$。因此 $p_n(x)\to 0$，且 $F_n(0)=0$。

三角形 p_n 的底长为 $2/n$、高为 n，面积为 1。固定 $x>0$ 后取 $n>3/x$，整个三角形已落在 $[0,x]$，于是 $F_n(x)=1$；而 $F_n(0)=0$。所以 F_n 逐点趋于

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & 0<x\le 1,\end{cases}$$

它在 0 处不连续。又 $\sup p_n=n$，导数收敛不一致。这个例子同时表明，锚点收敛与导数逐点收敛仍不能代替导数一致收敛。 ♦

易错提醒　「f_n 一致收敛就能把求导移入极限」不成立。令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n}\,(-1\le x\le 1)$，则 $\sup|f_n-|x||=1/\sqrt{n}\to 0$，但极限 $|x|$ 在 0 不可导。正确的控制对象是导函数列；定理 21.5 还要求一个锚点和导数的一致收敛。

■ **例 21.8　指数级数满足 $E'=E$**　令 $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k/k!$，$E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$。证明 E 在 $\mathbb{R}$ 上可导且 $E'=E$。

解　固定 $L>0$。第 20 讲已证明 $E_n\to E$ 在 $[-L,L]$ 上一致。对每个 $n\ge 1$，有限和求导给出

$$E_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=E_{n-1}(x).$$

因此 $E_n'\to E$ 也在 $[-L,L]$ 上一致；并且 $E_n(0)=1$ 对每个 n 成立。函数 E 连续（定理 21.1），故可应用定理 21.5，得到 $E'=E$。L 任意，所以结论对每个实数 x 成立。这个证明没有先假设无穷级数可以逐项求导。 ♦

习题集 10 第 1 题的级数是同一机制的一个变形。设

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

在每个 $[-L,L]$ 上，级数及其导数级数都由 M 判别法一致收敛；定理 21.5 因而允许逐项求导。

■ **例 21.9　习题集 10 第 1 题**　证明 $\Phi'(x)=2x\Phi(x)$，从而 Φ 是方程 $\phi'=2x\phi$ 的解。

解　令 $\Phi_N(x)=\sum_{k=0}^{N}x^{2k}/k!$。固定 $L>0$，M 判别法给出 $\Phi_N\to\Phi$ 在 $[-L,L]$ 上一致。有限和满足 $\Phi_N'=2x\Phi_{N-1}$，所以

$$\sup_{|x|\le L}|\Phi_N'(x)-2x\Phi(x)|\le 2L\sup_{|x|\le L}|\Phi_{N-1}(x)-\Phi(x)|\longrightarrow 0.$$

又 $\Phi_N(0)=1$。函数 $2x\Phi(x)$ 连续，于是定理 21.5 给出 $\Phi'=2x\Phi$。

先观察系数的移位：

$$\Phi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\,x^{2n-1}}{n!}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(n-1)!}=2x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!}=2x\Phi(x).$$

系数移位说明导数恰是 $2x\Phi(x)$；逐项求导的合法性来自上面的统一误差估计，而非形式操作。由 $\Phi(x)=E(x^2)$ 也可核对这个结论，但本题不需要先找显式公式。 ♦

21.6　初值问题 $y'=y$ 的唯一解

现在把求导交换定理用在一个初值问题上。我们已经有 $E'=E$、$E(0)=1$，所以 E 是一个解；还要说明所有解都只能是它。

> **定理 21.6（$y'=y$、$y(0)=1$ 的唯一性）**　若 y 在区间 I 上可导，$0\in I$，且
>
> $$y'(x)=y(x),\qquad y(0)=1,$$
>
> 则 $y(x)=E(x)$ 对所有 $x\in I$ 成立。

思路　考虑 $h(x)=y(x)E(-x)$。乘积求导时，$E'=E$ 和 $E(-x)'=-E(-x)$ 使两项正好抵消，因此 h 为常数；初值把这个常数固定为 1。

证明　第 10 讲的指数加法公式给出 $E(-x)>0$，且 $E(-x)=1/E(x)$，所以乘积 $h(x)=y(x)E(-x)$ 有定义。由乘积法则和链式法则，

$$h'(x)=y'(x)E(-x)-y(x)E(-x)=y(x)E(-x)-y(x)E(-x)=0.$$

中值定理说明导数处处为零的函数在区间 I 上为常数。又

$$h(0)=y(0)E(0)=1\cdot 1=1.$$

故 $y(x)E(-x)=1$，再乘以 $E(x)$ 得 $y(x)=E(x)$。 ■

■ **例 21.10　任意初值**　若 $y'(x)=y(x)$ 且 $y(0)=c$，求所有在 $\mathbb{R}$ 上的解。

解　函数 $y_c(x)=cE(x)$ 满足 $y_c'=cE'=cE=y_c$ 且 $y_c(0)=c$。若 y 是另一个解，令 $z=y/c$（$c\neq 0$），则 $z'=z$、$z(0)=1$，由定理 21.6 得 $z=E$，故 $y=cE$。当 $c=0$ 时，$y\equiv 0$ 是解；对任意解直接取 $h=yE(-x)$，有 $h'\equiv 0$ 且 $h(0)=0$，所以仍得 $y\equiv 0$。因此全部解为 $y(x)=cE(x)$。 ♦

前后联系　本讲把第 20 讲的有界区间一致收敛用于连续性、积分和求导。第 22 讲将把求导结论推广为一般幂级数的逐项求导与逐项积分；第 23 讲再把「积分方程 + 完备函数空间」用于更一般的常微分方程。

本讲小结

- 若连续函数列 f_n 在 I 上一致收敛到 f，则 f 连续；证明时先定统一阈值 N，再用 $\varepsilon/3$ 控制三段误差。
- 在 $C([a,b])$ 上，$d_\infty(f,g)=\max_{[a,b]}|f-g|$ 收敛等价于一致收敛，且 $(C([a,b]),d_\infty)$ 完备。
- 若 f_n 在有限区间 $[a,b]$ 上可积且一致收敛到 f，则 f 可积，并有 $\left|\int f_n-\int f\right|\le (b-a)\sup|f_n-f|$。
- 若 $f_n'\to g$ 一致、g 连续且 $f_n(x_0)\to c$，则 $f_n\to f$ 一致，其中 $f(x)=c+\int_{x_0}^{x} g$，并且 $f'=g$。
- 对 $E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$，$E_n'=E_{n-1}\to E$ 一致且 $E_n(0)=1$，所以 $E'=E$；初值问题 $y'=y$，$y(0)=c$ 的唯一解是 cE。
- 一致收敛在有限区间控制积分误差；无界区间上的定义域长度可抵消小误差。求导交换需要控制导函数列，函数列自身一致收敛不够。

练习

21.1 ★ 令 $f_n(x)=x^n$，$x\in[0,1]$。求逐点极限，并计算 $\sup_{[0,1]}|f_n-f|$，由此判断是否一致收敛。

21.2 ★ 在 $C([0,1])$ 的最大值距离下，求 $d_\infty(f,g)$，其中 $f(t)=t$、$g(t)=t^2$。说明 $d_\infty(f,g)<1/3$ 的含义。

21.3 ★ 若 f,h 在 $[-2,3]$ 上可积且 $\sup|f-h|\le 1/100$，证明 $\left|\int_{-2}^{3}f-\int_{-2}^{3}h\right|\le 1/20$。

21.4 ★★ 习题集 10 第 2 题：设 $g_n\to g$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛且各 g_n 连续。令 $F_n(x)=\int_a^x g_n(s)\,\mathrm{d}s$、$F(x)=\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s$。证明 $F_n\to F$ 一致，并给出上确界误差界。

21.5 ★★ 令 $E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$。求 $\int_{-L}^{L}E(x)\,\mathrm{d}x$ 的级数表达式，并计算 $\int_{-1}^{1}E_4(x)\,\mathrm{d}x$。

21.6 ★★ 对 $n\ge 4$，令 $q_n(x)=n^{-1}(1-x/n)$ 于 $[0,n]$，其余 $x\ge 0$ 处为 0。证明 $q_n\to 0$ 在 $[0,\infty)$ 上一致，但每个广义积分 $\int_0^{\infty}q_n$ 相同且非零。

21.7 ★★ 令 $f_n(x)=n+x$ 于 $[0,1]$。核对导数列一致收敛，说明定理 21.5 的锚点条件失败，并判断 (f_n) 是否有逐点极限。

21.8 ★★ 习题集 10 第 1 题：证明 $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}/k!$ 满足 $\Phi'=2x\Phi$，不要先求 Φ 的显式表达式。

21.9 ★★★ 习题集 10 第 5 题：设 f_n 在 $[a,b]$ 上都有同一 Lipschitz 常数 K，且逐点收敛到 f。证明 f 也满足常数 K 的 Lipschitz 条件，且收敛一致；再给出没有公共常数时结论失败的例子。

21.10 ★★★ 求微分方程 $y'=y$，$y(0)=c$ 在 $\mathbb{R}$ 上的所有解，并证明唯一性。

练习答案与提示

21.1 对 $x<1$，$x^n\to 0$；在 $x=1$，$x^n=1$，故 $f(x)=0$（$0\le x<1$）、$f(1)=1$。对每个固定 n，当 $x\to 1^-$ 时 $|x^n-f(x)|=x^n\to 1$，而误差不超过 1，所以 $\sup_{[0,1]}|f_n-f|=1$。收敛不一致。

21.2 $|t-t^2|=t(1-t)=\frac14-(t-\frac12)^2$，最大值在 $t=1/2$ 取到，故 $d_\infty(f,g)=1/4$。$d_\infty(f,g)<1/3$ 表示对每个 $t\in[0,1]$，都有 $|f(t)-g(t)|<1/3$。

21.3 由 $|f-h|\le 1/100$ 和积分单调性，

$$\left|\int_{-2}^{3}f-\int_{-2}^{3}h\right|\le\int_{-2}^{3}|f-h|\le(3-(-2))/100=1/20.$$

21.4 由定理 21.1，g 连续，故 F 有定义。对每个 $x\in[a,b]$，

$$|F_n(x)-F(x)|\le\int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)}|g_n-g|\le(b-a)\sup_{[a,b]}|g_n-g|.$$

右端趋于零且不依赖 x，所以 $\sup_{x\in[a,b]}|F_n(x)-F(x)|\to 0$。

21.5 奇次幂在对称区间上的积分为零，偶次幂给出

$$\int_{-L}^{L}E(x)\,\mathrm{d}x=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{L^{2j+1}}{(2j+1)(2j)!}.$$

有限和 E_4 只保留 $j=0,1,2$，当 $L=1$ 时积分为 $2(1+1/6+1/120)=47/20$。

21.6 在 $[0,n]$ 上 q_n 的最大值为 $q_n(0)=1/n$，在 $x>n$ 时为零，因此 $\sup_{x\ge0}|q_n(x)|=1/n\to0$。每个广义积分都是有限区间上的积分：

$$\int_0^\infty q_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac1n\int_0^n(1-x/n)\,\mathrm{d}x=\frac12.$$

极限函数为零，积分为零；所以无界区间上的积分不随一致极限连续。

21.7 $f_n'(x)=1$ 对所有 n,x 成立，故导数列一致收敛到连续函数 1。但 $f_n(0)=n$ 不收敛，且对每个固定 x，$f_n(x)=n+x\to+\infty$，所以不存在实值逐点极限。

21.8 令 $\Phi_N(x)=\sum_{k=0}^{N}x^{2k}/k!$。固定 L，$\sum L^{2k}/k!$ 收敛，故 $\Phi_N\to\Phi$ 在 $[-L,L]$ 上一致。有限和求导后

$$\Phi_N'(x)=2x\Phi_{N-1}(x),\qquad\sup_{|x|\le L}|\Phi_N'(x)-2x\Phi(x)|\le 2L\sup_{|x|\le L}|\Phi_{N-1}(x)-\Phi(x)|\to0.$$

又 $\Phi_N(0)=1$。定理 21.5 给出 $\Phi'=2x\Phi$，没有使用显式解。

21.9 取任意 $x,y\in[a,b]$。对每个 n，$|f_n(x)-f_n(y)|\le K|x-y|$；令 $n\to\infty$ 得 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$，所以 f 也是 K-Lipschitz。

若 $K=0$，每个 f_n 都为常数，点态收敛即一致收敛。若 $K>0$，给 $[a,b]$ 取有限网格，任意点到某个网格点 y 的距离小于 $\varepsilon/(4K)$。逐点收敛在有限个网格点上同时成立，故存在 N 使 $n\ge N$ 时所有网格点均满足 $|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon/2$。任意 x 选最近的网格点 y，则

$$|f_n(x)-f(x)|\le K|x-y|+|f_n(y)-f(y)|+K|x-y|<\varepsilon.$$

这个 N 与 x 无关，收敛一致。若无公共 Lipschitz 常数，取 $f_n(x)=x^n$：其 Lipschitz 常数可取 n，逐点极限在 1 处不连续，故结论失败。

21.10 $y_c(x)=cE(x)$ 满足方程和初值。任取另一个解 y，令 $h(x)=y(x)E(-x)$。由 $E'=E$ 和链式法则，$h'(x)=y'E(-x)-yE(-x)=0$，故 h 为常数；$h(0)=c$。第 10 讲给出 $E(-x)=1/E(x)>0$，于是 $y(x)E(-x)=c$ 等价于 $y(x)=cE(x)$，所有解都已列出。

第 22 讲

幂级数的逐项运算与高阶展开

Differentiation, Integration, and Higher Derivatives of Power Series

对应材料：MIT 18.100B（Colding，2025 春）Lecture 22；习题集 10 第 1、3 题。

本讲目标

(1) 会用 Cauchy–Hadamard 公式比较原幂级数与导数级数的收敛半径，并分开检查端点。

(2) 掌握幂级数在 $(-R,R)$ 上逐项求导的条件与证明，能指出一致收敛用在哪一步。

(3) 会写出任意阶导数的系数公式，并由 $f^{(k)}(0)$ 恢复 a_k。

(4) 会在收敛区间内逐项积分，并说明原函数级数的半径和端点行为。

(5) 能用幂级数计算例子、检验常微分方程，并区分半径内部与边界结论。

22.1 求导后收敛半径为何不变？

几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径是 1，形式求导后得到 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$。新系数多了因子 n，半径仍应是 1 吗？Cauchy–Hadamard 公式把这个问题化成系数的 n 次根。

引理 22.1（求导不改变收敛半径） 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R。级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

的收敛半径也为 R。更一般地，对每个固定的整数 $k \geq 1$，级数

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

的收敛半径仍为 R。

直观理解 收敛半径由系数的指数级增长决定。逐项求导给第 n 项多乘一个 n，而 $n^{1/n} = \exp(\log n/n) \to 1$，所以这一因子增长得比任何固定的指数都慢，不足以改变根值判别法看到的指数尺度。固定 k 次求导只会多出 k 个这样的因子。

思路 把导数级数改写为标准幂级数 $\sum b_m x^m$，其中 $b_m = (m+1)a_{m+1}$。接着比较 $|b_m|^{1/m}$ 与 $|a_{m+1}|^{1/(m+1)}$：一处是指标移位，另一处是因子 $m+1$。

证明　记 $M = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$，并令 $m = n-1$。导数级数按 x^m 排列后的系数为 $b_m = (m+1)a_{m+1}$。

移位不改变上极限。有

$$|a_{m+1}|^{1/m} = \left(|a_{m+1}|^{1/(m+1)}\right)^{(m+1)/m}.$$

指数 $(m+1)/m$ 趋于 1。令 $c_n = |a_n|^{1/n}$。

- 若 $0 < M < \infty$，对任意 $\varepsilon > 0$，最终有 $c_n \le M + \varepsilon$，从而 $c_n^{n/(n-1)}$ 的上极限不超过 $M+\varepsilon$。另一方面，可取子列 n_j 使 $c_{n_j} \to M$，沿该子列 $c_{n_j}^{n_j/(n_j-1)} \to M$，所以上极限至少为 M。令 $\varepsilon \downarrow 0$ 得到等于 M。
- 若 $M = 0$，最终 $c_n < \varepsilon < 1$，故 $c_n^{n/(n-1)} \le c_n < \varepsilon$；若 $M = +\infty$，对任意 $A > 1$ 都有无穷多个 n 使 $c_n > A$，这些项的变指数次方仍大于 A。

因此 $\limsup |a_{m+1}|^{1/m} = M$，三个可能的扩展实数情形都包括在内。

又 $(m+1)^{1/m} = \exp(\log(m+1)/m) \to 1$，所以

$$\limsup_{m\to\infty} |b_m|^{1/m} = \limsup_{m\to\infty} (m+1)^{1/m} |a_{m+1}|^{1/m} = M.$$

两级数的 Cauchy–Hadamard 公式给出相同的半径，包括 $R = 0$ 与 $R = +\infty$ 的情形。

固定 k 次求导时，x^m 的系数为 $\frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k}$。前面的阶乘比是 k 个连续整数的乘积：

$$\left(\frac{(m+k)!}{m!}\right)^{1/m} = \exp\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{k} \log(m+j)\right) \longrightarrow 1,$$

因为 k 固定而 $\log(m+j)/m \to 0$。移位后的系数根上极限仍是 M。这证明了高阶结论。 ■

■ **例 22.1　原级数和导数级数的半径**　设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$。求它的收敛半径，并写出导数级数的收敛半径。

解　先用根值公式。系数满足 $\left(1/n^2\right)^{1/n} \to 1$，故 f 的收敛半径为 $R = 1$。引理 22.1 给出

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, \qquad R_{f'} = 1.$$

在 $x = 1$ 处，原级数是 $p = 2$ 级数，绝对收敛；导数级数是调和级数，发散。半径相同只说明两个级数在开区间 $(-1, 1)$ 内有相同的收敛范围，端点另行判断。 ♦

另一个端点给出不同的比较：在 $x = -1$，原级数变成 $\sum (-1)^n/n^2$，仍绝对收敛；导数级数变成 $\sum (-1)^{n-1}/n$，由交错级数判别法收敛，但不绝对收敛。它的通项绝对值 $1/n$ 单调趋于 0，而绝对值级数是发散的调和级数。因而同一个半径的两个端点也可以有不同类型的收敛。

图 22.1 并排比较同半径的原级数与导数级数；实心端点表示收敛，空心端点表示发散。

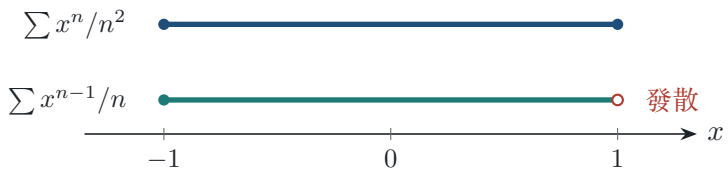


图 22.1　$\sum x^n/n^2$ 与其形式导数的半径同为 1，但在 $x=1$ 处的收敛性不同。

原级数在 $x=\pm 1$ 都绝对收敛。导数级数在 $x=-1$ 是交错调和级数，收敛但不绝对；在 $x=1$ 是调和级数，发散。图中的端点信息来自逐项检验，不由半径公式决定。

易错提醒　「导数级数与原级数半径相同」不表示两个边界点处的收敛性相同。上例在 $x=1$ 给出反例；正确结论只保证 $|x|<R$ 内的收敛范围相同，端点要分别判别。

想一想　既然两级数的半径相同，求导后能否直接把原级数的收敛区间也照抄过来？

答　不能。半径只确定开区间 $(-R,R)$；例如原级数 $\sum x^n/n^2$ 在 $x=1$ 收敛，而形式导数 $\sum x^{n-1}/n$ 在 $x=1$ 发散。边界处必须重新检查。

22.2　什么时候可以逐项求导?

有限和可以逐项求导。对无穷和，这一步需要控制整个区间上的误差。第 20 讲给出的 Weierstrass M 判别法提供这种控制：只要固定一个严格位于半径内的闭区间，原级数与导数级数都一致收敛。

定理 22.2（幂级数逐项求导）　设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R>0$。对每个 L 满足 $0<L<R$，原级数与导数级数在 $[-L,L]$ 上一致收敛，而且对每个 $|x|<R$，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

因此 f 在 $(-R,R)$ 上可导，导数级数的收敛半径为 R。

直观理解　在整个开区间 $(-R,R)$ 上，我们不能要求一个固定的误差界同时贴近两个边界；但在任一 $[-L,L]$ 上，$L<R$ 留出了正的距离。幂次带来的几何衰减压过系数增长与因子 n，因此部分和及其导数都能一致逼近极限。

思路　先用半径引理和第 20 讲的一致收敛结论，得到多项式部分和的导数列在 $[-L,L]$ 上一致收敛；再把第 21 讲的逐项求导定理用于 $x_0=0$。严格不等式 $L<R$ 正是在第一步保证一致收敛的条件。

证明　固定 L 满足 $0<L<R$，令 $P_N(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$。先解释两个一致收敛结论。选 s 使

$L < s < R$；若 $R = +\infty$，任取有限的 $s > L$。根值公式说明 $\sum |a_n| s^n$ 收敛，所以

$$|a_n x^n| \le |a_n| s^n \qquad (|x| \le L).$$

Weierstrass M 判别法于是给出 $P_N \to f$ 在 $[-L, L]$ 上一致收敛。由引理 22.1，导数级数半径也为 R，同理在 $[-s, s]$ 的任一严格内缩区间上一致收敛。还可直接看到它的控制项：

$$|n a_n x^{n-1}| \le \frac{n}{s} \left(\frac{L}{s} \right)^{n-1} |a_n| s^n.$$

数列 $n(L/s)^{n-1}/s$ 有界：令 $q = L/s < 1$，相邻两项之比为 $q(1 + 1/n)$，当 n 充分大时小于某个固定的 $q' < 1$。故导数级数也由 M 判别法一致收敛。于是 P_N' 在 $[-L, L]$ 上一致收敛到

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

每个 P_N' 是多项式，因而连续；并且 $P_N(0) = a_0$ 对所有 N 成立。第 21 讲的逐项求导定理于是适用，给出 $f' = g$。任取 x 满足 $|x| < R$，选 L 使 $|x| < L < R$，便得到所需公式。L 可以依赖于 x，这不影响在每一点成立的导数结论。 ■

这里需要的是两个不同的极限信息：$P_N(0) \to a_0$，以及 P_N' 在整个闭区间上一致收敛。仅知道 P_N 收敛到 f，不能推出导数也收敛到 f'；第 21 讲专门给出函数列求导的反例。幂级数的特殊结构使导数列有新的收敛半径公式，才补足了这项条件。

条件 $L < R$ 不能换成 $L = R$。取 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$，其半径为 1；在 $x = 1$ 处部分和为 $N+1$，所以该级数连逐点收敛都没有，更不可能在 $[-1, 1]$ 上一致收敛。

定理还假设 $R > 0$，因为求导首先要求函数定义在原点的一个邻域内。例 $sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 的半径为 0：$n!$ 的 n 次根趋于无穷，故除了 $x = 0$ 外级数都发散。此时系数级数的求导半径仍为 0，但没有非空开区间可供定理陈述导数等式。半径引理对系数序列仍成立，求导函数的定理则没有非空的内部点。

在定理证明中，x 固定以后才选择 L。例如若 $R = 1$ 且 $x = 0.9$，可以取 $L = 0.95$；若 x 更靠近端点，就选一个更大的 $L < 1$。要求一个固定区间同时覆盖全部 $(-1, 1)$，会迫使 $L = 1$，这正是边界处无法沿用证明的原因。

一致收敛也给出可用来估算截断误差的尾项界。仍固定 $0 < L < s < R$，令 $q = L/s$。因为 $\sum |a_n| s^n$ 收敛，而且

$$\frac{n q^{n-1}}{s} \le \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{\infty} j q^{j-1} = \frac{1}{s(1-q)^2},$$

对 $|x| \le L$ 有

$$\Big| \sum_{n>N} n a_n x^{n-1} \Big| \le \frac{1}{s(1-q)^2} \sum_{n>N} |a_n| s^n \longrightarrow 0.$$

右侧只含收敛数项级数的尾和，不再依赖 x。因此选取 N 控制导数级数的误差时，能同时控制整个 $[-L, L]$，而不是逐点挑选不同的截断阶数。

例 22.2　用幂级数解一个常微分方程，习题集 10 第 1 题　令 $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$。不先求出 ϕ 的闭式，证明它满足 $\phi'(x) = 2x\phi(x)$。

解　比值判别法给出该级数对每个实数 x 都收敛；按偶数次幂写成普通幂级数时，其半径也是无穷大。由定理 22.2，

$$\phi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx^{2n-1}}{n!}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(n-1)!}.$$

令 $m=n-1$，右侧的级数变为 $2x\sum_{m=0}^{\infty}x^{2m}/m!=2x\phi(x)$。换指标没有丢掉常数项，因为 $n=1$ 正好对应 $m=0$。这证明了习题要求的微分方程关系，不需要先认出 $\phi(x)=e^{x^2}$。 ♦

把前几项写出来也能检查换指标的位置：$\phi(x)=1+x^2+x^4/2!+x^6/3!+\cdots$，所以 $\phi'(x)=2x+2x^3+x^5+\cdots$；而 $2x\phi(x)$ 也以 $2x+2x^3+x^5+\cdots$ 开头。常数项求导后变成 0，新级数则从 $n=1$ 开始，移位后正好重新从 $m=0$ 开始。

这道题展示了幂级数如何直接检验微分方程的解。Lecture 22 后半还预告了 Picard–Lindelöf 定理；按本课程安排，方程解的局部存在唯一性放在第 23 讲，本讲只使用已经给出的幂级数运算。

■ **例 22.3　一致收敛只在有界区间上，习题集 10 第 3 题**　令 $E_N(x)=\sum_{n=0}^{N}x^n/n!$，$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$。证明 $E_N\to E$ 在每个 $[-L,L]$ 上一致收敛，却不在整个 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。

解　固定有限的 $L>0$。对 $|x|\le L$，有 $|x^n/n!|\le L^n/n!$，而数项级数 $\sum L^n/n!$ 收敛。Weierstrass M 判别法给出 $E_N\to E$ 在 $[-L,L]$ 上一致收敛；L 任意，所以 $E_N(x)$ 对每个实数 x 逐点收敛。

全实轴上的一致收敛失败。固定 N，对 $x>0$，余项各项非负，因而

$$E(x)-E_N(x)\ge\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}.$$

右端随 $x\to+\infty$ 无界，故 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|E(x)-E_N(x)|=+\infty$。这说明幂级数逐项定理在每个有限子区间上成立，不能把区间扩成整个实轴。 ♦

同一估计也能直接看到导数列在每个有限区间上一致收敛。对 $n\ge1$ 和 $|x|\le L$，

$$\left|\frac{nx^{n-1}}{n!}\right|=\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\le\frac{L^{n-1}}{(n-1)!},$$

右侧级数收敛。因此 $E_N'\to E$ 在 $[-L,L]$ 上一致收敛；同时 $E_N(0)=1$。这正好满足第 21 讲逐项求导定理的两项条件，并得到 $E'=E$，与前一例中换指标得到的结论相同。函数列自身在全实轴上不一致收敛，不妨碍它在每个紧区间上满足定理条件。

方法：局部化　要在 x_0 处对幂级数逐项求导，先选 L 使 $|x_0|<L<R$，再把问题放到紧区间 $[-L,L]$ 上。局部的一致收敛足以给出每一点的导数公式。

22.3　各阶导数怎样展开?

几何级数 $1+x+x^2+\cdots$ 在 $x=0$ 的函数值是 1，前几阶导数在 0 处分别是 $1,2,6$。这些数正是相应幂级数系数乘上阶乘的结果。下面把这个观察推广到任意幂级数。

推论 22.3（高阶导数公式）　设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R>0$。对每个整数 $k\ge 1$ 及 $|x|<R$，

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}.$$

该导数级数的收敛半径仍为 R，并且 $f^{(k)}(0)=k!a_k$。对 $k=0$，后一公式读作 $f(0)=a_0$。

证明　第一次求导由定理 22.2 给出。假设第 j 阶公式已经成立，再求一次导数时，$n=j$ 项是常数，导数为 0；当 $n\ge j+1$ 时，每项再乘 $n-j$ 并把幂次减一。因此

$$\frac{n!}{(n-j)!}(n-j)a_nx^{n-j-1}=\frac{n!}{(n-j-1)!}a_nx^{n-j-1}.$$

归纳即得任意 k 的系数。引理 22.1 保证每次求导后的半径仍为 R，所以在 $(-R,R)$ 的任意紧子区间上都能继续应用定理 22.2。代入 $x=0$ 时，只有 $n=k$ 项的幂次 0，其值是 $k!a_k$；其余项含正次幂而为 0。 ■

本讲把展开中心取为 0，只是为了简化记号。若已知 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ 在 $|x-c|<R$ 内成立，令 $u=x-c$ 后应用同一推论，即得 $f^{(k)}(c)=k!a_k$。此时半径描述的是围绕 c 的展开，不能未经计算就照搬另一个中心的半径。

因此系数可以从导数读出：$a_k=f^{(k)}(0)/k!$。这不只是记号转换；它说明若一个函数在原点附近由幂级数表示，该表示的系数由函数在原点的各阶导数唯一确定。将每个系数代回原级数，还得到它在半径内部的 Taylor 展开：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\qquad |x|<R.$$

这条等式只在开区间内由本讲定理保证。即使函数在某个端点另有定义、甚至连续，Taylor 级数在端点的收敛仍需单独检查。

系数唯一性可以直接由高阶导数公式证明。假设两个半径都为正的幂级数在原点的某个邻域表示同一个函数，把两边分别求 k 次导数并令 $x=0$，就得到 $k!a_k=k!b_k$，所以每个 k 都有 $a_k=b_k$。因此，在一个邻域内相等的两个幂级数必有相同系数。这里的前提是函数已经有幂级数表示；仅仅知道函数无穷可导并不够。第 17 讲的平坦函数在原点所有导数都为零，却不在正半轴恒为零，说明它不能由原点附近的零 Taylor 级数表示。

例 22.4　几何级数的各阶导数　在 $|x|<1$ 内，求 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 的第 k 阶导数，并从中读出前三阶导数在 0 处的值。

解　先用几何级数求和 $f(x)=1/(1-x)$。对任意固定的 $k\ge 1$，反复求导得

$$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k},\qquad |x|<1.$$

第一种写法由有理函数直接微分得到，第二种写法由推论 22.3 得到。代入 $x=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，$f'''(0)=6$。例如 $k=3$ 时，系数因子是 $n(n-1)(n-2)$，在 $n=3$ 处等于 6。这验证了系数恢复公式，并说明它能把无穷级数的局部数据压缩成导数值。 ♦

例 22.5　把几何级数的中心移到 1/2　将 $f(x)=1/(1-x)$ 写成以 $c=1/2$ 为中心的幂级数，并求 $f(1/2)$、$f'(1/2)$、$f''(1/2)$。

解　令 $u=x-1/2$，则

$$\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-2u}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}u^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(x-1/2)^n,\qquad |x-1/2|<1/2.$$

半径由系数根 $\lim_{n\to\infty}(2^{n+1})^{1/n}=2$ 得为 $1/2$。系数公式给出 $f^{(k)}(1/2)=k!2^{k+1}$，所以三个值依次为 $2,4,16$。这与直接微分 $f'(x)=(1-x)^{-2}$、$f''(x)=2(1-x)^{-3}$ 后代入 $x=1/2$ 一致。左端点 $x=0$ 处级数项为 $2(-1)^n$，尽管函数在那里有定义，展开仍因通项不趋于零而发散。 ♦

原点展开的收敛区间是 $(-1,1)$，移到 $1/2$ 后则是 $(0,1)$。两者在 $(0,1)$ 上代表同一函数；点 $x=0$ 位于新展开的边界上，所以前一个级数在那里收敛、后一个却发散，并不矛盾。判断一个幂级数时，中心、半径与端点要一起看。

例 22.6　求导得到有理函数的幂级数　在 $|x|<1$ 内，把 $1/(1+x)^2$ 写成幂级数，并判断两端级数。

解　先把几何级数中的变量换成 $-x$：$1/(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$。在开区间内逐项求导，得到

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n x^{n-1}.$$

令 $m=n-1$ 并移项，便有

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m+1)x^m,\qquad |x|<1.$$

系数的 m 次根趋于 1，故半径为 1。在 $x=1$，级数项为 $(-1)^m(m+1)$；在 $x=-1$，级数项为 $m+1$。两端的通项都不趋于 0，所以都发散。特别地，函数 $1/(1+x)^2$ 在 $x=1$ 有限且光滑，级数仍不能据此延伸到该端点；半径反映的是以 0 为中心的这个展开能到哪里，不限制函数能否另有延拓。 ♦

图 22.2 把同一个系数经过连续求导时的乘数列在一起；固定的导数阶数只给系数多乘一个多项式因子。

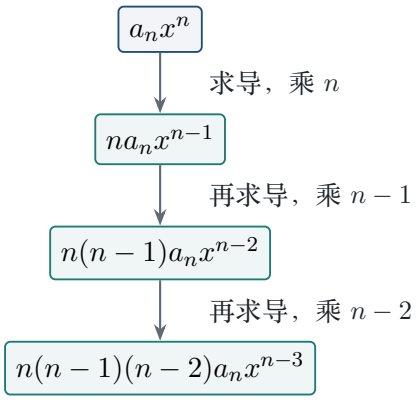


图 22.2　自上而下每求导一次，系数便增加一个线性因子；固定阶数的 n 次根上极限不变。

取图中原项 a_5x^5，连续求导三次得到系数 $5a_5$、$20a_5$、$60a_5$，对应 x^4、x^3、x^2。在上极限计算中，这些固定阶次因子满足 $n^{1/n}\to 1$，所以不会改变半径。

22.4　什么时候可以逐项积分？

在 $|x|<1$ 内，几何级数给出 $1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots$。对 $0\le x<1$ 积分时，每一项的原函数是 $x^{n+1}/(n+1)$；要把这一步推广到任意幂级数，仍需先固定在半径内部的闭区间。

定理 22.4（幂级数逐项积分）　设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R>0$。若 $a\le b$ 且 $[a,b]\subset(-R,R)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\bigl(b^{n+1}-a^{n+1}\bigr).$$

特别地，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 满足

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\qquad |x|<R.$$

该原函数级数的收敛半径仍为 R；所有原函数为 $F(x)+C$，其中 C 为常数。

思路　先在一个包含 $[a,b]$ 的紧区间上使用一致收敛，把部分和积分的极限换成和函数的积分；再把有限和的积分逐项算出。要证明原函数级数半径不变，需另对新系数使用根值公式，不能从逐项积分等式直接读出半径。

证明　因为 $[a,b]$ 是 $(-R,R)$ 的紧子区间，可取 $L<R$ 使 $[a,b]\subset[-L,L]$。幂级数部分和 P_N 在 $[-L,L]$ 上一致收敛到 f。这里一致收敛的作用可以用一个估计看出：

$$\Bigl|\int_a^b P_N(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr|\le (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|P_N(x)-f(x)|\longrightarrow 0.$$

这正是第 21 讲的一致收敛积分定理在本题中的用法。而有限和可逐项积分，

$$\int_a^b P_N(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{n+1}\bigl(b^{n+1}-a^{n+1}\bigr).$$

令 $N\to\infty$ 得第一式。取 $a=0$、$b=x$ 得基点为 0 的原函数公式。它的系数按 x^m 编号时满足 $b_0=0$、$b_{n+1}=a_n/(n+1)$。于是

$$|b_{n+1}|^{1/(n+1)}=\Bigl(|a_n|^{1/n}\Bigr)^{n/(n+1)}(n+1)^{-1/(n+1)}.$$

沿用引理 22.1 中的移位论证，第一因子的上极限为 $\limsup|a_n|^{1/n}$；而 $(n+1)^{-1/(n+1)}\to 1$。所以新系数的根上极限相同，收敛半径仍为 R。最后由微积分基本定理，任意两个原函数之差为常数；因此若不指定 $F(0)$，还必须保留加法常数。 ∎

例 22.7　指数级数在对称区间上的积分，习题集 10 第 3 题　令 $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$。求 $\int_{-L}^{L}E(x)\,\mathrm{d}x$ 的幂级数表示，其中 $L>0$。

解　该级数半径为无穷大，所以在 $[-L,L]$ 上一致收敛。由定理 22.4，

$$\int_{-L}^{L} E(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^{n+1}-(-L)^{n+1}}{(n+1)n!}.$$

当 n 为奇数时，分子为 0；令 $n=2j$，分子为 $2L^{2j+1}$。因此

$$\int_{-L}^{L} E(x)\,\mathrm{d}x=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{L^{2j+1}}{(2j+1)(2j)!}.$$

对称区间消去了所有奇次幂。每一项来自先对多项式部分和积分，再令阶数趋于无穷；一致收敛保证这个极限等于积分。 ♦

■ **例 22.8　几何级数的原函数**　在 $|x|<1$ 内，逐项积分 $1/(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，并写出满足 $F(0)=0$ 的原函数。

解　由定理 22.4，

$$F(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x),\qquad |x|<1.$$

前五项是 $x+x^2/2+x^3/3+x^4/4+x^5/5$，对应原级数各项分别积分。对所得级数逐项求导，系数中的 $n+1$ 被抵消，恢复 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1/(1-x)$。积分常数由条件 $F(0)=0$ 固定。 ♦

还可以把逐项积分用于一个非几何的函数。对 $|t|<1$，在几何级数中代入 $-t^2$ 得

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}.$$

在任一 $[-L,L]$（$L<1$）上一致收敛，所以从 0 积到 x 时可以逐项积分：

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\qquad |x|<1.$$

系数根的上极限为 1，故这个展开的半径是 1。在 $x=\pm1$，所得端点级数都是符号交替、项的绝对值趋于 0 但绝对值和发散的级数，因此条件收敛。这里的逐项积分定理只给出 $|x|<1$ 内的函数等式；若要断言端点级数分别等于 $\pm\pi/4$，还需另证端点极限与级数和相等。

端点值可用有限几何和的余项来补证。在 $[0,1]$ 上，

$$\frac{1}{1+t^2}-\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{2n}=\frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2},$$

其绝对值的积分不超过 $\int_0^1 t^{2N+2}\,\mathrm{d}t=1/(2N+3)\to0$。因此有限和积分趋于 $\int_0^1(1+t^2)^{-1}\,\mathrm{d}t=\pi/4$，也就是 $x=1$ 的交错级数和；奇函数的对称性给出 $x=-1$ 的和为 $-\pi/4$。这里额外使用的是积分余项趋零，不是把内部逐项积分结论直接代入端点。

22.5　半径边界上要另作判断

逐项定理把结论放在 $|x|<R$ 内。边界 $|x|=R$ 不在任何更小的闭区间 $[-L,L]$ 中，因此不能直接套用一致收敛论证。

第 8 讲已经给出三种不同的边界样式，而且三个级数的半径都是 1：$\sum x^n$ 在两端都发散；$\sum x^n/n$ 只在 $x=-1$ 收敛；$\sum x^n/n^2$ 在两端都绝对收敛。导数或积分会改变系数，所以每次运算之后都要重新检查新的端点级数，不能只看原级数的收敛区间。

■ **例 22.9　原级数在端点收敛，导数却发散**　仍取 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$，其半径为 1。说明原级数在 $x=1$ 收敛，但导数级数在 $x=1$ 发散，并证明 f 在 1 处没有有限的左导数。

解　在 $x=1$，原级数是收敛的 p 级数 $\sum 1/n^2$；形式导数是调和级数 $\sum 1/n$，发散。还可以直接检查差商。令 $0<t<1$，则

$$\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(1-t)^n}{tn^2}.$$

这个等式可由两个绝对收敛级数相减得到。对任意固定的 m，右侧各项非负，故

$$\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}\geq\sum_{n=1}^{m}\frac{1-(1-t)^n}{tn^2}.$$

令 $t\downarrow 0$，右侧趋于 $\sum_{n=1}^{m}1/n$。调和部分和随 m 无界，所以差商趋于 $+\infty$，不存在有限的左导数。这个端点确实不能由内部的逐项求导公式补上。 ♦

原级数在端点不收敛，并不妨碍原函数级数在该点收敛。下面把这个差别算清楚。

■ **例 22.10　积分改变端点的收敛性**　几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $x=-1$ 发散。求它在 $(-1,1)$ 内满足 $F(0)=0$ 的原函数，并检查原函数级数在 $x=-1$ 的行为。

解　逐项积分给出

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x),\qquad |x|<1.$$

在 $x=-1$，右侧级数成为交错调和级数 $-1+1/2-1/3+\cdots$，由交错级数判别法收敛；原级数在该点的通项 $(-1)^n$ 不趋于 0，所以发散。

此处还可单独证明积分值。令 $P_N(x)=\sum_{n=0}^{N}x^n$。在 $[-1,0]$ 上，

$$\left|P_N(x)-\frac{1}{1-x}\right|=\frac{|x|^{N+1}}{1-x}\leq|x|^{N+1},$$

所以积分误差满足

$$\left|\int_0^{-1}P_N(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{-1}\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_{-1}^{0}|x|^{N+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{N+2}\longrightarrow 0.$$

有限和逐项积分给出

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\int_0^{-1}P_N(x)\,\mathrm{d}x\longrightarrow\int_0^{-1}\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln 2.$$

这次端点等式来自额外的误差估计，不能只引用内部逐项积分定理。 ♦

在另一个端点 $x=1$，原函数级数变成调和级数 $\sum_{n\ge 0} 1/(n+1)$，发散；相应的积分 $\int_0^1 (1-x)^{-1}\,\mathrm{d}x$ 也是发散的反常积分。两个端点给出不同情形：左端点需要额外余项估计才能把积分与级数对应起来，右端点连积分本身都没有有限值。

想一想 原级数和原函数级数半径相同，是否意味着它们在每个端点要么同时收敛、要么同时发散？

答 不意味着。上例的半径都是 1，但在 $x=-1$ 原几何级数发散，积分后的交错调和级数收敛。半径只描述内部与外部；端点要对新的系数逐个检查。

易错提醒 把幂级数的逐项定理直接用到 $|x|=R$ 是常见错误。例 22.9 中原级数在 $x=1$ 收敛而导数级数发散；正确做法是先证明 $|x|<R$ 内的公式，再对每个边界点单独分析。

本讲小结

- 若 $f(x)=\sum a_n x^n$ 的半径为 R，则 $\sum n a_n x^{n-1}$ 与 $\sum_{n\ge k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ 的半径也为 R。
- 当 $R>0$ 且 $|x|<R$ 时，**可以逐项求导**：$f'(x)=\sum_{n\ge 1} n a_n x^{n-1}$；原级数与导数级数在每个 $[-L,L]$（$L<R$）上一致收敛。
- 任意固定的 $k\ge 1$ 满足 $f^{(k)}(x)=\sum_{n\ge k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$，因此 $a_k = f^{(k)}(0)/k!$。
- 对 $[a,b]\subset(-R,R)$，$\int_a^b f = \sum_{n\ge 0} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$；以 0 为基点的原函数级数半径仍为 R。
- 逐项积分的常数由初值决定：$\int_0^x f = \sum_{n\ge 0} a_n x^{n+1}/(n+1)$，一般原函数还可加任意常数 C。
- 半径只决定 $|x|<R$ 与 $|x|>R$ 的行为；$|x|=R$ 时，原级数、导数级数和原函数级数都要分别检查。

练习

22.1 ★ 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x/4)^n$ 的收敛半径，并求导后再求一次收敛半径。

22.2 ★ 在 $|x|<1$ 内，令 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$。求 $g(0), g'(0), g''(0), g'''(0)$。

22.3 ★★ 令 $\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/n!$。不求闭式，证明 $\phi'(x)=2x\phi(x)$。

22.4 ★ 在 $|x|<1$ 内逐项积分 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$，求满足 $F(0)=0$ 的原函数、半径和前五项。

22.5 ★★ 令 $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$。证明对每个固定 $k\ge 0$，$E^{(k)}(x)=E(x)$，并说明其收敛半径。

22.6 ★★ 判断真假并说明理由：若幂级数与其导数级数半径相同，则它们在半径端点处有相同的收敛性。

22.7 ★★ 对 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1)$，判断 $F(-1)$ 的级数是否收敛，并求其和。说明原几何级数在 $x=-1$ 的行为。

22.8 ★★ 说明 $L<R$ 为何不能改成 $L\le R$：用 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 检查 $x=1$。

22.9 ★★★ 求 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径，并说明半径为 0 时逐项求导定理的适用范围。

练习答案与提示

22.1 系数为 $a_n=(n+1)/4^n$，故 $\limsup|a_n|^{1/n}=1/4$，半径为 4。导数级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}/4^n$；令 $m=n-1$ 后，系数为 $(m+1)(m+2)/4^{m+1}$，根上极限仍为 $1/4$。任意固定阶数的求导只增加固定次数的多项式因子，根上极限不变。

22.2 几何级数求和为 $g(x)=1/(1-x)$。所以 $g(0)=1$，$g'(x)=(1-x)^{-2}$，$g''(x)=2(1-x)^{-3}$，$g'''(x)=6(1-x)^{-4}$；代入 0 得 $1,1,2,6$。这些值也分别等于 $k!a_k$，与高阶导数公式一致。

22.3 每个有限区间都在该幂级数的无穷大半径内，故可逐项求导：

$$\phi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx^{2n-1}}{n!}=2x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!}=2x\phi(x),$$

其中令 $m=n-1$。求导后的首项对应 $n=1$，移位后正好成为右侧的 $m=0$ 项；全程没有使用 ϕ 的闭式。

22.4 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1)=-\ln(1-x)$，收敛半径为 1。前五项为 $x+x^2/2+x^3/3+x^4/4+x^5/5$；逐项求导恢复 $\sum x^n$。积分从 0 到 x 固定了 $F(0)=0$，否则还可加任意常数。

22.5 由高阶导数公式，

$$E^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=E(x).$$

这里 $m=n-k$。原级数由比值判别法对所有实数收敛，半径为 $+\infty$。

22.6 假。$\sum x^n/n^2$ 与其导数级数 $\sum_{n\ge1} x^{n-1}/n$ 的半径都是 1；在 $x=1$，前者是收敛的 p 级数，后者是发散的调和级数。导数级数的项虽趋于 0，但这只是收敛的必要条件，仍需用调和级数判别其发散。

22.7 在 $x=-1$，F 的级数为 $-1+1/2-1/3+\cdots$，由交错级数判别法收敛；第 5 节的有限几何和误差估计说明其和为 $\int_0^{-1}(1-t)^{-1}\,\mathrm{d}t=-\ln 2$。原级数在该点的通项为 $(-1)^n$，不趋于 0，故发散。这里的端点值用了额外误差估计，不能从开区间内的级数公式直接代入得到。

22.8 在 $x=1$，第 N 个部分和为 $N+1$，不收敛。逐点收敛都是一致收敛的必要条件，所以在 $[-1,1]$ 上不可能一致收敛；必须取 $L<1=R$。证明 M 判别法所需的一致控制时，也要能在 L 与 R 之间选一个 s，以得到严格小于 1 的比值 L/s。

22.9 若 n 为偶数，$n!$ 的最后 $n/2$ 个因子都至少为 $n/2$，所以 $(n!)^{1/n}\ge\sqrt{n/2}\to\infty$。对任意 $x\neq0$，系数根再乘 $|x|$ 仍趋于无穷，幂级数项不可能趋于零；在 $x=0$，只有常数项保留。因此半径为 0，导数级数的半径也为 0。函数只在一个点由级数定义，没有开邻域可应用逐项求导定理。

第 23 讲

常微分方程的存在唯一性

Existence and Uniqueness for Ordinary Differential Equations

对应材料：MIT 18.100B Lecture 23；习题集 9 第 5 题、习题集 10 第 1 题；期末复习材料。

本讲目标

(1) 理解一阶常微分方程和初值问题的区别，会检验给定函数是否为解。

(2) 会把初值问题改写成积分方程，并把解看成函数空间上的不动点。

(3) 掌握 Picard 算子的自映射与压缩估计，能逐项说明每个常数的作用。

(4) 理解 Picard–Lindelof 定理的局部存在性，以及解在公共区间上的唯一性。

(5) 会用反例说明连续右端项不足以保证唯一，也知道局部解不一定延伸到全实轴。

(6) 会用幂级数逐项求导构造并检验常微分方程的解。

23.1 方程有解，初值才选出一个解

方程 $y'(x)=1$ 有很多解：$y=x$、$y=x+1$、$y=x-7$ 都满足。若再要求 $y(0)=0$，只有其中一个候选满足初值。微分方程描述变化率，初值指定曲线经过的位置。

定义 23.1（一阶常微分方程与初值问题） 含有未知函数及其导数的方程称为**常微分方程**（ordinary differential equation）。若只出现 y 和 y'，称为一阶方程；再指定 $y(x_0)=a$，就得到一个**初值问题**（initial value problem）。在包含 x_0 的开区间 I 上可微并满足方程和初值的函数，称为该问题在 I 上的**解**（solution）。

例如 $y'=1$ 是一阶常微分方程；配上 $y(0)=0$ 后，$y=x$ 是解，而 $y=x+1$ 虽满足微分方程，却不满足初值。若右端为零，$y'=0, y(0)=0$ 的常值函数 $y=0$ 是解；初值不同，解也随之不同。

■ **例 23.1** 验证 $y(x)=1/(1-x)$ 是否解初值问题 $y'=y^2$，$y(0)=1$，并指出它在哪一点不能继续作为有限值解。

解 直接求导：$y'(x)=1/(1-x)^2=y(x)^2$，且 $y(0)=1$，所以它在任何包含 0 且包含于 $(-\infty,1)$ 的区间上都是解。x 趋近 1 时分母趋近 0，函数值无界；这个解不能延伸成在整个 $\mathbb{R}$ 上有限的解。 ♦

易错提醒　只满足微分方程不等于满足初值问题。$y = x + 1$ 满足 $y' = 1$，但 $y(0) = 1 \neq 0$；检验解时必须同时代入方程和初值。

想一想　方程 $y' = 1$ 的所有解是什么？初值 $y(0) = a$ 会选出哪一个？

答　每个解都形如 $y = x + C$，因为 $(y - x)' = 0$，故 $y - x$ 为常数。初值要求 $C = a$，所以唯一解是 $y = x + a$。这说明「唯一」总是相对于给定初值而言。

23.2　积分方程把解变成不动点

在 $y' = f(y) + g(x)$ 中，右端沿着连续函数 y 取值后仍连续。微积分基本定理因此把微分方程和一条积分等式连在一起。

命题 23.2（积分形式）　设 f 连续、g 连续，且 $0 \in I$。可微函数 y 满足

$$y'(x) = f(y(x)) + g(x), \qquad y(0) = a$$

当且仅当连续函数 y 满足

$$y(x) = a + \int_0^x \big(f(y(s)) + g(s)\big)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I)$$

证明　若 y 满足微分方程，对 0 到 x 积分并用 $y(0) = a$，就得到积分等式。反过来，若 y 连续且满足积分等式，函数 $s \mapsto f(y(s)) + g(s)$ 连续；微积分基本定理给出 $y' = f(y) + g$，代入 $x = 0$ 得 $y(0) = a$。 ∎

因此，求解初值问题可以改成寻找积分算子的**不动点**（fixed point）。先看空间：给定 $\delta > 0$，令 $X = C([-\delta, \delta])$，并定义

$$d(u, v) = \|u - v\|_\infty = \max_{|x| \le \delta} |u(x) - v(x)|$$

第 12 讲定义了最大值距离，第 21 讲证明了这个度量空间完备：上确界范数下的柯西列一致收敛，连续函数列的一致极限仍连续。它的闭子集也完备，因为闭子集中的柯西列先在整个空间中收敛，闭性再保证极限仍在该子集中。特别地，下列闭球完备：

$$B_R(0) = \{y \in X : \|y\|_\infty \le R\}$$

若 $T : X \to X$ 满足 $d(Tu, Tv) \le q\,d(u, v)$，其中 $0 \le q < 1$，称 T 为压缩映射。第 6 讲证明的是实数闭区间上的压缩映射定理；同一迭代估计也适用于任意非空完备度量空间。这里补出这一版本的论证。若 $q = 0$，则 T 为常值映射，其常值就是唯一不动点。以下设 $0 < q < 1$，任取 y_0 并令 $y_{n+1} = T(y_n)$，则

$$d(y_{n+k}, y_n) \le \sum_{j=n}^{n+k-1} q^j d(y_1, y_0) \le \frac{q^n}{1 - q} d(y_1, y_0) \longrightarrow 0$$

迭代列是柯西列，完备性给出极限 y_*；压缩映射连续，故 $T(y_*)=y_*$。若 u,v 都是不动点，则 $d(u,v)\le qd(u,v)$，只能有 $d(u,v)=0$。

这个证明还给出可直接使用的误差界。由望远镜求和，对每个 $n\ge 0$ 有

$$d(y_n,y_*)\le\sum_{j=n}^{\infty}d(y_j,y_{j+1})\le\frac{q^n}{1-q}d(y_0,y_1).$$

因此压缩系数越小，迭代越快接近不动点。对 $y'=y$ 的例子，$q=1/4$，且在 $[-1/4,1/4]$ 上 $d(y_0,y_1)=1/4$；三次迭代后的统一误差不超过 $1/192$。这个估计保证的是整段区间上的误差，而不只是表格中某个点的误差。

在 X 上定义 Picard 算子

$$T(y)(x)=a+\int_0^x\big(f(y(s))+g(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

当 y 连续时，$T(y)$ 连续，所以 $T:X\to X$。由积分形式命题，

$$y\text{ 是初值问题的解}\quad\Longleftrightarrow\quad T(y)=y$$

这把「找一条满足微分方程的曲线」改成「找一个函数不动点」。

积分从 0 到负数时按定向积分解释：$\int_0^x h(s)\,\mathrm{d}s=-\int_x^0 h(s)\,\mathrm{d}s$。不论 x 在 0 的哪一侧，只要 h 在区间上满足 $|h|\le C$，都有

$$\left|\int_0^x h(s)\,\mathrm{d}s\right|\le|x|C.$$

所以在对称区间 $[-\delta,\delta]$ 上估计 $T(y)$ 时可统一使用 $|x|\le\delta$；负半轴不会改变自映射或压缩估计的常数。

先用方程 $y'=y$，$y(0)=1$ 看几步迭代。此时 $T(y)(x)=1+\int_0^x y(s)\,\mathrm{d}s$。从常函数 $y_0=1$ 开始，前三次迭代依次增加一个幂级数项，数值列在表 23.1。

n	$y_n(x)$	$y_n(1/4)$
0	1	1
1	$1+x$	$5/4$
2	$1+x+x^2/2$	$41/32$
3	$1+x+x^2/2+x^3/6$	$493/384$

表 23.1　$y_{n+1}=T(y_n)$ 在 $x=1/4$ 的前几次取值逐渐接近唯一不动点。

对此方程，$R=3$、$L_1=3$、$L_2=0$、$M=1$，引理给出 $\delta=1/4$ 和压缩系数 $q=1/4$。因此这些迭代不只在 $x=1/4$ 看似接近：在整个 $[-1/4,1/4]$ 上，函数列都一致收敛到唯一解。表格把抽象的收缩过程化成了可以手算的多项式。

事实上，从 $y_0=1$ 迭代得到

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

对 $|x| \le 1/4$，尾项满足

$$|E(x) - y_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1/4)^k}{k!} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} (1/4)^k \longrightarrow 0,$$

其中 $E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$。这个上界不依赖 x，所以给出一致收敛；再由积分对一致极限的估计，$T(E) = E$。表中的三次多项式已把 $x = 1/4$ 的值从 1 改进到 493/384，而收缩定理保证迭代继续下去会收敛到该不动点。

图 23.1 展示反复应用 T 的过程。若稍后证明 T 是压缩映射，任取的起点都会沿这条迭代链趋向同一个不动点。

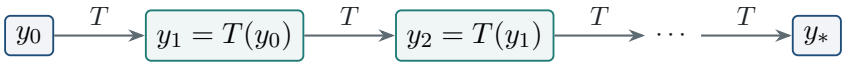


图 23.1　压缩迭代从任意起点出发，逐步逼近唯一不动点 $y_* = T(y_*)$。

例 23.2　一次 Picard 更新即得到解　取 $f(y) = 0$、$g(x) = 2x$、$a = 0$。计算算子 $T(y)$，并验证不动点。

解　此时算子不依赖输入函数：对每个 $y \in X$，都有

$$T(y)(x) = \int_0^x 2s \, \mathrm{d}s = x^2$$

所以 $T(x^2) = x^2$，而 $y = x^2$ 直接满足 $y' = 2x$、$y(0) = 0$。这例子里一次迭代就得到解；一般的 f 会让 $T(y)$ 继续依赖 y，需要证明反复迭代仍收敛。 ♦

想一想　为何不能只证明 T 把连续函数送到连续函数，就断定它有不动点？

答　连续自映射并不够，例如 $T(x) = x + 1$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续映射，却没有不动点。压缩映射定理还需要空间完备，并要求距离至少按某个 $q < 1$ 的比例缩短。

23.3　选短时间窗，让积分算子成为压缩

积分区间越短，$T(y)$ 偏离初值 a 越少；f 在有限范围内的导数有界，也会让两条曲线经过 T 后更接近。把这两点写成估计，就能找到一个闭球，使 T 在球上自映且压缩。

引理 23.3（Picard 算子的自映射与压缩）　设 $f \in C^1(\mathbb{R})$、$g \in C(\mathbb{R})$，并令 $R = |a| + 2$。定义

$$L_1 = \max_{|z| \le R} |f(z)|, \qquad L_2 = \max_{|x| \le 1} |g(x)|, \qquad M = \max_{|z| \le R} |f'(z)|$$

再令

$$\delta_0 = \min\left\{1, \frac{1}{L_1 + 1}, \frac{1}{L_2 + 1}\right\}, \qquad \delta = \min\left\{\delta_0, \frac{1}{2M + 1}\right\}$$

则 T 把 $B_R(0) \subset C([-\delta, \delta])$ 映入自身，并且

$$\|T(y_1) - T(y_2)\|_\infty \le M\delta \|y_1 - y_2\|_\infty, \qquad M\delta < \frac{1}{2}.$$

直观理解　算子 T 把初值 a 加上一段长度至多 δ 的积分。缩短 δ 会同时压低积分的绝对值，也压低两条输入曲线的输出差。前者保证不离开球，后者保证迭代时误差逐次变小。

思路　先在半径 $R=|a|+2$ 的球内用连续性取得 L_1,L_2,M。取 δ_0 使两段积分合计小于 2，便得到自映射；再缩小到 $\delta\le(2M+1)^{-1}$，用中值定理得到压缩系数小于 $1/2$。

证明　由于 f,g,f' 在相应闭区间连续，L_1,L_2,M 都有限。取 $y\in B_R(0)$，则 $|y(s)|\le R$。对 $|x|\le\delta\le\delta_0\le 1$，

$$|T(y)(x)|\le|a|+|x|L_1+|x|L_2\le|a|+\delta_0L_1+\delta_0L_2<|a|+2=R$$

这里 $\delta_0L_i\le L_i/(L_i+1)<1$ $(i=1,2)$，所以 $T(y)\in B_R(0)$。

再取 $y_1,y_2\in B_R(0)$。中值定理给出

$$|f(y_1(s))-f(y_2(s))|\le M|y_1(s)-y_2(s)|$$

于是对 $|x|\le\delta$，

$$|T(y_1)(x)-T(y_2)(x)|\le|x|M\|y_1-y_2\|_\infty\le M\delta\|y_1-y_2\|_\infty$$

而 $M\delta\le M/(2M+1)<1/2$。取上确界即得压缩估计。 ■

这份证明实际用到的核心条件是：在球内存在 M，使 $|f(u)-f(v)|\le M|u-v|$。$f\in C^1(\mathbb{R})$ 通过中值定理给出这样的局部 Lipschitz 常数，是方便且容易核验的充分条件；如果能直接证明 Lipschitz 不等式，即使 f' 不存在，压缩论证仍可沿用。

常数的选法留有余量。取 $R=|a|+2$，使初值距离球边界至少有 2；再让 $\delta_0L_1<1$、$\delta_0L_2<1$，两段积分各自消耗不到一单位，合计仍留在球内。取 $\delta\le(2M+1)^{-1}$ 则同时处理 $M=0$ 的情形，并保证 $M\delta<1/2$。这些具体数字不是最优值；它们的好处是每个参数都能直接从连续函数在紧区间上的最大值算出，并确定一个严格为正的时间长度。

■ **例 23.3**　对 $y'=y+1$，$y(0)=0$，按引理给出一个可用的解区间，并验证解 $y=e^x-1$。

解　此时 $R=2$，$L_1=2$、$L_2=1$、$M=1$，所以 $\delta_0=\min\{1,1/3,1/2\}=1/3$，$\delta=\min\{1/3,1/3\}=1/3$，压缩系数可取 $M\delta=1/3$。函数 $y=e^x-1$ 满足 $y'=e^x=y+1$ 且 $y(0)=0$，所以它是在 $(-1/3,1/3)$ 上的唯一解。 ♦

同一个右端也可写作 $f(y)=y+1$，$g(x)=0$。此时 $R=2$、$L_1=3$、$L_2=0$、$M=1$，从而 $\delta_0=1/4$、$\delta=1/4$、$q=1/4$。这给出较短的保证区间 $(-1/4,1/4)$，仍包含初值点且足以证明局部存在唯一。把常数项归入 f 还是 g 不会改变方程，只会改变这份粗略估计；定理只要求能找到一组有效的估计。

■ **例 23.4**　对 $y'=y^2$，$y(0)=0$，计算引理中的 δ 与压缩系数，并找出不动点。

解　这里 $R=2$、$L_1=4$、$L_2=0$、$M=4$。因此 $\delta_0=1/5$，$\delta=\min\{1/5,1/9\}=1/9$，压缩系数为 $4/9<1$。常函数 $y=0$ 满足 $T(y)=y$，因此它是唯一解。两个例子表明 δ 是一个保证结论成立的长度，不一定是最大的解区间。 ♦

再看一个非零初值：对 $y'=y^2$，$y(0)=1/2$，仍取 $R=|a|+2=5/2$。在 $[-R,R]$ 上，$|y^2|$ 最大为 $L_1=25/4$，$|2y|$ 最大为 $M=5$；$g=0$，所以 $L_2=0$。于是

$$\delta_0=\min\{1,4/29,1\}=4/29,\qquad \delta=\min\{4/29,1/11\}=1/11,\qquad q=M\delta=5/11.$$

显式解 $y=1/(2-x)$ 在 $x<2$ 上有定义，因此在定理给出的 $[-1/11,1/11]$ 上当然也有定义。这里定理只需给出一个可核验的短区间；显式解的定义域可以大得多。

对同一方程 $y'=y^2$ 改变初值，闭球和导数上界也会改变。如表 23.2 所示，三种初值按引理算出的可用半径不同，并且都小于或等于相应显式解的定义区间。

初值 a	R	可用 δ	$q=M\delta$	显式解及包含 0 的定义区间
0	2	1/9	4/9	0，$\mathbb{R}$
1/2	5/2	1/11	5/11	$1/(2-x)$，$(-\infty,2)$
1	3	1/13	6/13	$1/(1-x)$，$(-\infty,1)$

表 23.2　同一方程在不同初值下的局部保证长度与显式定义区间。

这些 δ 是方便证明的下界，不是最大延拓半径。以 $a=1$ 为例，压缩引理只给出 $(-1/13,1/13)$，显式解却在整个 $(-\infty,1)$ 上有限；以 $a=0$ 为例，唯一解恒为零，也可在全轴定义。能否延伸到更远处取决于解本身是否保持有限，不能由局部定理的半径单独判断。定理中的时间窗关于初值点对称，是估计上的便利；最大定义区间未必对称。$y'=y^2$，$y(0)=1$ 的最大区间是 $(-\infty,1)$，解向左可延伸任意远，向右却在有限点爆破。

方法：积分算子　要证明初值问题有局部解，先把它写成 $T(y)=y$；再找一个闭球和一个短区间，使 T 自映且压缩。完备性给出存在，压缩不等式给出唯一。

23.4　Picard–Lindelof 定理：局部存在且唯一

现在把前两节的步骤合起来。右端只允许有两种依赖：f 作用在未知值 $y(x)$ 上，g 直接依赖自变量 x。这正是原课程考虑的方程类型。

先补出原 Lecture 23 使用的一个初等引理，把每一点附近的唯一性延伸到整个区间。

引理 23.4（局部相等推出整段相等）　设 u_1,u_2 在区间 I 上连续，且 $u_1(x_0)=u_2(x_0)$。若每个满足 $u_1(x)=u_2(x)$ 的 $x\in I$ 都有 $\eta>0$，使两函数在 $I\cap(x-\eta,x+\eta)$ 上相等，则 $u_1=u_2$ 在整个 I 上成立。

证明　先固定任意 $b\in I$、$b>x_0$，只考察有界闭区间 $[x_0,b]\subseteq I$。令

$$J=\{z\in[x_0,b]:u_1(t)=u_2(t)\ \text{对所有}t\in[x_0,z]\ \text{成立}\}.$$

因为 $x_0 \in J$，且 b 是上界，$c = \sup J$ 存在，满足 $x_0 \le c \le b$。若 $x_0 \le t < c$，上确界的逼近性质给出 $z \in J$ 使 $t < z$，故 $u_1(t) = u_2(t)$。当 $c > x_0$ 时由左侧连续性得 $u_1(c) = u_2(c)$；当 $c = x_0$ 时这由假设给出。因此两函数在 $[x_0, c]$ 上相等，即 $c \in J$。

若 $c < b$，在 c 处取假设给出的 $\eta > 0$，并令 $d = c + \min\{\eta/2, (b-c)/2\}$。则 $c < d \le b$，两函数在 $[c, d]$ 上仍相等。结合 $[x_0, c]$ 上的相等，得到 $d \in J$，与 c 为上界矛盾。所以 $c = b$，两函数在 $[x_0, b]$ 上相等。

再固定 $b \in I$、$b < x_0$。在反射区间 $I^* = \{2x_0 - x : x \in I\}$ 上定义 $v_i(t) = u_i(2x_0 - t)$。这两函数连续，在 x_0 相等，并满足同样的局部相等假设。因为 $2x_0 - b > x_0$，刚证明的向右结论说明它们在 $[x_0, 2x_0 - b]$ 上相等；换回原变量，u_1, u_2 在 $[b, x_0]$ 上相等。$b = x_0$ 时由假设成立。任意目标点都已包括，故 $u_1 = u_2$ 在整个 I 上成立。证明不要求 I 有界，也不要求它包含自身端点。 ■

定理 23.5 （Picard–Lindelof 定理）　设 $f \in C^1(\mathbb{R})$、$g \in C(\mathbb{R})$，且 $a \in \mathbb{R}$。则存在 $\delta > 0$，使初值问题

$$y'(x) = f(y(x)) + g(x), \qquad y(0) = a$$

在 $(-\delta, \delta)$ 上有解。若 y_1, y_2 是定义在包含 0 的区间上的任意两个解，则它们在定义域的公共区间上相同。

直观理解　函数 y 是一条曲线，而积分算子把曲线送到「初值加累计变化量」。小区间限制累计变化量；f' 有界则控制不同曲线的速度差。两者合起来让更新算子收敛到一条曲线，这条曲线正是微分方程的解。

思路　存在性直接在闭球上用压缩映射定理。唯一性先在任一相交点附近重新应用同一压缩估计，再用引理 23.4 把局部相等延伸到公共区间。

证明　**存在性**。按引理 23.3 取 R, δ。闭球 $B_R(0)$ 是完备空间 $X = C([-\delta, \delta])$ 的闭子集；T 把它映入自身并且是压缩映射。压缩映射定理给出不动点 y_*。由命题 23.2，y_* 在 $(-\delta, \delta)$ 上可微且满足所给初值问题。

唯一性。设 I 是 y_1, y_2 定义域的公共开区间。它包含 0，且 $y_1(0) = y_2(0) = a$。下面验证引理 23.4 的局部相等条件。

任取满足 $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ 的 $x_0 \in I$，记共同值为 c。平移自变量后，$u_i(t) = y_i(x_0 + t)$ 满足

$$u_i'(t) = f(u_i(t)) + g(x_0 + t), \qquad u_i(0) = c$$

右端的 $g(x_0 + t)$ 仍连续。由 I 为开区间及两解连续，可取 $\eta > 0$，使 $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subseteq I$，且 $|u_i(t)| \le |c| + 1 < |c| + 2$ 对 $|t| \le \eta$ 成立。把引理 23.3 应用于初值 c 和外力 $g(x_0 + \cdot)$，再将 η 缩小到该引理给出的半径以内。将相应的积分算子限制到 $[-\eta, \eta]$ 后，原来的自映射与压缩估计仍成立；u_1, u_2 是同一闭球上同一压缩算子的两个不动点，故在这里相同。

因此两解在每个相等点附近都相等。由引理 23.4，它们在整个公共区间 I 上相同。 ■

定理把初值点写成 0 只是为了简化记号。若初值在 x_0，令 $u(t)=y(x_0+t)$，则

$$u'(t)=f(u(t))+g(x_0+t),\qquad u(0)=y(x_0).$$

平移后外力仍连续；引理中的 L_2 改为在 $[x_0-1,x_0+1]$ 上取最大值，其他步骤不变。因此同一局部论证适用于任意初始时刻，也正是前面在相等点附近重新应用引理的理由。

唯一性证明没有假定 I 有界，也没有要求一个统一的邻域长度适用于每一点。每个相等点附近都有自己的小区间；初等引理只在初值点与任意目标点之间取上确界，用连续性处理上确界处，再用局部相等排除中途停止。对整个紧区间做估计时，也可以像后面的习题集 9 证明那样，利用共同上界选出适用于每一步的固定长度。

■ **例 23.5**　验证 $y(x)=1/(2-x)$ 是否解 $y'=y^2$，$y(0)=1/2$，并说明定理给出的唯一性范围。

解　在 $x<2$ 时，$y'(x)=1/(2-x)^2=y(x)^2$，且 $y(0)=1/2$。因此它在 $(-\infty,2)$ 上是解；定理说明任何另一个解都必须在二者的公共定义区间内与它相同。特别地，它在闭区间 $[0,1]$ 上连续，取值从 $1/2$ 增至 1。 ♦

图 23.2 标出这条解曲线在 $x=0$、$x=1$ 的取值。图形展示了唯一解在 $[0,1]$ 上的变化，但定理本身的存在结论只要求某个开邻域。

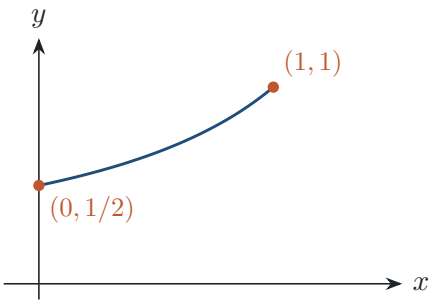


图 23.2　$y=1/(2-x)$ 满足 $y'=y^2$、$y(0)=1/2$，并在 $[0,1]$ 上从 $1/2$ 增至 1。

23.5　条件决定唯一性，也决定解能走多远

$f\in C^1(\mathbb{R})$ 的作用是让 f 在每个有界值域上满足 Lipschitz 估计；$g\in C(\mathbb{R})$ 则保证积分算子有连续输出，并且局部有界。把前一条件降为「f 连续」，存在性有时仍成立，但唯一性会失败。

■ **例 23.6**　在 $(-1,1)$ 上比较 $y_0(x)=0$ 与 $y_1(x)=\max\{x,0\}^2$。它们是否都是 $y'=2\sqrt{|y|}$，$y(0)=0$ 的解？

解　当 $x<0$ 时，$y_1=0$ 且 $y_1'=0$；当 $x>0$ 时，$y_1=x^2$ 且 $y_1'=2x=2\sqrt{|y_1|}$。在 $x=0$ 左右导数都为 0，所以 y_1 在整个区间可微并满足方程。零函数也满足方程，二者都取初值 0，却在 $x>0$ 不同。这里 $f(u)=2\sqrt{|u|}$ 连续，但在 $u=0$ 不可微。 ♦

这并非偶然：对任意 $c\ge 0$，延迟函数 $y_c(x)=\max\{x-c,0\}^2$ 也满足同一方程和初值。函数可以先在 0 停留一段时间，再开始增长；所以仅有连续性无法排除多解。其失去 Lipschitz 控制

可以直接用差商看出：对 $h>0$，

$$\frac{|f(h)-f(0)|}{|h-0|}=\frac{2\sqrt{h}}{h}=\frac{2}{\sqrt{h}}\longrightarrow\infty\qquad(h\downarrow 0).$$

因此任何包含 0 的邻域里都不存在有限的 Lipschitz 常数；这正好使压缩证明中的统一差值上界失效。

易错提醒　把「f 连续」当成唯一性的充分条件会出错。上例的 $f(u)=2\sqrt{|u|}$ 连续，却有零解和 $\max\{x,0\}^2$ 两个不同解；C^1 条件提供了局部 Lipschitz 控制，不能在证明中随意删掉。

■ **例 23.7**　**不光滑但仍满足 Lipschitz 条件**　对 $y'=|y|$，$y(0)=0$，说明 $f(y)=|y|$ 虽在 0 不可微，为什么压缩论证仍能给出唯一解。

解　对任意实数 u,v，反三角不等式给出

$$\big||u|-|v|\big|\le|u-v|.$$

所以 $f(y)=|y|$ 在整个实轴上 Lipschitz，常数可取 $M=1$。构造 Picard 算子时，选足够短的区间即可使其成为压缩映射；零函数满足 $T(0)=0$，故是唯一不动点，也就是该初值问题的唯一局部解。这个例子说明证明依赖的是 Lipschitz 控制，而 C^1 只是获得该控制的一种方便假设。　♦

若外力 g 不连续，连解的存在都可能失效。

■ **例 23.8**　令 $f(y)=0$，并令 $g(x)=0$ $(x<0)$、$g(x)=1$ $(x\ge0)$。初值问题 $y'=g(x)$，$y(0)=0$ 在 0 的任何邻域内有可微解吗?

解　若存在解，则在 $x<0$ 它的导数恒为 0，故由中值定理它在左半邻域为常数；连续性和 $y(0)=0$ 迫使这个常数为 0。在 $x>0$ 导数恒为 1，同理 $y(x)=x$。于是左导数为 0、右导数为 1，y 在 0 不可微，矛盾。这里 f 仍是 C^1，失败来自 g 在初值点不连续。　♦

分段积分会强迫任何候选解具有形式 $y(x)=0$ $(x\le0)$、$y(x)=x$ $(x\ge0)$。这条曲线连续，但在 0 只有左右导数，且左右导数不相等；因此连续性本身无法替代微分方程所要求的可微性。跳跃恰好发生在初值点，故无论把邻域取得多小，矛盾都会保留。

习题集 9 第 5 题把同一思路用于 $y'=y^2$。设 y_1,y_2 是 $[0,1]$ 上的两个解，并令

$$K=\max_{0\le x\le1}\max\{|y_1(x)|,|y_2(x)|\}$$

连续性保证 $K<\infty$。若两解在 x_0 相等，则在长度至多为 b 的右邻域 $J=[x_0,x_0+b]$ 内，积分方程给出

$$|y_1(x)-y_2(x)|\le\int_{x_0}^{x}|y_1(t)^2-y_2(t)^2|\,\mathrm{d}t\le 2Kb\max_{t\in J}|y_1(t)-y_2(t)|.$$

取 $b=\min\{1/2,1/(2K+1)\}$，则 $2Kb<1$。对 $x\in J$ 取最大值，得到 $D\le 2KbD$，其中 $D=\max_J|y_1-y_2|$，故 $D=0$。从 $x_0=0$ 开始，每次推进不超过 b；有限次即可覆盖 $[0,1]$，所以两解处处相同。这正是「局部唯一性加连通区间」的定量版本。

这里的 K 要同时控制两条解的全部取值，因而选在完整的 $[0,1]$ 上；连续性和闭区间紧致性保证这样的有限 K 存在。步长 b 随 K 增大而缩短，却总是正数。取 N 为满足 $Nb \geq 1$ 的最小正整数，就能用不超过 N 段长度至多为 b 的区间走到 1。这一步说明局部的差值估计如何拼成整段唯一性。

分解 $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$ 正是 Lipschitz 估计的来源：在 $[-K, K]$ 内，平方函数的导数绝对值不超过 $2K$。因此每个短段上两解之差至多被 $2Kb$ 倍自身的最大值控制；取 $2Kb < 1$ 后，只能是零。对于一般的 f，把 $2K$ 换成该值域上的 Lipschitz 常数 M，同样的推进论证仍成立。

例 23.9　习题集 9 第 5 题　设 y_1, y_2 都满足 $y_i(x) = a + \int_0^x y_i(t)^2 \, \mathrm{d}t$ $(0 \leq x \leq 1)$。证明 $y_1 = y_2$。

解　积分方程说明两函数可微且满足 $y_i' = y_i^2$、$y_i(0) = a$。在紧区间上取 $K = \max_{[0,1]} \max(|y_1|, |y_2|)$，再取 $b = \min\{1/2, 1/(2K+1)\}$。若已知 $y_1(x_0) = y_2(x_0)$，同上估计得到 $D \leq 2KbD$，而 $2Kb < 1$，所以它们在下一个长度至多为 b 的小区间相同。从 0 起有限次推进到 1，即得 $y_1 = y_2$。这也说明原题要求「连续且满足积分方程」足以启动微积分基本定理。 ♦

想一想　Picard–Lindelof 定理能否保证解在整条实轴上存在？

答　不能。$y' = y^2$，$y(0) = 1$ 的解是 $y = 1/(1-x)$，当 $x \to 1^-$ 时无界，因此不能延伸到 $x = 1$。定理保证某个邻域内存在；唯一性则比较两解实际共有的区间。

23.6　幂级数也能构造常微分方程的解

第 22 讲证明了幂级数在收敛区间内可以逐项求导。习题集 10 第 1 题用这一点，不先猜闭式就能验证一个由级数给出的函数满足微分方程。

还可以反过来从系数找级数。若在某个收敛区间内设 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，代入 $y' = 2xy$ 并比较系数，得到

$$a_1 = 0, \qquad (n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

给定初值 $a_0 = y(0) = 1$ 后，递推先给出 $a_2 = 1$、$a_4 = 1/2$、$a_6 = 1/6$，所有奇数次系数均为零；一般地 $a_{2n} = 1/n!$。固定 $x \neq 0$ 后，相邻非零项的比值为 $x^2/(n+1) \to 0$；$x = 0$ 时级数值为 1。所以所得幂级数对任意实数收敛。下面的例题从级数出发，直接验证微分方程，不依赖这个猜系数过程。

例 23.10　习题集 10 第 1 题　令 $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/n!$。不先求它的闭式，证明它是 $y' = 2xy$，$y(0) = 1$ 在全实轴上的解，并证明任意同初值解都与它在公共区间上相同。

解　比值判别法给出任意实数处的收敛，半径为 $+\infty$；第 22 讲的逐项求导定理因而适用于每个有限区间。逐项求导并令 $m = n - 1$：

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n x^{2n-1}}{n!} = 2x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!} = 2x\phi(x)$$

又 $\phi(0)=1$，所以 ϕ 解 $y'=2xy,\ y(0)=1$。级数的每项在实数 x 处都非负，零次项为 1，因此 $\phi(x)\geq 1$。设 y 是包含 0 的区间 I 上的任意同初值解，则 y/ϕ 有定义且可导，并且

$$\left(\frac{y}{\phi}\right)'=\frac{y'\phi-y\phi'}{\phi^2}=\frac{2xy\phi-y\,2x\phi}{\phi^2}=0.$$

对任意 $x\in I$，在 0 与 x 之间用中值定理，得到 $y(x)/\phi(x)=y(0)/\phi(0)=1$，故 $y=\phi$ 在 I 上成立。这个商法直接给出唯一性；$2xy$ 不能写成前述固定的 $f(y)+g(x)$ 形式，因而这里不能靠在该定理中取 $f=0, g(x)=2x$ 来证明。级数在全实轴上收敛且满足方程，所以它给出全局解。 ♦

本讲小结

- 一阶方程如 $y'=f(y)+g(x)$ 给出导数与函数值之间的关系；初值问题还指定 $y(0)=a$。检验解时须同时核对方程和初值。
- 当右端连续时，微分方程连同初值等价于积分方程。把积分方程写成 $T(y)=y$，便能在函数空间中寻找解。
- 在 $X=C([-\delta,\delta])$ 的上确界范数下，闭球完备；压缩估计 $d(Tu,Tv)\leq qd(u,v)$ 控制函数列迭代，其中 $q<1$。
- 取 $R=|a|+2$，先限制积分长度保证自映射，再缩短区间使压缩系数 $M\delta<1/2$；压缩映射定理给出局部存在和不动点唯一。
- Picard–Lindelof 定理在 $f\in C^1(\mathbb{R})$、$g\in C(\mathbb{R})$ 时保证局部解存在；任意两解在公共区间上相同。它不保证解能延伸到整条实轴。
- $y'=2\sqrt{|y|}$ 可有多个同初值解；$y'=g(x)$ 的跳跃外力也可能使初值点无解。局部 Lipschitz 控制和 g 的连续性分别进入压缩估计与积分方程的可微性。
- 幂级数 $\phi(x)=\sum_{n\geq 0}x^{2n}/n!$ 在全实轴上满足 $\phi'=2x\phi$、$\phi(0)=1$；由 $\phi\geq 1$ 及 $(y/\phi)'=0$，任意同初值解都在其区间上等于 ϕ。

练习

23.1 ★ 求初值问题 $y'=1,\ y(0)=a$ 的解，并说明只满足微分方程而不满足初值的函数是否算该初值问题的解。

23.2 ★ 把 $y'=y+1,\ y(0)=0$ 写成积分方程。验证 e^x-1 满足该方程，说明积分形式为何也能反推出微分方程。

23.3 ★★ 对 $y'=y,\ y(0)=1$，令 $y_0(x)=1$ 并定义 $y_{n+1}=T(y_n)$。求 y_1,y_2,y_3，再计算它们在 $x=1/4$ 的值。

23.4 ★★ 用引理分别估计 $y'=y+1,\ y(0)=0$（取 $f(y)=y,\ g(x)=1$）和 $y'=y,\ y(0)=1$ 的 $R,L_1,L_2,M,\delta_0,\delta$ 与压缩系数，并检验各自的显式解。

23.5 ★★ 解初值问题 $y'=y^2,\ y(0)=1$，确定其包含 0 的最大定义区间，并说明它与局部存在定理的结论有何关系。

23.6 ★★ 对 $y'=2\sqrt{|y|},\ y(0)=0$，验证 $y_0(x)=0$ 和 $y_{1/2}(x)=\max\{x-1/2,0\}^2$ 在 $(-1,1)$

上都是解。它们为何不违反 Picard–Lindelof 定理？

23.7 ★★ 设 $g(x)=0$（$x<0$）、$g(x)=1$（$x\ge 0$）。证明 $y'=g(x)$，$y(0)=0$ 在 0 的任何邻域内都没有可微解。

23.8 ★★★ 设连续函数 y_1,y_2 满足 $y_i(x)=a+\int_0^x y_i(t)^2\,\mathrm{d}t$，$0\le x\le 1$。用有限步推进证明 $y_1=y_2$。

23.9 ★★ 令 $\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}/n!$。不求闭式，证明 $\phi'=2x\phi$、$\phi(0)=1$，说明解在何处存在，再用商的导数证明同初值解的唯一性。

23.10 ★★ 把初值点移到 $x=1$：求解 $y'=y^2$，$y(1)=1/2$，并用平移变量说明局部存在唯一性如何应用。

练习答案与提示

23.1 由 $(y-x)'=0$，每个解都形如 $y=x+C$。条件 $y(0)=a$ 强制 $C=a$，所以唯一候选是 $y=x+a$。例如 $y=x+a+1$ 虽满足微分方程，却在 0 处取值 $a+1$，不是该初值问题的解。解的定义同时包含方程与初值两项。

23.2 积分形式为

$$y(x)=\int_0^x (y(s)+1)\,\mathrm{d}s.$$

函数 e^x-1 在 0 取值 0，且

$$\int_0^x (e^s-1+1)\,\mathrm{d}s=\int_0^x e^s\,\mathrm{d}s=e^x-1.$$

反过来，若连续函数满足积分式，被积函数 $y(s)+1$ 连续；微积分基本定理给出 $y'=y+1$，代入 $x=0$ 得到初值。因此积分方程与初值问题等价。

23.3 由 $T(y)(x)=1+\int_0^x y(s)\,\mathrm{d}s$，逐次得到

$$y_1=1+x,\qquad y_2=1+x+\frac{x^2}{2},\qquad y_3=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}.$$

在 $x=1/4$ 时三值依次为 $5/4$、$41/32$、$493/384$；起始值 $y_0(1/4)=1$。这些是指数级数的部分和，项数增加后趋于不动点。其逐步改进也能由压缩估计控制，不需要先知道闭式解。

23.4 对 $f(y)=y, g=1, a=0$，$R=2$、$L_1=2$、$L_2=1$、$M=1$，故 $\delta_0=1/3$、$\delta=1/3$、$q=M\delta=1/3$；e^x-1 满足方程和初值。对 $f(y)=y, g=0, a=1$，$R=3$、$L_1=3$、$L_2=0$、$M=1$，故 $\delta_0=1/4$、$\delta=1/4$、$q=1/4$；e^x 是解。两个 δ 都是定理证明保证可用的区间半径，不必是显式解的最大定义范围。

23.5 直接求导可验证 $y(x)=1/(1-x)$：其导数和平方都等于 $(1-x)^{-2}$，且 $y(0)=1$。分母在 $x<1$ 不为零，所以它在 $(-\infty,1)$ 上有定义；当 $x\to 1^-$，函数无界，不能以有限连续值延到 1。定理只保证初值附近有解，并不排除有限时间爆破。

23.6 当 $x\le 1/2$ 时，$y_{1/2}=0$、导数为 0；当 $x>1/2$ 时，$y_{1/2}=(x-1/2)^2$、导数为 $2(x-1/2)=2\sqrt{|y_{1/2}|}$。在接点 $x=1/2$ 两侧导数均为 0，且初值为 0。零函数也满足方程，所以二者不同。函数 $f(u)=2\sqrt{|u|}$ 在 0 连续但不满足局部 Lipschitz 条件，Picard–Lindelof 的 C^1 假设不成立。

23.7 假设有可微解。对 $x<0$，$y'=0$，中值定理说明 y 在左半邻域为常数；连续性和 $y(0)=0$ 迫使该常数为 0。对 $x>0$，$y'=1$，故 $y(x)=x+C$；由连续性在 0 取值为 0 得 $C=0$。因此左导数为 0、右导数为 1，与 y 在 0 可微矛盾。

23.8 由积分形式与微积分基本定理，$y_i' = y_i^2$ 且 $y_i(0) = a$。令 $K = \max_{[0,1]} \max(|y_1|, |y_2|)$，它有限；再取 $b = \min\{1/2, 1/(2K+1)\}$，则 $2Kb < 1$。若两解在 x_0 相等，在任一长度不超过 b 的区间 $J = [x_0, x_0 + b]$ 上，令 $D = \max_J |y_1 - y_2|$，则

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\,|y_1(t) + y_2(t)|\,\mathrm{d}t \le 2KbD.$$

取最大值得 $D \le 2KbD$，只能有 $D = 0$。从 $x_0 = 0$ 起，以长度至多 b 的有限个区间覆盖 $[0,1]$，逐段推进即得两解相同。

23.9 比值判别法给出该级数对每个实数 x 收敛，故半径为 $+\infty$，逐项求导合法：

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n x^{2n-1}}{n!} = 2x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!} = 2x\phi(x),$$

其中 $m = n - 1$；同时 $\phi(0) = 1$。每项非负且零次项为 1，故 $\phi(x) \ge 1$。若 y 是区间 I 上的同初值解，则

$$(y/\phi)' = (y'\phi - y\phi')/\phi^2 = (2xy\phi - y\,2x\phi)/\phi^2 = 0.$$

中值定理说明 y/ϕ 在 I 上为常数，初值使该常数等于 1，所以 $y = \phi$。级数对全体实数收敛并可逐项求导，因而给出全实轴上的唯一解；这里的唯一性由商法证明。

23.10 令 $t = x - 1$、$u(t) = y(1+t)$，则 $u' = u^2$、$u(0) = 1/2$。函数 $u(t) = 1/(2-t)$ 满足该方程与初值，回到 x 变量得到 $y(x) = 1/(3-x)$，在 $x < 3$ 上有定义。平移后的右端仍连续，且 $f(u) = u^2$ 仍为 C^1，故定理在 $t = 0$ 给出局部存在唯一；任何另一解都在公共区间上与此解相同。

用引理计算，$R = 5/2$、$L_1 = 25/4$、$L_2 = 0$、$M = 5$，所以 $\delta_0 = 4/29$、$\delta = 1/11$、压缩系数 $q = 5/11$。这保证以 $x = 1$ 为中心的区间 $(10/11, 12/11)$ 上存在唯一解。显式解的定义区间更大：$x \to 3^-$ 时 $y(x) \to +\infty$，无法取有限连续值延到 3；公共区间唯一性又迫使其他解在 $x < 3$ 与它相同。因此它不能延伸为包含 3 的解，最大区间确为 $(-\infty, 3)$。

复习课 2

期末复习：度量空间、微分、积分与一致收敛

Final Review: Metric Spaces, Differentiation, Integration and Uniform Convergence

对应材料：MIT 18.100B 期末复习材料（Review for the Final）；Lecture 12–23 讲义；习题集 6–10。

本讲目标

(1) 把第 12–23 讲串成一条线：度量空间和紧性提供语言与工具，微分和积分在 $\mathbb{R}$ 上展开，一致收敛处理「极限能否交换」，最后用 $C([a,b])$ 的完备性证明 Picard–Lindelöf 定理。

(2) 对每个核心定理，能准确写出条件，用一两句话说出证明的关键一步，并知道去掉某个条件后的反例。

(3) 熟悉期末常见题型：判断开、闭、紧；用中值定理证不等式；用 L'Hôpital 法则和 Taylor 公式求极限、做误差估计；用上下和判断可积；判断一致收敛并逐项求导、逐项积分；做 Picard 迭代。

(4) 阅读压缩版结论时，能补全中值定理、L'Hôpital 法则和逐项运算所需的条件。

复习课 1 覆盖了实数、数列、级数和连续函数。期末考试的范围是第 12–23 讲，但它处处用到前半学期的结论：Bolzano–Weierstrass 定理、柯西列、最值定理、幂级数的收敛半径。本讲不重新证明各个定理，只给出证明的关键一步；需要完整证明时请回到对应的讲。

R2.1 知识地图

图 R2.1 按主题把后半学期的内容排成四行。同一行内的箭头表示「前一个结论用来证明后一个」；行与行之间的橙色虚线标出三处跨主题的依赖，它们正是期末题目最喜欢考的连接点。

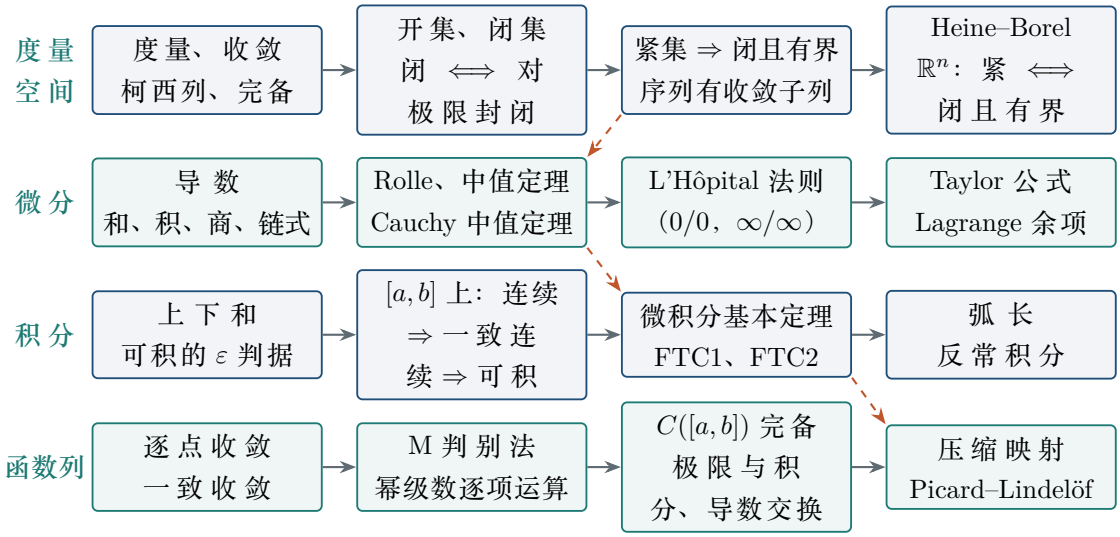


图 R2.1　后半学期的知识地图。橙色虚线：紧集上的最值定理给出 Rolle 定理；中值定理给出 FTC2；微积分基本定理把微分方程变成积分方程，Picard–Lindelöf 定理的证明就在积分方程上进行。「连续 ⇒ 一致连续」的证明也用到紧性（Bolzano–Weierstrass 定理）。

表 R2.1 把主要概念的定义和典型用法放在一起。复习时可以遮住中间一列，看自己能否默写定义。

概念	定义	典型用法
度量空间	$d\ge 0$，$d(x,y)=0 \iff x=y$；对称；三角不等式	$\mathbb{R}^n$、$C([a,b])$ 用同一套语言
柯西列、完备	$\forall\varepsilon\,\exists N$，$m,n\ge N\Rightarrow d(x_m,x_n)<\varepsilon$；完备即柯西列都收敛	不知道极限是什么时证明收敛
开集、闭集	开：每点有球 $B_r(x)\subseteq U$；闭：补集是开集	闭 ⟺ 收敛列的极限仍在集合中
紧集	每个开覆盖都有有限子覆盖	紧 ⇒ 闭、有界、序列有收敛子列
导数、中值定理	差商极限；$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$，$c\in(a,b)$	可导推出连续；证不等式与单调性
Taylor 公式	$f(b)=P_{k-1}(b)+\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-a)^k$	误差估计、求极限
一致连续、可积	同一个 δ 控制所有 x,y；$U(f,P)-L(f,P)\to 0$	闭区间连续函数可积
FTC、反常积分	$\left(\int_a^x f\right)'=f(x)$；反常积分取截断极限	算积分、判定 p-型积分
一致收敛、M 判别	同一 N 控制所有 x；$\lvert u_n(x)\rvert\le M_n$ 且 $\sum M_n<\infty$	保连续、换积分、控制级数尾项
幂级数	$R=1/\limsup\lvert a_n\rvert^{1/n}$	在 $[-L,L]$（$L<R$）上一致收敛，可逐项求导、积分
压缩映射	$d(Tx,Ty)\le c\,d(x,y)$，$0\le c<1$	完备空间中有唯一不动点

表 R2.1　概念—定义—典型用法总表

R2.2　核心结论回顾

本节按主题列出必须掌握的定理。每个定理后面的「关键」一句话是证明的核心步骤，「用法」是一个典型应用。

R2.2.1 度量空间、开集与闭集（第 12–13 讲）

定理（开集与闭集的运算）　设 (X,d) 是度量空间。

(1) 任意多个开集的并是开集；有限个开集的交是开集。

(2) 任意多个闭集的交是闭集；有限个闭集的并是闭集。

(3) $C\subseteq X$ 是闭集，当且仅当：只要 $x_n\in C$ 且 $x_n\to x$，就有 $x\in C$。

关键　有限交：x 在 $U_1,\dots,U_n$ 中各有半径 r_i 的球，取 $r=\min_i r_i>0$。有限个正数的最小值仍为正数，无穷多个就不一定了。闭集的两条由 De Morgan 律 $X\setminus\bigcap C_\alpha=\bigcup(X\setminus C_\alpha)$ 从开集得到。第 3 条的「$\Leftarrow$」用反证：若 $X\setminus C$ 不开，则有 $x\notin C$，使每个 $B_{1/n}(x)$ 都含 C 中的点 x_n，于是 $x_n\to x\notin C$。

用法　证明一个集合是闭集，最方便的往往是第 3 条：取收敛列，验证极限还在集合里。例如 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy\geq 1\}$：若 $x_ny_n\geq 1$ 且 $(x_n,y_n)\to(x,y)$，则 $x_ny_n\to xy$，所以 $xy\geq 1$。

另外三条基本事实：收敛列是柯西列（用 $\varepsilon/2$）；柯西列有界（取 $r=1+\max_{1\leq i\leq N}d(x_N,x_i)$，其中 N 使尾项两两距离小于 1）；开球 $B_r(x)$ 是开集（对 $y\in B_r(x)$ 取 $s=r-d(x,y)$），闭球 $\{y\mid d(x,y)\leq r\}$ 是闭集。

R2.2.2 紧性（第 13–14 讲）

定理（紧集的性质）　设 (X,d) 是度量空间，$K\subseteq X$ 是紧集。

(1) K 是闭集，并且有界。

(2) K 的闭子集是紧集。

(3) K 中的每个序列都有子列收敛到 K 中的某一点。

(4)（Heine–Borel）对 $A\subseteq\mathbb{R}^n$，A 紧 $\iff$ A 闭且有界；特别地 $[a,b]^n$ 是紧集。

关键　(1) 闭：对 $x\notin K$，开集 $O_n=\{y\mid d(x,y)>1/n\}$ 覆盖 K，有限子覆盖中下标最大的一个 O_N 已经包含 K，于是 $B_{1/N}(x)\cap K=\varnothing$。有界：用球 $B_1(y)$，$y\in K$ 覆盖 K。(2) 把开集 $X\setminus C$ 加进 C 的开覆盖，就得到 K 的开覆盖。(3) 嵌套的非空闭集与紧集之交非空；用半径趋于 0 的嵌套闭球逐步缩小范围。(4) 闭方体逐次二分，用实数的完备性。

用法　反方向在一般度量空间中不成立：$C([0,1])$ 中的闭单位球闭且有界，但第 14 讲的折线函数 f_n 两两距离为 1，没有收敛子列，所以不紧。

R2.2.3 导数、中值定理与 Taylor 公式（第 15–17 讲）

定理（中值定理）　设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

(1)（Rolle）若 $f(a)=f(b)$，则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$。

(2)（Lagrange）存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$。

(3)（Cauchy）存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)\,[g(b)-g(a)]=g'(c)\,[f(b)-f(a)]$。

关键　Rolle：$[a,b]$ 紧，f 取到最大值和最小值；若都在端点取到，f 是常数；否则在内部取到极值，那里 $f'=0$。Lagrange 和 Cauchy 都是对辅助函数用 Rolle：

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\qquad h(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)],$$

其中 $\varphi(a)=\varphi(b)=f(a)$，$h(a)=h(b)=f(a)g(b)-g(a)f(b)$。

用法　若 $|f'|\le M$，则 $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$，所以 f 一致连续。若在 (a,b) 内 $f'>0$，则 f 在 $[a,b]$ 上严格递增（习题集 8 第 3 题）。Cauchy 结论本身是乘积等式；要化成导数商，还需确认所选点的 $g'(c)\neq0$，且端点差 $g(b)-g(a)\neq0$。

定理（L'Hôpital 法则）　设 f,g 在 (a,b) 内可导，且在该区间内 $g(x)\neq0$、$g'(x)\neq0$。假设 $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$，或者二者都趋于 $+\infty$。若 $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为实数或 $\pm\infty$），则 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$。$x\to b^-$ 的情形相同。

关键　0/0 型：补充定义 $f(a)=g(a)=0$，在 $[a,x]$ 上用 Cauchy 中值定理，$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$，$c_x\in(a,x)$，$x\to a^+$ 时 $c_x\to a^+$。$g(x)\neq0$ 是自动的：$g(x)=g(x)-g(a)=g'(\xi)(x-a)\neq0$。$\infty/\infty$ 型：先取 $x_1=a+\delta$，使 (a,x_1) 上 f'/g' 接近 A；在 $[x,x_1]$ 上用 Cauchy 中值定理，再把 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 写成 $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\big(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\big)+\frac{f(x_1)}{g(x)}$，令 $g(x)\to\infty$。

定理（带 Lagrange 余项的 Taylor 公式）　设 $k\ge1$，$f,f',\dots,f^{(k-1)}$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(k)}$ 在 (a,b) 内存在。则存在 $c\in(a,b)$，使

$$f(b)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i+\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-a)^k.$$

关键　记右边的多项式部分为 P_{k-1}。取常数 M 使 $R(x)=f(x)-P_{k-1}(x)-\frac{M}{k!}(x-a)^k$ 满足 $R(b)=0$。由于 $R(a)=R'(a)=\cdots=R^{(k-1)}(a)=0$，对 R 在 $[a,b]$ 上用 Rolle 得 c_1，对 R' 在 $[a,c_1]$ 上用 Rolle 得 c_2……共 k 次，得到 $R^{(k)}(c_k)=f^{(k)}(c_k)-M=0$。

用法　对 $f=e^x$，$a=0$：$|e^x-P_{k-1}(x)|\le\frac{e^{|x|}|x|^k}{k!}$。反过来，$f(x)=e^{-1/x^2}$（$x>0$），$f(x)=0$（$x\le0$）在 0 处各阶导数都是 0，各阶 Taylor 多项式都是 0，而 $f\not\equiv0$：无穷次可导不等于能用 Taylor 级数表示。

R2.2.4 Riemann 积分（第 17–20 讲）

定理（Riemann 可积性与积分运算）　设 f 在 $[a,b]$ 上有界。

(1) 若 P_2 是 P_1 的加细，则 $L(f,P_1)\le L(f,P_2)\le U(f,P_2)\le U(f,P_1)$；对任意两个分划 P,Q，$L(f,P)\le U(f,Q)$。

(2) $f\in\mathcal{R}([a,b])$ 当且仅当：对每个 $\varepsilon>0$，存在分划 P 使 $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$。

(3) $[a,b]$ 上的连续函数一致连续，因而 $f\in\mathcal{R}([a,b])$。

(4) 若 $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ 且 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则积分对线性组合线性、对不等式保序、对相邻区间可加；并且 $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$。

关键　(1) 每加一个分点，只把一个小区间拆成两段，两段上的下确界都 $\ge$ 原来的 m_i；比较 P,Q 时用公共加细 $P\cup Q$。(2) 由下积分 $\le$ 上积分夹逼；反方向取 P_1,P_2 分别使上和、下和与上下积分相差不到 $\varepsilon/2$，再用 $P_1\cup P_2$。(3) 若不一致连续，有 $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ 而 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$；由 Bolzano–Weierstrass 定理取子列 $x_{n_k}\to x$，则 $y_{n_k}\to x$，与 f 在 x 连续矛盾。再取细度小于 δ 的分划（δ 对应 $\frac{\varepsilon}{b-a}$），每段上 $M_i-m_i<\frac{\varepsilon}{b-a}$，所以 $U-L<\varepsilon$。

用法　Dirichlet 函数（有理点取 0，无理点取 1）在 $[0,1]$ 上对任何分划都有 $L=0$、$U=1$，不可积。只在有限个点改变取值，不影响可积性和积分值（例 R2.5）。

定理（微积分基本定理）

(1)（FTC1）若 f 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$，则 F 在 (a,b) 上可导且 $F'=f$；在 a,b 处分别有右导数、左导数，仍等于对应的 f 值。

(2)（FTC2）若 F 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'=f\in\mathcal{R}([a,b])$，则 $\int_a^b f=F(b)-F(a)$。

关键　FTC1：对 $x\ne x_0$，差商 $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ 是 f 在两点间区间上的平均值，因而夹在该区间的最小值与最大值之间；x 从左侧或右侧趋于 x_0 时，两端都趋于 $f(x_0)$。FTC2：对任意分划，在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 上用中值定理，$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(c_i)\Delta x_i$，相加得 $L(f,P)\le F(b)-F(a)\le U(f,P)$。

用法　$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$；曲线 $s\mapsto(f(s),g(s))$（f',g' 连续）的弧长 $\int_a^b\sqrt{f'(s)^2+g'(s)^2}\,\mathrm{d}s$；$\arccos x=\int_x^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}$，把它写成 $\int_x^0+\int_0^1$，后一项是常数，由 FTC1 得 $(\arccos)'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$-1<x<1$。

反常积分有两种：区间无界时 $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$；$f$ 在 a 附近无界时 $\int_a^b f=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f$。$\int_1^\infty x^{-p}\,\mathrm{d}x$ 当且仅当 $p>1$ 时收敛，$\int_0^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x$ 当且仅当 $p<1$ 时收敛（例 R2.7）。

R2.2.5　一致收敛与幂级数（第 20–22 讲）

定理（一致收敛与极限交换）　设 f_n 是 $[a,b]$ 上的函数列。

(1) 若每个 f_n 连续且 $f_n \to f$ 一致收敛，则 f 连续。在 $C([a,b])$ 中，按距离 d 收敛等价于一致收敛，并且 $C([a,b])$ 完备。

(2) 若 $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ 且 $f_n \to f$ 一致收敛，则 $f \in \mathcal{R}([a,b])$，$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$。

(3) 若 f_n 可导，f_n' 连续，$f_n' \to g$ 一致收敛，且对某个 $x_0 \in [a,b]$ 有 $f_n(x_0) \to c$，则 f_n 一致收敛到一个可导函数 f，且 $f' = g$。

(4)（Weierstrass M 判别法）若 $|u_k(x)| \le M_k$ 对所有 x 成立，且 $\sum M_k$ 收敛，则 $\sum u_k$ 一致收敛。

关键　(1) $\varepsilon/3$ 估计：$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(y)| + |f_N(y)-f(y)|$，第一、三项由一致收敛控制，第二项由 f_N 的连续性控制。完备性：柯西列在每点给出实数柯西列，得到逐点极限，再证收敛是一致的。(2) $\left|\int f_n - \int f\right| \le (b-a)\, d(f_n, f)$。(3) 令 $f(x) = c + \int_{x_0}^x g$，由 FTC2，$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'$，所以 $|f(x)-f_n(x)| \le |c - f_n(x_0)| + (b-a)\, d(g, f_n')$；再由 FTC1 得 $f' = g$。(4) $\left|\sum_{k>m} u_k(x)\right| \le \sum_{k>m} M_k$，右边与 x 无关且趋于 0。

定理（幂级数逐项运算）　设 $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，$f(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$，且 $|x| < R$。当 $R = 0$ 或 $R = \infty$ 时按相应的退化情形理解。

(1) 对每个 $0 < L < R$，级数在 $[-L, L]$ 上一致收敛。

(2) 逐项求导所得的级数 $\sum_{n\ge k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ 收敛半径仍为 R，并且它等于 $f^{(k)}(x)$。

(3) 逐项积分：$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\ge 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$，$|x| < R$。

关键　(1) 取 α 使 $L/R < \alpha < 1$，则 n 充分大时 $|a_n x^n| \le \alpha^n$，用 M 判别法。(2) 乘上 n 或固定阶数的多项式因子不改变根值上极限；再对部分和使用「导数列一致收敛且一点收敛」的结论。端点 $|x| = R$ 不在这些结论内，须逐端点另查。

用法　$E(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径为 ∞，部分和满足 $E_n' = E_{n-1}$，所以 $E' = E$。

R2.2.6　常微分方程（第 22–23 讲）

定理（压缩映射原理）　设 (X,d) 是非空完备度量空间，$T : X \to X$ 满足 $d(Tx,Ty) \le c\, d(x,y)$，其中 $0 \le c < 1$。则 T 有唯一的不动点 x^*；对任意 $x_0 \in X$，$T^n x_0 \to x^*$，并且 $d(T^n x_0, x^*) \le \frac{c^n}{1-c}\, d(Tx_0, x_0)$。

定理（Picard–Lindelöf）　设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导，g 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$a \in \mathbb{R}$。则存在 $\delta > 0$ 和区间 I，使 $0 \in I \subset (-\delta, \delta)$，且初值问题 $y'(x) = f(y(x)) + g(x)$、$y(0) = a$ 有唯一解 $y : I \to \mathbb{R}$。

关键　压缩映射：$d(T^{n+1}x_0,T^nx_0)\le c^n d(Tx_0,x_0)$，几何级数求和说明 T^nx_0 是柯西列；若 x^*,y^* 都是不动点，则 $d(x^*,y^*)\le c\,d(x^*,y^*)$，只能为 0。Picard：由 FTC，$y$ 是解当且仅当 y 连续且

$$y=T(y),\qquad T(y)(x)=a+\int_0^x\big[f(y(s))+g(s)\big]\,\mathrm{d}s.$$

取 $R=|a|+2$，$L_1=\max_{|z|\le R}|f(z)|$，$L_2=\max_{|x|\le 1}|g(x)|$，$M=\max_{|z|\le R}|f'(z)|$，$\delta_0=\min\big(1,\frac{1}{L_1+1},\frac{1}{L_2+1}\big)$，$\delta=\min\big(\delta_0,\frac{1}{2M+1}\big)$。在 $C([-\delta,\delta])$ 的闭子集 $\{\,y\mid|y(x)|\le R\,\}$ 上，$|T(y)(x)|\le|a|+\delta L_1+\delta L_2\le|a|+2$，并由中值定理 $d(Ty_1,Ty_2)\le M\delta\,d(y_1,y_2)<\frac12 d(y_1,y_2)$。唯一性用「相等的点集取上确界」的论证（第 23 讲引理 1）。

核心思想　后半学期的大部分定理都在回答同一个问题：**两个极限过程能否交换次序**。导数是差商的极限，积分是上下和的极限，连续是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，函数列又有 $n\to\infty$。逐点收敛不足以交换次序，一致收敛（对积分、连续性）和「导数列一致收敛」（对导数）是期末最常用的充分条件。

R2.3　题型与例题

下面按题型给出例题。每题先写完整解答，再用「点评」指出思路。

R2.3.1　题型一：判断开、闭、紧与完备

■ **例 R2.1**　**判断开、闭、紧**　判断下列集合是否为开集、闭集、紧集：(1) $\mathbb{R}^2$ 中的 $S_1=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\,\}$；(2) $\mathbb{R}^2$ 中的 $S_2=\{\,(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\,\}$；(3) $\mathbb{R}^2$ 中的 $S_3=\{\,(x,y)\mid xy\ge 1\,\}$；(4) $\mathbb{R}$ 中的 $S_4=\{0\}\cup\{\,\frac1n\mid n\in\mathbb{N}\,\}$ 与 $S_5=\{\,\frac1n\mid n\in\mathbb{N}\,\}$。

解　(1) S_1 是闭球 $\{\,p\mid d(p,0)\le 2\,\}$，所以是闭集。它不是开集：$(2,0)\in S_1$，但对任何 $r>0$，球 $B_r((2,0))$ 含有点 $(2+\frac{r}{2},0)\notin S_1$。$S_1\subseteq B_3(0)$ 有界。由 Heine–Borel 定理，S_1 是紧集。

(2) $\{0\}$ 是闭集，所以 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 是开集；$S_2=B_1(0)\cap(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 是两个开集之交，是开集。它不是闭集：$p_n=(\frac{1}{2n},0)\in S_2$，$p_n\to(0,0)\notin S_2$。不闭，所以不紧。

(3) S_3 是闭集：若 $(x_n,y_n)\to(x,y)$ 且 $x_ny_n\ge 1$，连续性给出 $xy\ge 1$。它无界：$(n,1)\in S_3$，到原点的距离 $\ge n$。所以不紧。它也不是开集：$(1,1)\in S_3$，对任何 $r>0$，令 $t=\frac12\min(r,1)$，则 $(1-t,1)\in B_r((1,1))$，但 $(1-t)\cdot 1<1$。

(4) S_4 是紧集。直接用定义：设 $\{U_\alpha\}$ 是 S_4 的开覆盖，$0\in U_{\alpha_0}$，则有 $r>0$ 使 $B_r(0)\subseteq U_{\alpha_0}$。当 $n>1/r$ 时 $\frac1n\in B_r(0)$；剩下的点 $1,\frac12,\dots,\frac{1}{n_0}$（$n_0=\lfloor 1/r\rfloor$）只有有限个，各取一个包含它的 U_{α_k}。这有限个开集覆盖 S_4。S_5 不是闭集：$\frac1n\to 0\notin S_5$；因此 S_5 不紧。两者都不是开集：1 的每个邻域都含有不在集合中的点 $1+\frac{r}{2}$。 ♦

点评　先用必要条件排除：不闭或无界就一定不紧。在 $\mathbb{R}^n$ 中判断紧性用 Heine–Borel；离开 $\mathbb{R}^n$（例如在 $C([0,1])$ 中）只能回到定义或序列刻画。S_4 和 S_5 只差一个点，紧性完全由这个极限点决定。

R2.3.2 题型二：由导数控制函数值

例 R2.1 先使用闭集的序列刻画。接下来的两题分别训练「中值点随端点移动」和 Taylor 余项估计。

■ **例 R2.2　导数极限决定拼接点导数，改编自习题集 7 第 3 题**　设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，在 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上可导，且 $\lim_{x\to 0} f'(x)=L$。证明 f 在 0 可导且 $f'(0)=L$。

解　固定 $x\neq 0$，在以 $0,x$ 为端点的闭区间上用中值定理。存在 c_x 严格位于 0 与 x 之间，使

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c_x).$$

当 $x\to 0$ 时 $c_x\to 0$，故右侧趋于 L。左侧正是 f 在 0 的差商，因此 $f'(0)=L$。 ♦

点评　题目给了导数在去心邻域的极限，先用中值定理把函数差商写成某个导数值。连续性负责让中值定理可用于含端点 0 的区间；删掉连续性时，端点跳跃会破坏结论。

■ **例 R2.3　用中值定理证明 $e^x\geq 1+x$，改编自习题集 7 第 4 题**　证明对每个 $x\in\mathbb{R}$，都有 $e^x\geq 1+x$，并指出等号何时成立。

解　若 $x>0$，在 $[0,x]$ 上用中值定理，存在 $c\in(0,x)$ 使 $e^x-1=e^c x$。因 $e^c>1$，得 $e^x-1>x$。若 $x<0$，在 $[x,0]$ 上得到同一等式，其中 $c\in(x,0)$，所以 $0<e^c<1$；乘以负数 x 得 $e^c x>x$，仍有 $e^x-1>x$。$x=0$ 时等号成立。 ♦

点评　看到两个函数值之差与区间长度，就想到 Lagrange 中值定理。$x<0$ 时乘不等式会反向，不能沿用正半轴的符号判断。若只假设 e^x 连续而不控制导数，不能得到这条斜率估计。

■ **例 R2.4　指数函数的 Taylor 误差，改编自第 17 讲**　以 0 为中心取 e^x 的二次 Taylor 多项式 $P_2(x)=1+x+x^2/2$。证明在 $|x|\leq 1$ 上 $|e^x-P_2(x)|\leq e/6$，并计算 $x=1/2$ 时的多项式值。

解　Taylor 公式给出某个介于 0 与 x 之间的 c，使 $e^x-P_2(x)=e^c x^3/6$。当 $|x|\leq 1$ 时 $e^c\leq e^{|x|}\leq e$，故误差不超过 $e/6$。代入 $x=1/2$ 得 $P_2(1/2)=1+1/2+1/8=13/8$。 ♦

点评　需要有限阶近似时先写清余项形式，再用导数在整个区间上的上界控制误差。这个界不说明 Taylor 级数在任意函数处都等于原函数；第 17 讲的平坦函数给出反例。

R2.3.3 题型三：用上下和、积分定理估计

■ **例 R2.5　有限点改值不改变积分，改编自习题集 8 第 4 题**　在 $[-1,1]$ 上定义 $f(0)=0$，而 $f(x)=1$（$x\neq 0$）。证明 f Riemann 可积并求积分。

解　取 $0<\delta<1$，用分割 $P=\{-1,-\delta,\delta,1\}$。两侧区间上 $f=1$，中间区间上的下确界为 0、上确界为 1，所以 $L(f,P)=2-2\delta$、$U(f,P)=2$。给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta<\varepsilon/2$，则 $U-L<\varepsilon$。Darboux 判据说明 f 可积；又 $2-2\delta\leq\int_{-1}^{1} f\leq 2$ 对任意 δ 成立，令 $\delta\to 0$ 得积分为 2。 ♦

点评　单点的取值不会改变积分，但要用 Darboux 判据说明理由：把例外点放进一个总长度很短的区间，其他地方上下振幅为零。不能把「只有一个点不同」直接当作已经证明。

■ **例 R2.6　右端点 Riemann 和的误差，改编自习题集 9 第 2 题**　设 f 连续于 $[0,1]$、可导于 $(0,1)$，并且 $|f'(x)| \le M$。证明对每个正整数 n，

$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \right| \le \frac{M}{2n}.$$

再令 $f(x)=x^2$，写出右端点和及其与积分的误差。

解　在每个 $[(j-1)/n, j/n]$ 上用中值定理，$|f(x)-f(j/n)| \le M(j/n - x)$。积分后求和，误差不超过

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)/n}^{j/n} M(j/n - x)\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2n}.$$

对 x^2，可取 $M=2$，而 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1/3$。右端点和为 $(n+1)(2n+1)/(6n^2)$，故其超出积分 $1/(2n)+1/(6n^2)$。 ♦

点评　先把积分拆成小区间上的误差，再逐段用导数界；每段误差是斜率上界乘三角形面积。若端点处没有连续性，题设不足以控制采样到的端点值。

■ **例 R2.7　两个 p-型反常积分，改编自第 19 讲**　判定并计算（若收敛）$\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$。

解　先按定义把端点移到有限区间。对 $B>1$，$\int_1^B x^{-2}\,\mathrm{d}x = 1 - 1/B \to 1$。对 $0<\eta<1$，$\int_\eta^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2 - 2\sqrt{\eta} \to 2$。两个极限都有限，故原积分分别为 1 和 2。 ♦

点评　反常积分必须先写出截断极限；形式上的原函数值本身不能代替收敛性判断。一般的 p-型判据见核心结论：无穷端要求 $p>1$，有限端的 x^{-p} 要求 $p<1$。

■ **例 R2.8　参数曲线的弧长，改编自第 19–20 讲**　求曲线 $\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$ 在 $0 \le t \le 2\pi$ 上的弧长。

解　逐坐标求导得 $\gamma'(t)=(-\sin t, \cos t)$，因此速度为 $|\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$。弧长公式给出

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

♦

点评　弧长公式积分的是速度。若参数区间改成 $[0,4\pi]$，同一圆会走两遍，长度是 4π；长度随参数化过程计数，不能只看像集。

R2.3.4 题型四：判断一致收敛并交换极限

■ **例 R2.9　指数级数的收敛范围，改编自习题集 10 第 3 题**　令 $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k/k!$，$E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$。证明 $E_n\to E$ 在每个 $[-L,L]$ 上一致收敛，但在整个 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛。

解　固定 $L>0$。在 $[-L,L]$ 上有 $|x^k/k!|\le L^k/k!$，而数项级数 $\sum L^k/k!$ 收敛；Weierstrass M 判别法给出一致收敛。若在全轴一致收敛，则任取 $\varepsilon=1$，应有某个 n 使所有 x 都满足 $|E(x)-E_n(x)|<1$。但对 $x>0$，余项非负且至少为 $x^{n+1}/(n+1)!$，令 x 足够大即超过 1，矛盾。 ♦

点评　L 固定时，M 判别法提供与 x 无关的可求和上界；全实轴没有这样的统一尾界。逐点收敛甚至在每个紧区间上一致收敛，都不能推出整个非紧区间上的一致收敛。

R2.3.5 题型五：把初值问题写成不动点

■ **例 R2.10　一次 Picard 迭代，改编自第 23 讲**　在 $I=[-1/4,1/4]$ 上考察 $y'=y$、$y(0)=1$。令 $T(y)(x)=1+\int_0^x y(s)\,ds$，从 $y_0(x)=1$ 开始做三次迭代。写出 y_1,y_2,y_3，并给出 y_3 到唯一解的最大距离上界。

解　逐次代入得 $y_1=1+x$、$y_2=1+x+x^2/2$、$y_3=1+x+x^2/2+x^3/6$。在闭球 $\{y\in C(I):\|y\|_\infty\le 3\}$ 上，T 映入自身，因为 $\|Ty\|_\infty\le 1+(1/4)3=7/4<3$；并且 $\|Ty-Tz\|_\infty\le\frac14\|y-z\|_\infty$。压缩映射原理给出唯一不动点。显式函数 e^x 满足方程，故是该不动点。误差估计为

$$\|y_3-e^x\|_\infty\le\frac{(1/4)^3}{1-1/4}\|y_1-y_0\|_\infty=\frac{1}{192}.$$

♦

点评　先确认映射保持一个完备闭集，再估计压缩常数；只写出迭代式还没有证明解存在。误差公式依赖严格小于 1 的压缩常数，本例中 $\|y_1-y_0\|_\infty=1/4$。

例题 R2.1 练习开、闭与紧的判定；例题 R2.2、R2.3 和 R2.4 把导数、中值定理和余项估计连起来。积分部分由例题 R2.5、R2.6、R2.7、R2.8 练习 Darboux 判据、积分估计、反常积分与弧长；例题 R2.9 和 R2.10 分别连接一致收敛、幂级数和不动点迭代。

R2.4 常见错误

把有限维 Heine–Borel 定理搬到任意度量空间　错误说法：闭且有界就紧。反例：ℓ^2 的闭单位球含标准向量 e_n，且 $d(e_n,e_m)=\sqrt{2}$ $(n\neq m)$，所以该列没有收敛子列。正确说法：紧集在任意度量空间中闭且有界；反向只有在有限维欧氏空间中由 Heine–Borel 保证。

把逐点收敛当作一致收敛　错误说法：连续函数列逐点收敛，极限必连续。反例：$f_n(x)=x^n$ 在 $[0,1]$ 上逐点趋于在 1 处跳跃的函数。正确说法：一致收敛才足以把连续性传给极限；逐点收敛还不足以保证积分可交换。

把幂级数结论直接延伸到端点　错误说法：原级数与导数级数半径相同，就有相同的端点收敛性。反例：$\sum_{n\ge1} x^n/n^2$ 在 $x=1$ 收敛，而导数级数 $\sum_{n\ge1} x^{n-1}/n$ 在 $x=1$ 发散。正确说法：逐项求导和积分的结论在 $|x|<R$ 内成立；边界点必须逐个检验。

未检查不定式就套用 L'Hôpital 法则　错误说法：只要 f'/g' 有极限，f/g 就有相同极限。反例：$f(x)=1+x$、$g(x)=1-x$ 在 $x\to0$ 时 $f'/g'=-1$，而 $f/g\to1$。正确说法：先确认是 $0/0$ 或 ∞/∞ 型，并检查 g 与 g' 在所需邻域内非零。

本讲小结

- 在度量空间中，闭集可用收敛列刻画；紧集的每个开覆盖有有限子覆盖，且紧集必闭、有界。只有在 $\mathbb{R}^n$ 中才有「闭且有界 $\iff$ 紧」。
- 求导先检查定义域与拼接点；Lagrange 中值定理把函数增量写成 $f'(c)(b-a)$，Taylor 公式再用高阶导数控制余项。
- 有界函数 Riemann 可积，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$ 可选分划使 $U-L<\varepsilon$；闭区间连续函数可积，FTC1、FTC2 分别连接积分与导数、原函数。
- 反常积分是截断积分的极限：$\int_1^\infty x^{-p}$ 在 $p>1$ 时收敛，$\int_0^1 x^{-p}$ 在 $p<1$ 时收敛；光滑参数曲线的长度是 $\int|\gamma'|$。
- 一致收敛控制连续性与积分交换；在 $[-L,L]$、$L<R$ 上可用 M 判别法，再在 $|x|<R$ 内逐项求导或积分，端点另判。
- 完备函数空间上的压缩映射有唯一不动点；Picard–Lindelöf 在含初值点的局部区间 I 上把初值问题写成积分方程，并在闭球上验证映射与压缩条件。

练习

R2.1 ★　在 $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ 上令 $d(m,n)=|1/m-1/n|$。证明 d 是度量，并证明 $x_k=5k$ 是柯西列但在此空间中不收敛。改编自习题集 6 第 2 题。

R2.2 ★　在 $\mathbb{R}$ 中令 $D=\{1/n:n\ge1\}$、$E=D\cup\{0\}$。分别判断 D,E 是否闭，并给出证明。

R2.3 ★★　在平方可和数列空间 ℓ^2 中，令 e_n 为第 n 个坐标为 1、其余为 0 的向量。证明闭单位球闭且有界但不紧。

R2.4 ★★　令 $f(0)=0$，$f(x)=x^2\sin(1/x)$（$x\neq0$）。证明 f 在 0 可导而 f' 在 0 不连续。

R2.5 ★★　用 L'Hôpital 法则计算 $\lim_{x\to0}(e^x-1-x)/x^2$；再用 Taylor 公式证明 $|e^x-1-x|\le ex^2/2$（$|x|\le1$）。

R2.6 ★★　设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，$f\le g$ 且 $\int_a^b f=\int_a^b g$。证明 $f=g$ 于整个 $[a,b]$。改编自习题集 9 第 1 题。

R2.7 ★★　分类 $\int_1^\infty x^{-p}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x$ 的收敛条件；计算收敛时 $p=2$ 与 $p=1/2$ 的积分，并

求单位圆参数曲线 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的弧长。

R2.8 ★★★ 设连续函数列 f_n 在 $[a,b]$ 上有共同 Lipschitz 常数 L，且逐点收敛到 f。证明 f 仍满足同一 Lipschitz 条件，且 $f_n \to f$ 一致收敛。改编自习题集 10 第 5 题。

R2.9 ★★ 令 $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$。用逐项求导和积分证明 $E' = E$，并计算 $\int_0^1 E(x)\,\mathrm{d}x$。

R2.10 ★★★ 两个连续函数 y_1, y_2 都满足 $y_i(x) = a + \int_0^x y_i(t)^2\,\mathrm{d}t$ $(0 \le x \le 1)$。证明 $y_1 = y_2$，并说明证明中如何使用局部压缩估计。改编自习题集 9 第 5 题。

练习答案与提示

R2.1 映射 $n \mapsto 1/n$ 把 $\mathbb{N}$ 单射到 $\mathbb{R}$，故 $d(m,n) = |1/m - 1/n|$ 非负、对称，且 $d(m,n) = 0$ 当且仅当 $m = n$；三角不等式由实数绝对值直接得到。若 $k, l \ge N$，则 $d(5k, 5l) \le 1/(5N)$，故可使尾项距离任意小。若 $x_k \to m \in \mathbb{N}$，则 $1/(5k) \to 1/m$；左侧趋于 0，与 $1/m > 0$ 矛盾。

R2.2 $1/n \to 0 \notin D$，所以 D 不闭。若 $z_j \in E$ 且 $z_j \to z$，则 $z \ge 0$。若 $z = 0$，则 $z \in E$；若 $z > 0$，充分大的 j 满足 $z_j > z/2$，此时 z_j 只能取有限多个值 $1, 1/2, \dots, 1/N$。有限集闭，故该尾列的极限是其中一个值，也属于 E；所以 E 闭。

R2.3 闭单位球是连续映射 $x \mapsto \|x\|_2$ 的闭次水平集，且全在半径 2 的开球内，故闭且有界。每个 e_n 都在该球内，而 $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ $(n \ne m)$；任一子列仍两两相距 $\sqrt{2}$，不可能是柯西列或收敛列。紧度量空间中每列都有收敛子列，故此闭单位球不紧。

R2.4 $|f(x)| \le x^2$，故 f 在 0 连续；差商 $f(x)/x = x\sin(1/x) \to 0$，所以 $f'(0) = 0$。对 $x \ne 0$，$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$。取 $x_n = 1/(2\pi n)$ 与 $z_n = 1/((2n+1)\pi)$，导数值分别趋于 -1 与 1，所以 f' 在 0 不连续。

R2.5 两次使用 L'Hôpital 法则：极限先化为 $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/(2x)$，再化为 $\lim_{x\to 0} e^x/2 = 1/2$。Taylor 二阶公式给 $e^x = 1 + x + e^c x^2/2$，其中 c 在 0 与 x 之间；$|x| \le 1$ 时 $e^c \le e$，于是所求误差界成立。

R2.6 令 $h = g - f$，则 h 连续、非负且 $\int_a^b h = 0$。若某点 x_0 有 $h(x_0) > 0$，连续性给出 x_0 附近一个长度为正的区间，使 $h \ge h(x_0)/2$；即使 x_0 是端点，也取单侧区间。于是 $\int_a^b h > 0$，矛盾。因此 $h \equiv 0$，即 $f = g$。

R2.7 对 $p \ne 1$，$\int_1^B x^{-p}\,\mathrm{d}x = (B^{1-p} - 1)/(1-p)$，故无穷端当且仅当 $p > 1$ 收敛，值为 $1/(p-1)$。同理 $\int_\eta^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = (1 - \eta^{1-p})/(1-p)$，故零端当且仅当 $p < 1$ 收敛，值为 $1/(1-p)$；$p = 1$ 两者均按对数发散。代入 $p = 2$ 得 1，代入 $p = 1/2$ 得 2。单位圆曲线速度恒为 1，弧长为 $\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$。

R2.8 逐点取极限得 $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$。若 $L = 0$，各 f_n 为常函数，点态收敛即一致收敛。若 $L > 0$，取 $\eta = \varepsilon/(4L)$ 的有限网格；因网格点有限，存在统一的 N，使 $n \ge N$ 时各网格点误差小于 $\varepsilon/3$。任取 x 并取距它小于 η 的网格点 x_j，则 $|f_n(x) - f(x)| \le 2L\eta + \varepsilon/3 = 5\varepsilon/6 < \varepsilon$，故一致收敛。

R2.9 幂级数的根值判别给 E 的收敛半径为 ∞，故在每个有限区间可逐项求导、积分。于是 $E'(x) = \sum_{n\ge 1} x^{n-1}/(n-1)! = E(x)$，且

$$\int_0^1 E(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n!(n+1)} = \sum_{n\ge 0} \frac{1}{(n+1)!} = e - 1.$$

R2.10 设 $y_1, y_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ 都满足题设积分方程。令 $M = \max_{x\in[0,1]} \max(|y_1(x)|, |y_2(x)|)$，取 $h = 1/[4(M+1)]$。若两解在长度不超过 h 的小区间左端 u 相等，记 $D = \max|y_1 - y_2|$，则积分方程给 $D \le 2MhD = [M/(2(M+1))]D$。系数小于 1，故 $D = 0$。将 $[0,1]$ 分成有限多个这样的区间，从初值开始逐段得到两解相同；这正是积分算子在短区间上的压缩估计。